

УДК 51.72, 532.591

Точные решения уравнений мелкой воды для задачи о колебании жидкости в модельной акватории и их применение в верификации численных алгоритмов

Н.А. Мацкевич^{1,2}, Л.Б. Чубаров^{1,2}

¹Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

²Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: nikitamatskevitch@gmail.com (Мацкевич Н.А.), chubarov@ict.nsc.ru (Чубаров Л.Б.)

Мацкевич Н.А., Чубаров Л.Б. Точные решения уравнений мелкой воды для задачи о колебании жидкости в модельной акватории и их применение в верификации численных алгоритмов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 3. — С. 281–299.

В статье обсуждаются подходы к построению точных решений уравнений мелкой воды для задачи о колебаниях жидкости в акватории параболической формы (вплоть до вырожденного случая). Для поиска этих решений делается ряд предположений относительно формы их представления, учёта вращения Земли и донного трения. Окончательные результаты получаются путём решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом свободные поверхности являются поверхностями I или II порядка. Приводятся условия, при которых построенные решения являются ограниченными и допускают локализацию в пространстве. Результаты используются для верификации численного алгоритма метода крупных частиц, рассматриваются вопросы эффективности использования построенных решений в задачах верификации численных алгоритмов моделирования наката волн на берег.

DOI: 10.15372/SJNM20190303

Ключевые слова: *накат волн на берег, свободная поверхность, сила Кориолиса, сила донного трения, математическое моделирование, уравнения мелкой воды, аналитические решения, обыкновенные дифференциальные уравнения, численные алгоритмы, метод крупных частиц, верификация.*

Matkevich N.A., Chubarov L.B. Exact solutions of shallow water equations for the water oscillation problem in a simulated basin and their implementation in verifying numerical algorithms // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 3. — P. 281–299.

We present the approaches to solving a problem of shallow water oscillations in a parabolic basin (including an extra case of a horizontal plane). A series of assumptions about the form of solution and effects of Earth's rotation and bottom friction are made. Then the resulting ODE systems are solved. The corresponding free surfaces have first or second order. The conditions of finiteness and localization of a flow are analyzed. The solutions are used in the verification of numerical algorithm of the large particles method, the efficiency of the carried out tests is discussed.

Keywords: *wave run-up, free surface, Coriolis force, bottom friction, mathematical modeling, shallow water equations, exact solutions, ordinary differential equations, numerical algorithms, large particles method, verification.*

Введение

Вычислительные алгоритмы моделирования наката волн на берег нуждаются в релевантных методах верификации, из которых особую ценность имеет сопоставление численного решения с аналитическим. Однако нелинейность системы уравнений теории мелкой воды в совокупности с подвижностью границ области моделирования ограничивают число задач, обладающих аналитическим решением. Из них наиболее полно изучена одномерная задача наката необрушающихся волн на плоский откос [3], которую удалось разрешить для каналов произвольного сечения [6]. В качестве тестов используются её разнообразные частные решения, в которых параметры движения выражаются в явном виде [3, 4, 9, 10]. Однако одномерность задачи делает невозможным использование этих решений для тестирования численных алгоритмов моделирования заплеска волн на берега реальных акваторий со сложной конфигурацией границ.

Оригинальный подход к получению точных решений уравнений теории мелкой воды в пространственной постановке был предложен в [1]. Суть этого подхода состоит в определении формы дна акватории по заданному характеру движения воды. Оказалось, что предположение о независимости поля скоростей от пространственных координат необходимо приводит к параболическому профилю дна. Позднее этот результат был обобщён в работе [11], где рассматривалось поле скоростей в виде линейной функции от пространственных координат с коэффициентами, зависящими от времени. В ней же было замечено, что представление этого поля в виде многочлена степени выше первой приводит к переопределению системы уравнений. Тестовые задачи, основанные на решениях [1, 11], неоднократно использовались для верификации численных алгоритмов [2, 5, 8, 13].

Следует отметить, что в работах [1, 11] учёт внешних сил ограничивался силой Кориолиса. Позднее некоторые авторы [7] получали близкие по форме решения, ограничиваясь лишь учётом силы донного трения и пользуясь при этом дополнительными упрощениями вплоть до перехода к одномерному случаю [2].

В настоящей работе впервые приведена общая двумерная постановка задачи с учётом обеих внешних сил. Также впервые рассмотрены все возможные (в рамках подхода, предложенного в работах [1, 11]) допущения о формах течений. В результате получены новые классы точных решений со свободной поверхностью I и II порядков, некоторые из которых обладают свойством роста средней скорости течения пропорционально уменьшению полной глубины. Как следствие, количество движения в области осушения в любой момент времени остается большим и проблемы работы алгоритмов в этой области становятся хорошо заметными.

Полученные аналитические решения выражаются в элементарных функциях, что облегчает их применение для верификации алгоритмов. Однако это свойство не является единственно важным. Существенны также требования ограниченности решения в любой момент времени и возможности локализации движущегося объёма жидкости внутри сопоставимой с характерными размерами течения расчётной области. Для того чтобы полученные решения отвечали вышеперечисленным требованиям, были введены определённые ограничения на значения начальных данных. Анализ зависимости поведения решений от этих начальных данных позволил предложить простые алгоритмы их задания.

Результаты могут быть применены для верификации численных алгоритмов моделирования наката длинных волн на побережье. В качестве примера рассмотрен консервативный вариант алгоритма метода крупных частиц [12], который ранее хорошо зарекомендовал себя при моделировании различных волновых режимов [14].

Структура статьи такова: в пункте 1 приведены основные уравнения задачи; в п. 2

выведены новые классы точных решений; в п. 3 проанализировано влияние начальных данных на их поведение; в п. 4 решения использованы для верификации численного алгоритма метода крупных частиц. В заключение приводятся основные результаты исследования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении жидкости в модельной акватории. Введём декартову систему координат $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ таким образом, чтобы плоскость $\hat{z} = 0$ совпадала с уровнем невозмущённой свободной поверхности жидкости, а ось $O\hat{z}$ была направлена в сторону, противоположную направлению силы тяжести. Обозначим $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}, \hat{v})$, где \hat{u} , \hat{v} — осреднённые по вертикали горизонтальные компоненты вектора скорости, \hat{f} — параметр, характеризующий эффект вращения Земли (силы Кориолиса), $\hat{\tau}$ — параметр, характеризующий донное трение.

На следующем шаге перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} t &= \hat{c}_0 \hat{t} / \hat{a}_0, & z &= \hat{z} / \hat{h}_0, \\ \mathbf{x} = (x, y) &= \hat{\mathbf{x}} / \hat{a}_0, & \mathbf{u} = (u, v) &= \hat{\mathbf{u}} / \hat{c}_0, \\ f &= \hat{a}_0 \hat{f} / \hat{c}_0, & \tau &= \hat{a}_0 \hat{\tau} / \hat{c}_0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\hat{a}_0 \neq 0$, $\hat{h}_0 \neq 0$ — характерные для рассматриваемой задачи горизонтальный и вертикальный размеры соответственно, $\hat{c}_0 = \sqrt{g\hat{h}_0}$. Введём также $z = -h(x, y)$ — уравнение, определяющее профиль дна; $z = \eta(x, y, t)$ — уравнение, определяющее уровень свободной поверхности относительно невозмущённого состояния; $H(x, y, t) = h(x, y) + \eta(x, y, t)$ — соотношение, определяющее полную глубину.

Предположим, что выполнено соотношение $\hat{h}_0 / \hat{a}_0 \ll 1$, позволяющее использовать для описания исследуемого волнового процесса уравнения теории мелкой воды, которые в безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Hu] + \frac{\partial}{\partial y} [Hv] = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = fv - \tau u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = -fu - \tau v. \end{cases} \quad (1.2)$$

2. Аналитические решения

2.1. Общие положения

Следуя работе [11], будем искать решение, в котором поле скоростей представляется в форме линейной по пространственным координатам (здесь и далее нижний буквенный индекс будет обозначать частную производную по соответствующему направлению):

$$\begin{aligned} u &= u_0(t) + u_x(t)x + u_y(t)y, \\ v &= v_0(t) + v_x(t)x + v_y(t)y. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Как уже упоминалось, попытки найти решение с порядком многочленов в (2.1) больше единицы приводят к переопределённой системе уравнений [11].

Непосредственной подстановкой (2.1) в (1.2) можно убедиться в том, что при этом однозначно определяются формы дна бассейна и свободной поверхности, которые должны иметь порядок не выше второго [11]. Далее мы будем рассматривать случай, когда дно является параболоидом вращения (возможно, вырожденным), задаваемым в безразмерных переменных уравнением

$$h(x, y) = \delta (1 - x^2 - y^2), \quad (2.2)$$

где параметр δ разделяет решаемые в работе задачи на два класса: при $\delta = 1$ рассматривается движение в параболоиде вращения, а при $\delta = 0$ — на плоскости $z = 0$. При этом динамически изменяющаяся во времени свободная поверхность будет задаваться следующим соотношением [11]:

$$\eta = \eta_0(t) + \eta_x(t)x + \eta_y(t)y + \eta_{xx}(t)\frac{x^2}{2} + \eta_{xy}(t)xy + \eta_{yy}(t)\frac{y^2}{2}. \quad (2.3)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению 12 неизвестных коэффициентов из (2.1) и (2.3), зависящих только от времени и удовлетворяющих следующим системам ОДУ [11]:

$$\dot{\eta}_0 = -[u_0\eta_x + v_0\eta_y + (u_x + v_y)(\eta_0 + \delta)]; \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_x = -(\dot{u}_0 + u_0u_x + v_0u_y - fv_0 + \tau u_0), \\ \dot{\eta}_y = -(\dot{v}_0 + u_0v_x + v_0v_y + fu_0 + \tau v_0), \\ \dot{\eta}_{xx} = -[u_0(\eta_{xx} - 2\delta) + v_0\eta_{xy} + (2u_x + v_y)\eta_x + v_x\eta_y], \\ \dot{\eta}_{yy} = -[v_0(\eta_{yy} - 2\delta) + u_0\eta_{xy} + (2v_y + u_x)\eta_y + u_y\eta_x]; \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{xx} = -(\dot{u}_x + u_x^2 + u_yv_x - fv_x + \tau u_x), \\ \dot{\eta}_{xy} = -(\dot{u}_y + (u_x + v_y)u_y - fv_y + \tau u_y), \\ \dot{\eta}_{yy} = -(\dot{v}_x + (u_x + v_y)v_x + fu_x + \tau v_x), \\ \dot{\eta}_{yy} = -(\dot{v}_y + u_yv_x + v_y^2 + fu_y + \tau v_y), \\ \dot{\eta}_{xx} = -[(3u_x + v_y)(\eta_{xx} - 2\delta) + 2v_x\eta_{xy}], \\ \dot{\eta}_{xy} = -[2(u_x + v_y)\eta_{xy} + u_y(\eta_{xx} - 2\delta) + v_x(\eta_{yy} - 2\delta)], \\ \dot{\eta}_{yy} = -[(3v_y + u_x)(\eta_{yy} - 2\delta) + 2u_y\eta_{xy}]. \end{cases} \quad (2.6)$$

Решение этих громоздких нелинейных систем уравнений в общей постановке весьма затруднительно. К тому же, как правило, наибольший интерес имеют их простые частные решения, удобные в практическом применении.

Далее будут рассмотрены задачи, постановки которых основаны на различных предположениях о формах поля усреднённых скоростей, допускающих решения, *выраженные в элементарных функциях*. Некоторые из таких постановок будут представлены в этой работе впервые.

2.2. Свободная поверхность I порядка

В этом пункте результаты работы [1] обобщаются на случай произвольных значений f, τ . Для этого, следуя подходу, предложенному в [1], предполагается независимость поля скоростей от пространственных координат, т. е. $u_x \equiv u_y \equiv v_x \equiv v_y \equiv 0$. Тогда из (2.6) следует, что свободная поверхность сохраняет плоскую форму во все моменты времени.

Проекция свободной поверхности на плоскость $z = 0$ обладает в рассматриваемом случае центральной симметрией. Обозначим $X(t)$, $Y(t)$ координаты центра этой проекции. Тогда функции, задающие форму свободной поверхности и значения полной глубины, выражаются через новые переменные как $\eta = \eta_0(0) + \delta(2Xx - X^2 + 2Yy - Y^2)$, $H = \eta_0(0) + \delta(1 - (x - X)^2 - (y - Y)^2)$, а $X(t)$, $Y(t)$ в свою очередь определяются из линейной системы ОДУ:

$$\begin{cases} \ddot{X} + 2\delta X + \tau \dot{X} - f \dot{Y} = 0, \\ \ddot{Y} + 2\delta Y + \tau \dot{Y} + f \dot{X} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

решение которой удобно свести к нахождению комплексной величины $Z(t) = X(t) + iY(t)$, удовлетворяющей соотношению $\ddot{Z} + (\tau + if)\dot{Z} + 2\delta Z = 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} X(t) = B_1 \varphi^-(t) + B_2 \varphi^+(t), \\ Y(t) = B_1 \psi^-(t) + B_2 \psi^+(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь и далее буквами A , B , C будут обозначаться произвольные вещественные константы, если не оговорено иное, а также

$$\begin{aligned} \varphi^\pm(t) &= e^{-(\frac{\tau}{2} \pm \beta)t} \sin\left[\left(\frac{f}{2} \pm \alpha\right)t + B_{3,4}\right], \\ \psi^\pm(t) &= e^{-(\frac{\tau}{2} \pm \beta)t} \cos\left[\left(\frac{f}{2} \pm \alpha\right)t + B_{3,4}\right], \\ \alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}, \quad \beta = \frac{\lambda_2}{2\alpha}, \\ \lambda_1 &= 2\delta - \frac{\tau^2}{4} + \frac{f^2}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{f\tau}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Завершая пункт, приведём явные формулы в терминах u , v , η :

$$\begin{aligned} u(t) &= B_1 \left[\left(\frac{f}{2} - \alpha\right) \psi^-(t) - \left(\frac{\tau}{2} - \beta\right) \varphi^-(t) \right] + B_2 \left[\left(\frac{f}{2} + \alpha\right) \psi^+(t) - \left(\frac{\tau}{2} + \beta\right) \varphi^+(t) \right], \\ v(t) &= -B_1 \left[\left(\frac{f}{2} - \alpha\right) \varphi^-(t) + \left(\frac{\tau}{2} - \beta\right) \psi^-(t) \right] - B_2 \left[\left(\frac{f}{2} + \alpha\right) \varphi^+(t) + \left(\frac{\tau}{2} + \beta\right) \psi^+(t) \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\eta(x, y, t) = \eta_0(0) + \delta(x^2 - [x - B_1 \varphi^-(t) - B_2 \varphi^+(t)]^2 + y^2 - [y - B_1 \psi^-(t) - B_2 \psi^+(t)]^2).$$

Тип движения (2.10) проиллюстрирован на рисунке 2.1. Здесь в первой строке показано начальное положение жидкости $X(0) = 1.9$, $Y(0) = 1.5$, $u_0(0) = 0$, $v_0(0) = 0$; во второй — движение без внешних сил ($f = 0$, $\tau = 0$); в третьей — движение под действием силы Кориолиса ($f = 1$, $\tau = 0$); четвёртая строка соответствует движению под действием сил Кориолиса и донного трения ($f = 1$, $\tau = 1$). Стрелками отрисовано поле скоростей, сплошной линией с маркерами — типичная траектория движения частицы.

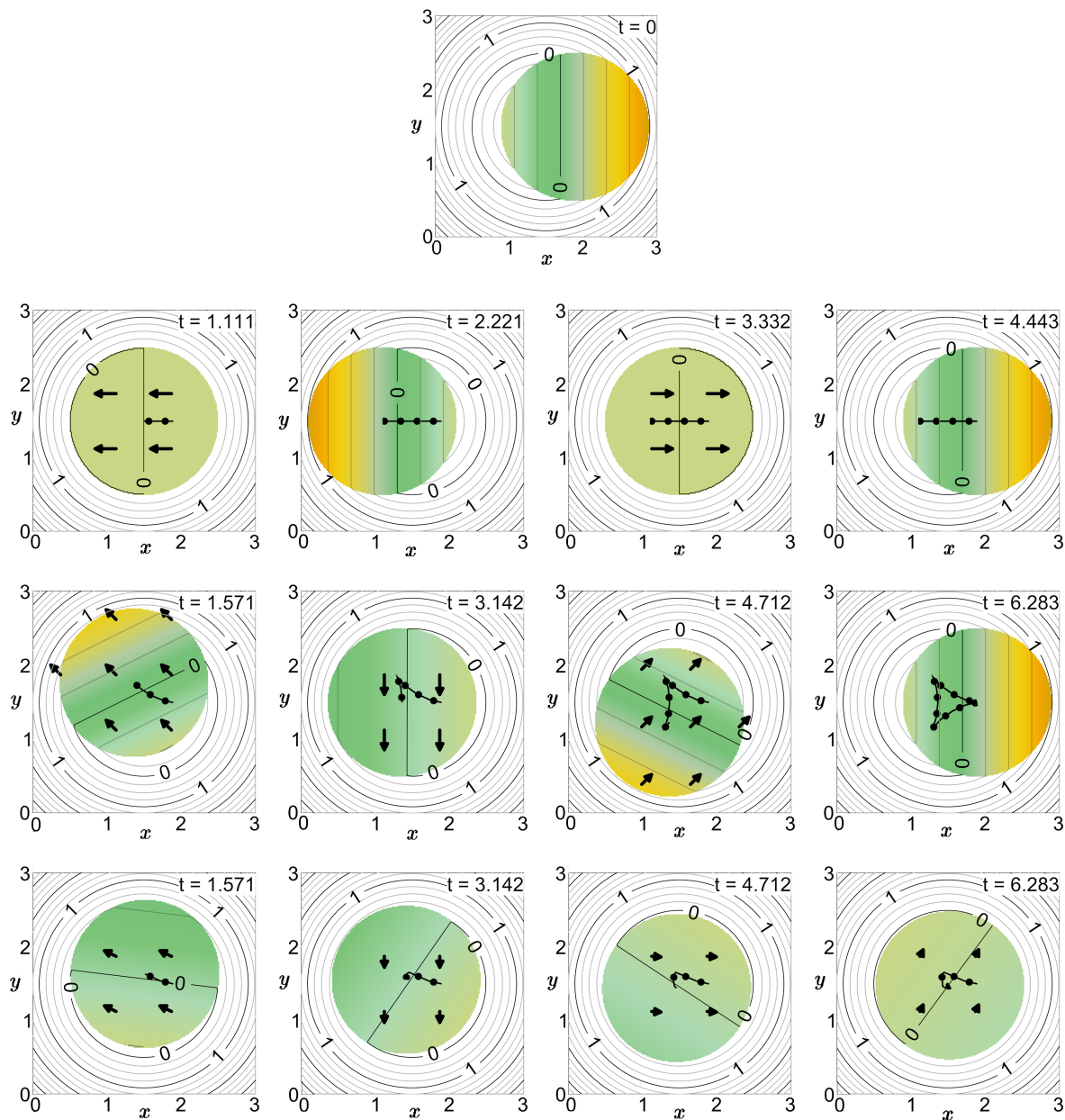


Рис. 2.1. Движение плоской свободной поверхности в параболоиде вращения, $\delta = 1$

2.3. Свободная поверхность II порядка

Решение, соответствующее колебаниям жидкости с параболической формой свободной поверхности, будем искать, как и в работе [11], предполагая $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$.

Изначально рассматривался только случай $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. При этом свободная поверхность необходимо являлась параболоидом вращения. Далее будет показано, что рассмотрение всех комбинаций $u_x = \pm v_y$, $u_y = \pm v_x$ позволяет получить решения с другими формами свободной поверхности (параболический цилиндр, гиперболический параболоид), и, тем самым, ощутимо расширяет класс тестовых задач. При некоторых ограничениях на начальные данные решение остается ограниченным.

Из условия $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$ следует, что точка свободной поверхности $(0, 0, \eta_0(0))$ неподвижна в горизонтальной плоскости, сама свободная поверхность обладает центральной симметрией относительно этой точки, а уравнения (2.5) сводятся к тождествам $\eta_x = \eta_y = \dot{\eta}_x = \dot{\eta}_y = 0$, т.е. из системы (2.4)–(2.6) исключаются 4 уравнения (2.5) и 4 неизвестных u_0, v_0, η_x, η_y . Введём для удобства следующие обозначения: $p = u_x, q = u_y, s = p^2 + q^2$.

Случай 1. Пусть $u_y = v_x$. Этот тип течения рассматривается здесь впервые. В терминах скоростей u, v такое течение является “безвихревым”. В силу уравнений $\eta_{xy} = -(\dot{u}_y + (u_x + v_y)u_y - fv_y + \tau u_y) = -(\dot{v}_x + (u_x + v_y)v_x + fu_x + \tau v_x)$ системы (2.5) неминуемо имеет место $u_x = -v_y$ и уравнения (2.4), (2.6), с учётом новых обозначений переписываются как

$$\begin{cases} \eta_0 = \eta_0(0), \\ \dot{s} + \tau s = 0, \\ \ddot{p} - f\dot{q} + \tau\dot{p} + 2p(s + 2\delta) = 0, \\ \ddot{q} + f\dot{p} + \tau\dot{q} + 2q(s + 2\delta) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Из второго уравнения системы (2.11) следует $s(t) = C^2 e^{-\tau t}$. Подставим этот результат в оставшиеся уравнения. Далее умножим четвёртое уравнение на мнимую единицу i и прибавим к третьему, получив

$$\ddot{w} + (\tau + if)\dot{w} + 2(C^2 e^{-\tau t} + 2\delta)w = 0, \quad (2.12)$$

где $w(t) = p(t) + iq(t)$. Но из определения величины $w(t)$ следует $w\bar{w} = s(t)$, т.е. $w(t) = C e^{-\frac{\tau t}{2} - i(\frac{f}{2} + \xi(t))}$, где $\xi(t)$ — неизвестная вещественнозначная функция. В совокупности с уравнением (2.12) это дает

$$\dot{\xi}(t) = \pm \sqrt{2(C^2 e^{-\tau t} + \delta) + \lambda_1}. \quad (2.13)$$

Здесь и далее мы используем те же обозначения $\lambda_{1,2}$ из (2.9). Условие (2.13) приводит к равенству $\tau C^2 e^{-\tau t} = \pm \lambda_2 \sqrt{2(C^2 e^{-\tau t} + \delta) + \lambda_1}$. Таким образом, в случае $\tau \neq 0$ у системы (2.11) нет нетривиальных решений, так как при этом неминуемо $C = 0$.

Однако при $\tau = 0$ имеем класс точных решений:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0), \\ p(t) &= p(0) \cos \alpha_{\pm} t \pm \sqrt{s(0) - p^2(0)} \sin \alpha_{\pm} t, \\ q(t) &= -p(0) \sin \alpha_{\pm} t \pm \sqrt{s(0) - p^2(0)} \cos \alpha_{\pm} t, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\alpha_{\pm} = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} + 2s(0) + 4\delta}$.

В терминах u, v, η (при $\tau = 0$) решение принимает вид:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= p(t)x + q(t)y, \\ v(x, y, t) &= q(t)x - p(t)y, \\ \eta(x, y, t) &= \eta_0(0) - \frac{s(0)}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\alpha_{\pm} - f}{2}(q(t)y^2 + 2p(t)xy - q(t)x^2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тип движения (2.15) проиллюстрирован на рис. 2.2 для $f = 1$ и $\tau = 0$. Здесь строка 1 соответствует движению в параболоиде вращения: $\delta = 1, u_x(0) = 1, u_y(0) = 0, \eta_0(0) = 0.057$; строка 2 — движению на плоскости: $\delta = 0, u_x(0) = 0.79, u_y(0) = 0, \eta_0(0) = 0.353$. Стрелками отрисовано поле скоростей, сплошной линией с маркерами — типичная траектория движения частицы.

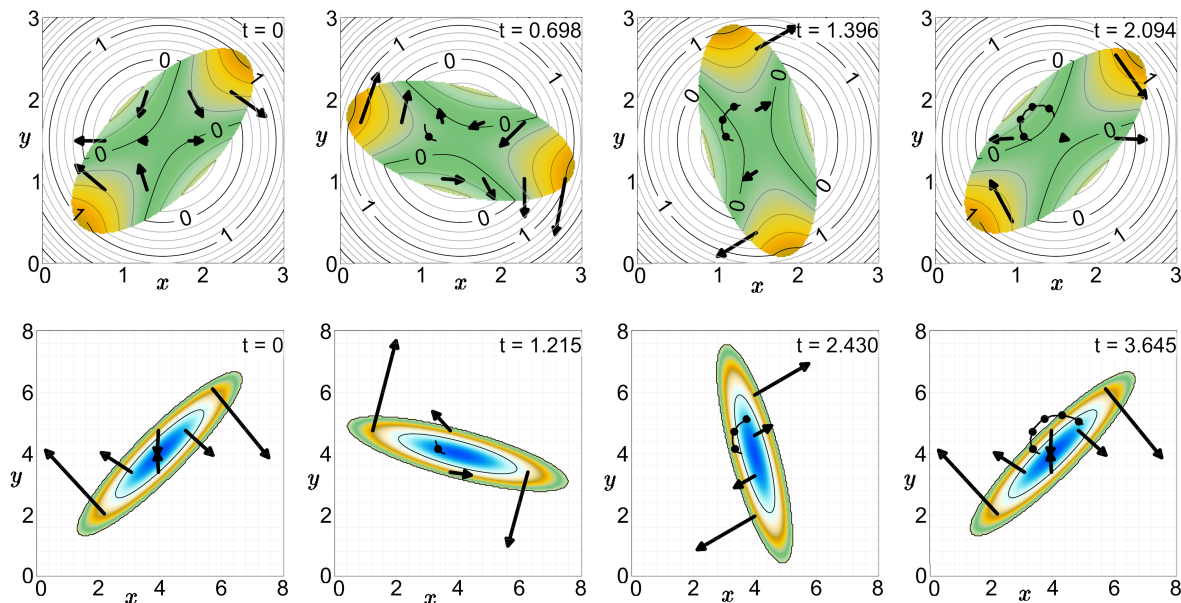


Рис. 2.2. Периодическое движение жидкости в потенциальном поле скоростей с учётом силы Кориолиса

Случай 2. Пусть $u_y = -v_x$, $u_x = -v_y$. Эта конфигурация рассматривается впервые. Здесь системы (2.4), (2.6) переписываются в виде переопределённой системы уравнений:

$$\begin{cases} \eta_0 = \eta_0(0), \\ \ddot{p} + \tau\dot{p} + 2p^3 - 2pq^2 + 4\delta p = 0, \\ 4\dot{p}p - 2\dot{q}q + \dot{q}f + 2\tau p^2, \\ \dot{p}(2q + f) + 2\tau pq = 0, \\ \dot{q} + \tau q = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

При учёте обеих внешних сил, т.е. $f \neq 0$ и $\tau \neq 0$, у системы (2.16) не существует ненулевых решений. Однако при $f = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= q(0) e^{-\tau t} (y \pm (1 - \delta)x), \\ v(x, y, t) &= -q(0) e^{-\tau t} (x \pm (1 - \delta)y), \\ \eta(x, y, t) &= \eta_0(0), \end{aligned} \quad (2.17)$$

а при $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \pm\sigma x + q(0)y, \\ v(x, y, t) &= \mp\sigma y - q(0)x, \\ \eta(x, y, t) &= \eta_0(0) + \frac{q^2(0) - fq(0) - \sigma^2}{2} (x^2 + y^2) \mp \sigma fxy, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где параметр σ может принимать значение 0 или $\sqrt{q(0) - 2\delta}$.

Тип движения (2.18) проиллюстрирован на рис. 2.3 для $f = 1$ и $\tau = 0$. Здесь слева показано движение в параболоиде вращения: $\delta = 1$, $u_x(0) = 0.5$, $u_y(0) = 1.5$, $\eta_0(0) = -0.159$; справа — движение на плоскости: $\delta = 0$, $u_x(0) = 0$, $u_y(0) = 0.5$, $\eta_0(0) = 0.354$. Стрелками отрисовано поле скоростей, сплошной линией с маркерами — типичная траектория движения частицы.

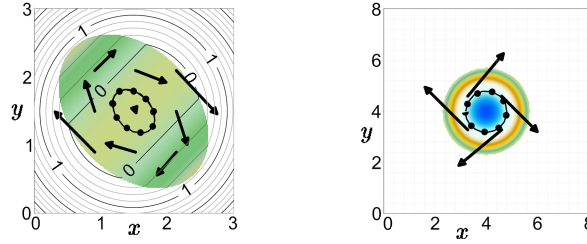


Рис. 2.3. Стационарное течение в поле скоростей с нулевой дивергенцией с учётом силы Кориолиса

Случай 3. Пусть $u_y = -v_x$, $u_x = v_y$. Это предположение приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{p} + (6p + \tau)\dot{p} + 4p^3 + 4\tau p^2 + (f^2 + 8\delta)p + 2\tau q^2 - f\tau q = 0, \\ \dot{q} + (2q - f)p + \tau q = 0, \\ \eta\dot{\eta} + 2p(\eta_0 + \delta) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

При $\tau = 0$ (т.е. без учёта донного трения) первое уравнение системы (2.19) содержит только неизвестную p , что значительно упрощает поиск решения:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\omega}{2} \frac{A \sin(\omega t + C)}{1 - A \cos(\omega t + C)}, \\ q(t) &= \left(q(0) - \frac{f}{2} \right) \frac{1 - A \cos C}{1 - A \cos(\omega t + C)} + \frac{f}{2}, \\ \eta_0(t) &= (\eta_0(0) + \delta) \frac{1 - A \cos C}{1 - A \cos(\omega t + C)} - \delta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Аналогичные результаты без вывода были приведены в [11]. Здесь же представлен новый подход к получению решений (2.20).

Обозначим $\omega^2 = f^2 + 8\delta$. Тогда система (2.19) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{p} + 6\dot{p}p + 4p^3 + \omega^2 p = 0, \\ \dot{q} + (2q - f)p = 0, \\ \eta\dot{\eta} + 2p(\eta_0 + \delta) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Из второго уравнения (2.21) следует $p = -\frac{\dot{\xi}}{2}$, где $\xi = \ln\left(q - \frac{f}{2}\right)$. Обозначим

$$D(t) = 2\omega^2 + 4\dot{p} + 8p^2 = 2\left(\omega^2 - \ddot{\xi} + \dot{\xi}^2\right), \quad (2.22)$$

тогда первое уравнение (2.21) переписывается в виде $\dot{D} - \dot{\xi}D = 0$, откуда следует линейное дифференциальное уравнение первого порядка для $p^2(\xi)$: $D(\xi) = B_1 e^\xi$. Окончательно, $d\xi = \pm\sqrt{B_1 e^\xi + B_2 e^{2\xi} - \omega^2} dt$. После интегрирования тривиальным образом можно получить (2.20). В терминах u , v , η при $\tau = 0$ решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \frac{A\omega \sin(\omega t + C) x + (2q(0) - f)(1 - A \cos C) y}{2(1 - A \cos(\omega t + C))} + \frac{f}{2} y, \\
v(x, y, t) &= \frac{A\omega \sin(\omega t + C) y - (2q(0) - f)(1 - A \cos C) x}{2(1 - A \cos(\omega t + C))} - \frac{f}{2} x, \\
\eta(x, y, t) &= (\eta_0(0) + \sigma) \frac{1 - A \cos C}{1 - A \cos(\omega t + C)} - \delta + \\
&\quad \left[\frac{\omega^2 (A^2 - 1) + 2(q(0) - f)^2 (1 - A \cos C)^2}{8(1 - A \cos(\omega t + C))^2} + \delta \right] (x^2 + y^2).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

К сожалению, решить систему (2.19) аналитически при произвольных значениях τ пока не удаётся. Даже проверка самого факта существования нетривиальных решений, выраженных в элементарных функциях, оказывается достаточно затруднительной и выходит за пределы нашей работы.

3. Алгоритмы выбора начальных данных

3.1. Общие положения

В настоящем пункте изложен подход, упрощающий процедуру формирования набора начальных данных, заключающийся в последовательном определении интервалов допустимых значений согласно некоторым рекомендованным алгоритмам. Следование этим алгоритмам не является необходимостью, но существенно упрощает использование построенных аналитических решений. Будут также приведены и более общие соотношения на случай, если перед пользователем стоит задача проверить выполнение ограничивающих условий для конкретных значений параметров.

Множество начальных данных для рассмотренных выше задач можно определить следующим списком:

$$\begin{aligned}
\delta &\in \{0, 1\}, \quad \tau \geq 0, \quad f \in \mathbb{R}, \\
X(0), \quad Y(0), \quad u_0(0), \quad v_0(0), \\
u_x(0) = p(0), \quad u_y(0) = q(0), \quad \eta_0(0) \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В безразмерных переменных для объёма жидкости полагается выполненным условие

$$\text{Vol}(t) = \frac{\pi}{2}, \tag{3.2}$$

которое порождает определённые зависимости между значениями параметров из (3.1).

Для удобства вычислений желательно также, чтобы движение в любой момент времени было локализовано

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \tag{3.3}$$

где $R > 1$ — величина, характеризующая горизонтальный размер будущей расчётной области.

3.2. Свободная поверхность I порядка

Напомним, что из постановки задачи о колебаниях плоской свободной поверхности (см. п. 2.2) следует $u_x(0) = p(0) = 0$ и $u_y(0) = q(0) = 0$. Условие (3.2) влечёт $\eta_0(0) = 0$.

При этом течение на плоскости ($\delta = 0$) вырождается, и ниже будут рассмотрены только течения в параболоиде ($\delta = 1$). Для выполнения условия (3.3) в виде $\sqrt{X^2 + Y^2} \leq R - 1$ в случае незатухающих колебаний необходимо и достаточно, чтобы $|B_1| + |B_2| \leq R - 1$, где B_1, B_2 из п. 2.2. Для затухающих колебаний это условие является достаточным.

Теперь остаётся заметить, что параметры из (3.1) связаны с константами следующим соотношением:

$$\left[\left(\frac{f}{2} \pm \alpha \right) X(0) + v(0) \right]^2 + \left[\left(\frac{f}{2} \pm \alpha \right) Y(0) - u(0) \right]^2 = 16\alpha^2 B_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Поэтому для рассматриваемого случая можно рекомендовать следующий

Алгоритм 1.

1. Положить: $\delta := 1, p(0) := 0, q(0) := 0, \eta_0(0) := 0$.
2. Выбрать: $f \in \mathbb{R}, \tau \geq 0$.
3. Выбрать $X(0), Y(0), u_0(0), v_0(0)$ так, что

$$\begin{aligned} & \sqrt{(f + 2\alpha) X(0) + v_0(0)^2 + (f + 2\alpha) Y(0) - u_0(0)^2} + \\ & \sqrt{(f - 2\alpha) X(0) + v_0(0)^2 + (f - 2\alpha) Y(0) - u_0(0)^2} \leq 4\alpha(R - 1). \end{aligned}$$

3.3. Свободная поверхность II порядка

В задачах о колебаниях свободной поверхности II порядка (см. п. 2.3) поворотом системы координат можно добиться следующего вида функции, определяющей значения полной глубины,

$$H(x, y, t) = H_0(t) - H_1(t) \tilde{x}^2 - H_2(t) \tilde{y}^2, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{x} = (x, y), \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$, где $\mathbf{Q}(t)$ — некоторая ортогональная матрица, такая, что $\det \mathbf{Q} = 1$, а свойства функций $H_i(t)$ будут обсуждаться далее. Заметим, что при $H_i(t) > 0$ соотношение $H(x, y, t) = 0$ задаёт эллипс в плоскости переменных $O\tilde{x}\tilde{y}$. Так как

$$\text{Vol}(t) = \frac{\pi}{2} \frac{H_0^2(t)}{\sqrt{H_1(t) H_2(t)}}, \quad (3.6)$$

то условие (3.2) равносильно равенству $H_0^2(t) = \sqrt{H_1(t) H_2(t)}$. Из того что максимальный радиус области, занимаемой жидкостью, равен по величине наибольшей из полуосей эллипса, то $H_0(t) \leq R^2 \min\{H_1(t), H_2(t)\}$ по условию (3.3).

Рассмотрим далее различные типы течений по отдельности.

Случай 1. Пусть $u_y = v_x$. Напомним, что в этом случае нетривиальное решение возможно только при условии $\tau = 0$. Приведём функцию $H(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$ к виду (3.5). Из аналитического решения (2.15) получим:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \eta_0(0) + \delta, \\ H_1(t) &= \frac{1}{2}s(0) + \sqrt{s(0)} \frac{\alpha_{\pm} - f}{2} + \delta, \\ H_2(t) &= \frac{1}{2}s(0) - \sqrt{s(0)} \frac{\alpha_{\pm} - f}{2} + \delta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где α_{\pm} из п. 2.3, случай 1.

Обозначим $C = \frac{1}{2}s(0) + \delta$. Из условия (3.3) следует, что необходимо $\tilde{g}(R^4 C) \leq R^4 C$, где

$$\tilde{g}(z) = \sqrt[3]{\sqrt[2]{z^2 + \frac{1}{27}} + z} - \sqrt[3]{\sqrt[2]{z^2 + \frac{1}{27}} - z}. \quad (3.8)$$

Это условие выполнено при $R^4 C \geq 1$.

Если для $f \geq 0$ выбрать α_- или α_+ для $f < 0$ (см. п. 2.3, случай 1), то по условию (3.3)

$$\frac{\tilde{g}(R^4 C)}{R^4} \left(2C - \frac{\tilde{g}(R^4 C)}{R^4} \right) \leq (\eta_0(0) + \delta)^4 \leq C(2\delta - C). \quad (3.9)$$

При $\delta = 0$ эти неравенства удовлетворяются лишь в тривиальном случае, а при $\delta = 1$ порождают трудно разрешимое относительно своих аргументов функциональное неравенство. Поэтому рекомендуется использовать α_+ при $f \geq 0$ или α_- при $f < 0$. Тогда

$$s(0) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\tilde{g}(R^4 C)}{R^4} \left(2C - \frac{\tilde{g}(R^4 C)}{R^4} \right) \leq (\eta_0(0) + \delta)^4 < C^2. \quad (3.10)$$

Последнее неравенство задаёт непустой интервал допустимых значений $\eta_0(0)$ при любых $R > 1$, $C > R^{-4}$. После определения остальных параметров требуется положить

$$\frac{|f|}{2} = C \sqrt{\frac{s(0)}{C^2 - H_0^4(0)}} - \sqrt{\frac{C^2 - H_0^4(0)}{s(0)}}. \quad (3.11)$$

Для рассматриваемого здесь случая свободная поверхность может быть поверхностью одного из 3 типов:

- эллиптический параболоид при $|f|\sqrt{s(0)} > s(0) + 4\delta$,
- параболический цилиндр при $|f|\sqrt{s(0)} = s(0) + 4\delta$,
- гиперболический параболоид при $|f|\sqrt{s(0)} < s(0) + 4\delta$.

Приведённые в этом пункте результаты позволяют сформулировать итоговый простой алгоритм.

Алгоритм 2.

1. Положить: $X(0) := 0$, $Y(0) := 0$, $u_0(0) := 0$, $v_0(0) := 0$, $\tau := 0$.
2. Выбрать: $\delta \in \{0, 1\}$, $\alpha_{\pm} \in \{\alpha_+, \alpha_-\}$.
3. Выбрать $p(0)$, $q(0)$ так, что $p^2(0) + q^2(0) = s(0) > 2(R^{-4} - \delta)$.
4. Выбрать $\eta_0(0)$ так, что $\frac{\tilde{g}(R^4 C)}{R^4} \left(2C - \frac{\tilde{g}(R^4 C)}{R^4} \right) \leq (\eta_0(0) + \delta)^4 < C^2$.
5. Положить $f := 2 \operatorname{sgn} \alpha_{\pm} \left[C \sqrt{\frac{s(0)}{C^2 - H_0^4(0)}} - \sqrt{\frac{C^2 - H_0^4(0)}{s(0)}} \right]$.

Случай 2. Пусть $u_y = -v_x$, $u_x = -v_y$. В этом случае при $\tau > 0$ решения либо тривиальны, либо соответствующие течения происходят в неограниченной области (т. е. требование (3.3) не выполнимо для любого R), и поэтому такие решения здесь не рассматриваются. Для случая $\tau = 0$ и произвольного f имеем:

$$\begin{aligned}
H_0(t) &= \eta_0(0) + \delta, \\
H_1(t) &= \frac{p^2(0) - q^2(0) + fq(0) + fp(0)}{2} + \delta, \\
H_2(t) &= \frac{p^2(0) - q^2(0) + fq(0) - fp(0)}{2} + \delta.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

При $\delta = 0$ (а этот параметр хотелось бы задавать в первую очередь, так как он определяет батиметрию) ограниченное решение можно получить только при условиях: $p(0) = 0$, $q(0) \neq 0$, $\eta_0(0) \geq R^{-2} - \delta$, $f = q(0) + \frac{2}{q(0)} (\eta_0^2(0) + 2\delta\eta_0(0))$. Тогда свободная поверхность будет являться эллиптическим параболоидом.

При $\delta = 1$ существует возможность положить $p(0) = \pm\sqrt{q^2(0) - 2}$, $|q(0)| > \sqrt{2}$, $\eta_0(0) \geq \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{2}{|q(0)| - |p(0)|}} - 1$, $f = \sqrt{2} (\eta_0(0) + 1)^2 \operatorname{sgn} q(0)$. Тогда свободная поверхность будет являться гиперболическим параболоидом при $fq(0) > 1 + \frac{f^2}{2}$, параболическим цилиндром при $fq(0) = 1 + \frac{f^2}{2}$ и эллиптическим параболоидом при $fq(0) < 1 + \frac{f^2}{2}$.

На основе этих рассуждений ниже предлагается следующий алгоритм задания начальных данных.

Алгоритм 3.

1. Положить: $X(0) := 0$, $Y(0) := 0$, $u_0(0) := 0$, $v_0(0) := 0$, $\tau := 0$.
2. Выбрать $\delta \in \{0, 1\}$.
3. Если $\delta = 0$, то

$$\begin{aligned}
p(0) &= 0, \quad q(0) \neq 0, \quad \eta_0(0) \geq R^{-2}, \\
f &= q(0) + 2\frac{\eta_0^2(0)}{q(0)},
\end{aligned}$$

иначе либо

$$\begin{aligned}
p(0) &= 0, \quad q(0) \neq 0, \quad \eta_0(0) \geq R^{-2} - 1, \\
f &= q(0) + 2\frac{\eta_0^2(0) + 2\eta_0(0)}{q(0)},
\end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned}
p(0) &= \pm\sqrt{q^2(0) - 2}, \quad |q(0)| > \sqrt{2}, \\
\eta_0(0) &\geq \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{2}{|q(0)| - |p(0)|}} - 1, \\
f &= \sqrt{2} (\eta_0(0) + 1)^2 \operatorname{sgn} q(0).
\end{aligned}$$

Случай 3. Пусть $u_y = -v_x$, $u_x = v_y$. Здесь вынужденно (см. п. 2.3, случай 3) рассматриваются течения в отсутствие донного трения, т. е. полагается $\tau = 0$. Коэффициенты (3.5) при этом принимают вид:

$$\begin{aligned}
H_0(t) &= \eta_0(t) + \delta, \\
H_1(t) &= H_2(t) = \frac{\dot{p} + p^2 - q^2 + fq}{2} + \delta.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

С учётом (2.20) условие (3.2) эквивалентно равенству

$$\frac{\omega^2}{8} \frac{1 - A^2}{(1 - A \cos C)^2} = \frac{1}{2} \left(q(0) - \frac{f}{2} \right)^2 + (\eta_0(0) + \delta)^2, \quad (3.14)$$

поэтому для изменяющихся во времени решений выполнение ограничений (3.2) и (3.3) сводится (с той лишь оговоркой, что допустимо $H_0(0) = R^{-2}$ при $p(0) = 0$) к условию

$$\left(q(0) - \frac{f}{2} \right)^2 \leq (P - p^2(0)) \frac{2 - H_0(0) R^2}{1 - H_0(0) R^2}, \quad (3.15)$$

где

$$P = 2H_0(0) \left(\frac{\omega^2 R^2}{8} - H_0(0) \right) \frac{2 - H_0(0) R^2}{1 - H_0(0) R^2}. \quad (3.16)$$

Из этого условия определяются допустимые значения величин $p(0)$, $q(0)$, $\eta_0(0)$, f , а также рекомендуемый в таком случае алгоритм задания начальных данных.

Алгоритм 4.

1. Положить: $X(0) := 0$, $Y(0) := 0$, $u_0(0) := 0$, $v_0(0) := 0$, $\tau := 0$.
2. Выбрать $\delta \in \{0, 1\}$.
3. Выбрать один из вариантов:

- а) $f^2 \geq 8 \left(\frac{1}{R^4} - \delta \right)$, $\eta_0(0) = \frac{1}{R^2} - \delta$,
 $p(0) = 0$, $\left(q(0) - \frac{f}{2} \right)^2 \leq \frac{\omega^2}{4} - \frac{2}{R^4}$;
- б) $f^2 > 8 \left(\frac{1}{R^4} - \delta \right)$, $\frac{1}{R^2} - \delta < \eta_0(0) \leq \min \left\{ \frac{\omega^2 R^2}{8}, \frac{2}{R^2} \right\} - \delta$,
 $p^2(0) \geq 0$, $\left(q(0) - \frac{f}{2} \right)^2 \leq (P - p^2(0)) \frac{2 - H_0(0) R^2}{1 - H_0(0) R^2}$;
- в) $8 \left(\frac{2}{R^4} - \delta \right) > f^2 > 8 \left(\frac{1}{R^4} - \delta \right)$, $\frac{\omega^2 R^2}{8} - \delta < \eta_0(0) < \frac{2}{R^2} - \delta$,
 $p^2(0) \geq P$, $\left(q(0) - \frac{f}{2} \right)^2 \leq (P - p^2(0)) \frac{2 - H_0(0) R^2}{1 - H_0(0) R^2}$;
- г) $f^2 > 8 \left(\frac{2}{R^4} - \delta \right)$, $\frac{2}{R^2} - \delta < \eta_0(0) < \frac{\omega^2 R^2}{8} - \delta$,
 $p^2(0) \leq P$, $\left(q(0) - \frac{f}{2} \right)^2 \leq (P - p^2(0)) \frac{2 - H_0(0) R^2}{1 - H_0(0) R^2}$.

4. Пример верификации вычислительного алгоритма

4.1. Общие положения

Настоящий пункт посвящён использованию полученных аналитических решений для верификации алгоритма метода крупных частиц [12], используемого при решении уравнений теории мелкой воды (1.2).

Реализация шага по времени тестируемого алгоритма производится в два этапа, на каждом из которых ищется приближённое решение упрощённых систем уравнений. На I (эйлеровом) этапе пренебрегают эффектами движения жидкости через границы ячеек, т. е. из уравнений мелкой воды (1.2) “отбрасываются” конвективные члены. Обновлённые значения сеточных функций снова подвергаются пересчёту на II (лагранжевом)

этапе, где определяются плотности потоков массы через границы ячеек. Используемая при этом явная противопоточная консервативная схема аппроксимирует систему уравнений (1.2) с конвективными членами, но без правой части. Конкретный рассматриваемый алгоритм выглядит следующим образом:

Этап I.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{i,j} &= H_{i,j}^n, \\ \tilde{u}_{i,j} &= \frac{1}{1 + \tau \Delta t} \left(u_{i,j}^n - \Delta t \left[\frac{(H-h)_{i+1,j}^n - (H-h)_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - f v_{i,j}^n \right] \right), \\ \tilde{v}_{i,j} &= \frac{1}{1 + \tau \Delta t} \left(v_{i,j}^n - \Delta t \left[\frac{(H-h)_{i,j+1}^n - (H-h)_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + f u_{i,j}^n \right] \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Этап II.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i+1,j}}{2}, & \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j} &= \frac{\tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j}}{2}, \\ \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{i,j+1}}{2}, & \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\tilde{v}_{i,j-1} + \tilde{v}_{i,j}}{2}, \\ \mathbf{Q} &= (H, Hu, Hv), \\ \tilde{\mathbf{q}}_{i+\frac{1}{2},j} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_{i,j} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}, & \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} > 0, \\ \mathbf{Q}_{i+1,j} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}, & \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 0, \end{cases} & \tilde{\mathbf{q}}_{i-\frac{1}{2},j} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1,j} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}, & \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j} > 0, \\ \mathbf{Q}_{i,j} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}, & \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j} < 0, \end{cases} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{i,j+\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_{i,j} \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}, & \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} > 0, \\ \mathbf{Q}_{i,j+1} \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}, & \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} < 0, \end{cases} & \tilde{\mathbf{q}}_{i,j-\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \mathbf{Q}_{i,j-1} \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}, & \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}} > 0, \\ \mathbf{Q}_{i,j} \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}, & \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}} < 0, \end{cases} \\ \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j} - \Delta t \left(\frac{\tilde{\mathbf{q}}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{\mathbf{q}}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{\tilde{\mathbf{q}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{q}}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\Delta x = \Delta y$ — шаг используемой квадратной равномерной сетки по x или y . Область решения также полагается квадратной: $D = [x_0, x_0 + N\Delta x] \times [y_0, y_0 + N\Delta y]$.

Для устойчивости схемы необходимо потребовать выполнения условия Куранта [14]

$$\Delta t^n \leq \kappa \min_{i,j} \left\{ \frac{\Delta x}{|u_{i,j}^n| + \sqrt{\eta_{i,j}^n + h_{i,j}}}, \frac{\Delta y}{|v_{i,j}^n| + \sqrt{\eta_{i,j}^n + h_{i,j}}} \right\}, \quad 0 < \kappa < 1. \quad (4.3)$$

В ходе расчёта нефизичные значения $\eta_{i,j}^n < -h_{i,j}$ заменяются на $\eta_{i,j}^n = -h_{i,j}$ во избежание появления неестественных потоков. Линия уреза определяется с помощью “метода улавливания” точки уреза в узел разностной сетки [14], т.е. из соотношения $\{\eta_{i,j}^n + h_{i,j} > 0\} \cap \{\eta_{i\pm 1,j\pm 1}^n + h_{i\pm 1,j\pm 1} = 0\}$. Схема (4.1), (4.2) имеет первый порядок аппроксимации. Тем не менее она довольно часто используется для расчётов реальных течений по причине того, что многочисленные изломы и неровности дна реальной акватории могут оказывать тем более пагубное влияние на эффективность алгоритмов, чем выше их порядок точности. По той же причине расчётную сетку неминуемо приходится измельчать и детализировать, что частично оправдывает низкий порядок аппроксимации.

Ещё одним недостатком в работе схемы является невозможность точного определения вектора скорости вблизи линии уреза. Со временем накопленная вычислительная ошибка может серьёзно повлиять на определение профиля свободной поверхности в целом.

При этом схема (4.1), (4.2) обладает также рядом положительных свойств, таких как консервативность, отсутствие нефизических осцилляций численного решения, выполнение теста “озеро в покое”, нетребовательность к вычислительным ресурсам и т. п. [14].

4.2. Результаты тестовых расчетов

Основной сложностью в работе алгоритма метода крупных частиц, как и у многих других алгоритмов схожего предназначения, является проблема точного приближения значений поля скоростей вблизи линии уреза. Алгоритм хорошо справляется с поставленными задачами только в тех случаях, когда количество движения в прибрежной области мало.

Простейшие тесты начинают выявлять этот недостаток только при большой амплитуде колебаний или при больших значениях параметра Кориолиса f , которые в силу формул (1.1) могут иметь место в реальных физических условиях или при чрезвычайно малых глубинах h_0 , или при рассмотрении акваторий с очень большим горизонтальным размером a_0 . На рис. 4.1 изображена динамика относительной погрешности

$$Er^2(H_h^n) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (H_{i,j}^n - H(x_i, y_j, t))^2}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n H^2(x_i, y_j, t)} \quad (4.4)$$

для: а) стационарного течения в поле с нулевой дивергенцией в параболоиде вращения (см. п. 2.3, случай 2) при $\delta = 1$, $u_x(0) = 1$, $u_y(0) = 1.732$, $\eta_0(0) = -0.159$; б) “потенциального” течения в параболоиде вращения (см. п. 2.3, случай 1) при $\delta = 1$, $u_x(0) = 1$, $u_y(0) = 0$, $\eta_0(0) = -0.057$; в) – ф) плоской свободной поверхности в параболоиде вращения (см. п. 2.2), полагая $X(0) = 1.9$, $Y(0) = 1.5$, $u_0(0) = 0$, $v_0(0) = 0$; тогда в) $f = 1$, $\tau = 0$ – квадратные маркеры; д) $f = 0.5$, $\tau = 0$ – треугольные маркеры; е) $f = 0$, $\tau = 0$ – ромбовидные маркеры; ф) $f = 1$, $\tau = 1$ – круглые маркеры.

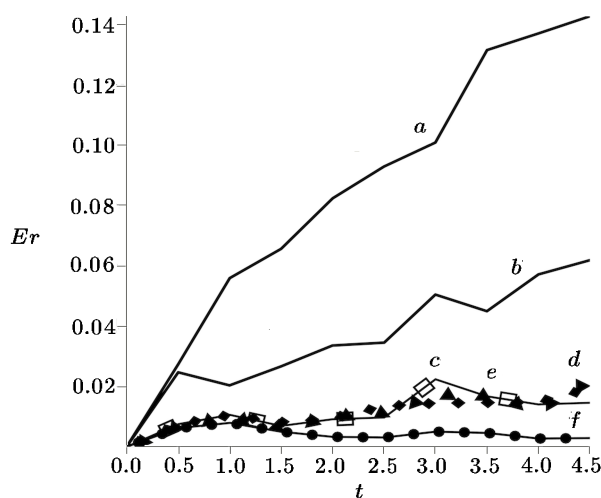


Рис. 4.1. Относительная погрешность вычисления полной глубины

Как в случае 1 (“потенциальное” течение), так и в случае 2 (стационарное течение) со свободными поверхностями II порядка среднюю скорость можно варьировать в большом диапазоне.

Здесь и далее под средним значением периодической по t функции $f(x, y, t)$ подразумевается $\bar{f} = \frac{2}{\pi T} \int_0^T \iint_{\Omega(t)} f(x, y, t) dx dy dt$, где $\Omega(t) = \{\mathbf{x} = (x, y) | H(x, y, t) > 0\}$, а T — период. Для не зависящих от времени функций $f(x, y)$ это выражение принимает вид $\bar{f} = \frac{2}{\pi} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$. Выбор константы перед интегралом определяется требованием (3.2).

Таким образом, при равных значениях параметров, определяющих воздействие внешних сил, и для одинаковых акваторий оказывается возможным проводить расчёты разной степени “сложности”, в смысле величины погрешности аппроксимации точного решения. Результаты показывают, что в задачах со свободной поверхностью II порядка она может значительно варьироваться и, в частности, на порядок превышать погрешность аппроксимации простейших решений (рис. 4.1).

Большое значение модуля вектора количества движения не является единственным фактором, влияющим на точность численных результатов. В задачах о “потенциальном” и стационарном течениях важна также неоднородность полей скоростей.

Абсолютную погрешность вычисления компонент вектора скорости для “потенциального” течения жидкости со свободной поверхностью II порядка в момент времени $t = 5$ иллюстрирует рис. 4.2., на котором слева изображена погрешность компоненты скорости u , справа — погрешность компоненты скорости v . Это течение соответствует значениям параметров $\delta = 1, u_x(0) = 1, u_y(0) = 0, \eta_0(0) = -0.057$. Особенности форм погрешностей обусловлены “запаздыванием” оборотов численного решения по отношению к точному на больших временах счёта.

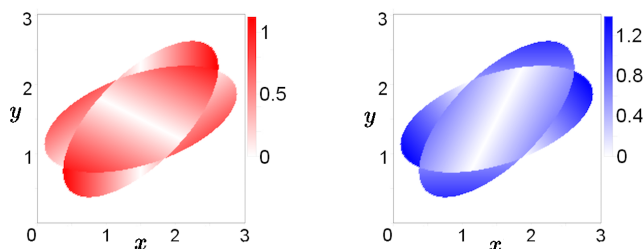


Рис. 4.2. Погрешность вычисления компонент скорости при моделировании “потенциального” течения в параболоиде вращения (см. п. 2.3, случай 1)

Аналогичные характеристики стационарного течения со значениями параметров $\delta = 1, u_x(0) = 1, u_y(0) = 1.732, \eta_0(0) = -0.159$ изображены на рис. 4.3. Здесь представлены абсолютные погрешности вычисления компонент вектора скорости в момент времени $t = 5$: u (слева) и v (справа).

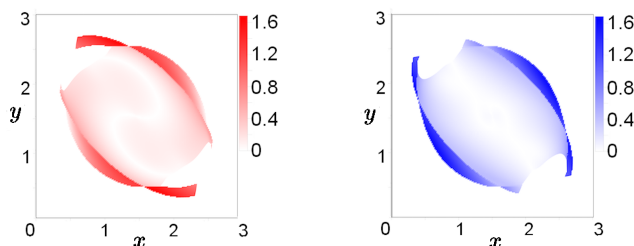


Рис. 4.3. Погрешность вычисления компонент скорости при моделировании стационарного течения в поле с нулевой дивергенцией в параболоиде вращения (см. п. 2.3, случай 2)

Заключение

Построенные новые аналитические решения, выраженные в терминах элементарных функций, существенно расширяют возможности тестирования численных алгоритмов, предназначенных для моделирования процессов взаимодействия волн с берегом в рамках теории мелкой воды. Поскольку средняя скорость течения в предложенных тестовых решениях растёт по мере уменьшения глубины жидкости, а поля скоростей имеют нетривиальную структуру, эти решения хорошо выявляют недостатки алгоритмов, скрытые при их проверке на известных ранее тестах рассматриваемого класса. Кроме того, специфика новых решений предоставляет определённую свободу варьирования параметров течения, отвечающих за его среднюю скорость. В результате в одной и той же расчётной области сравнительно небольших размеров можно провести расчёты различной сложности.

Литература

1. **Ball F.K.** An exact theory of simple finite shallow water oscillations of a rotating Earth // Proc. of the First Australian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics. — Pergamon, 1964. — P. 293–305.
2. **Bi S., Zhou J., Liu Y., and Song L.** A finite volume method for modeling shallow flows with wet-dry fronts on adaptive cartesian grids // Mathematical Problems in Engineering. — 2014. — Vol. 2014, article ID 209562. — P. 1–20.
3. **Carrier G.F., Greenspan H.P.** Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. of Fluid Mechanics. — 1958. — Vol. 4, № 4. — P. 97–109.
4. **Didenkulova I., Pelinovsky E.** Run-up of tsunami waves in U-shaped bays // Pure and Applied Geophysics. — 2011. — Vol. 168, № 6-7. — P. 1239–1249.
5. **Kesserwani G., Liang O.** Locally limited and fully conserved RKDG2 shallow water solutions with wetting and drying // J. of Scientific Computing. — 2012. — Vol. 50, № 1. — P. 120–144.
6. **Rybin A., Pelinovsky E., Didenkulova I.** Nonlinear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier–Greenspan approach // J. of Fluid Mechanics. — Cambridge University Press, 2014. — Vol. 748. — P. 416–432.
7. **Sampson J.A.** A numerical solution for moving boundary shallow water flow above parabolic bottom topography // J. of Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 50. — P. C898–C911.
8. **Sielecki A., Wurtele M.G.** The numerical integration of the nonlinear shallow-water equations with sloping boundaries // J. of Computational Physics. — 1970. — Vol. 6, № 2. — P. 219–236.
9. **Spielvogel L.Q.** Single-wave run-up on sloping beaches // J. of Fluid Mechanics. — Cambridge University Press, 1975. — Vol. 74, № 4. — P. 685–694.
10. **Synolakis C.E.** The runup of solitary waves // J. of Fluid Mechanics. — Cambridge University Press, 1987. — Vol. 185. — P. 523–545.
11. **Thacker W.C.** Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // J. of Fluid Mechanics. — Cambridge University Press, 1981. — Vol. 107. — P. 499–508.
12. **Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
13. **Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. — 1983.

14. **Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Рычков А.Д., Чубаров Л.Б.** Численное моделирование наката волн цунами на побережье с использованием метода крупных частиц // Математическое моделирование.— 2015.— Т. 27, № 1.— С. 99–112.

Поступила в редакцию 13 августа 2018 г.

После доработки 7 ноября 2018 г.

Принята к публикации 7 мая 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Ball F.K.** An exact theory of simple finite shallow water oscillations of a rotating Earth // Proc. of the First Australian Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics.— Pergamon, 1964.— P. 293–305.
2. **Bi S., Zhou J., Liu Y., and Song L.** A finite volume method for modeling shallow flows with wet-dry fronts on adaptive cartesian grids // Mathematical Problems in Engineering.— 2014.— Vol. 2014, article ID 209562.— P. 1–20.
3. **Carrier G.F., Greenspan H.P.** Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. of Fluid Mechanics.— 1958.— Vol. 4, № 4.— P. 97–109.
4. **Didenkulova I., Pelinovsky E.** Run-up of tsunami waves in U-shaped bays // Pure and Applied Geophysics.— 2011.— Vol. 168, № 6-7.— P. 1239–1249.
5. **Kesserwani G., Liang O.** Locally limited and fully conserved RKDG2 shallow water solutions with wetting and drying // J. of Scientific Computing.— 2012.— Vol. 50, № 1.— P. 120–144.
6. **Rybkin A., Pelinovsky E., Didenkulova I.** Nonlinear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier–Greenspan approach // J. of Fluid Mechanics.— Cambridge University Press, 2014.— Vol. 748.— P. 416–432.
7. **Sampson J.A.** A numerical solution for moving boundary shallow water flow above parabolic bottom topography // J. of Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics.— 2009.— Vol. 50.— P. C898–C911.
8. **Sielecki A., Wurtele M.G.** The numerical integration of the nonlinear shallow-water equations with sloping boundaries // J. of Computational Physics.— 1970.— Vol. 6, № 2.— P. 219–236.
9. **Spielvogel L.Q.** Single-wave run-up on sloping beaches // J. of Fluid Mechanics.— Cambridge University Press, 1975.— Vol. 74, № 4.— P. 685–694.
10. **Synolakis C.E.** The runup of solitary waves // J. of Fluid Mechanics.— Cambridge University Press, 1987.— Vol. 185.— P. 523–545.
11. **Thacker W.C.** Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // J. of Fluid Mechanics.— Cambridge University Press, 1981.— Vol. 107.— P. 499–508.
12. **Belotserkovskii O.M., Davydov Yu.M.** Metod krupnykh chastits v gazovoi dinamike.— M.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1982.
13. **Marchuk A.G., Chubarov L.B., Shokin Yu.I.** Chislennoe modelirovanie voln tsunami.— Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie.— 1983.
14. **Shokin Yu.I., Beizel' S.A., Rychkov A.D., Chubarov L.B.** Chislennoe modelirovanie nakata voln tsunami na poberezh'e s ispol'zovaniem metoda krupnykh chastits // Matematicheskoe modelirovanie.— 2015.— Т. 27, № 1.— С. 99–112.

