

## СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

Л. М. Золотарев, И. Д. Самсонов

(Воронеж)

Рассматривается прямой скачок уплотнения в аэрозоле, одна из фаз которого — вязкий газ, вторая — твердые частицы. Исследуется непрерывное решение с учетом силового взаимодействия фаз. Для изотермического и изоэнтропического приближения рассчитано несколько вариантов численным методом.

Для описания процесса приняты уравнения Х. А. Рахматулина [1].

Рассмотрение сильных возмущений в  $n$ -компонентной среде с использованием уравнений Х. А. Рахматулина проводилось в работе [2], где исследовалось разрывное решение.

Рассматривается непрерывное решение для среды с известным законом взаимодействия компонентов, поэтому уравнения движения соответственно преобразованы. Для аналогичной среды в работе [3] решена задача о поршне и о волне разрежения.

При этом для возмущений малой интенсивности решение получено методом характеристик при взаимодействии частиц с газом по закону Стокса.

В отличие от работы [3], в данной работе силовое взаимодействие принято в более общей форме с использованием коэффициента сопротивления  $c_x$ , что позволяет рассматривать процесс как при малых, так и при больших относительных скоростях. Рассмотрение ведется в системе координат, связанной с фронтом скачка уплотнения.

Уравнения Х. А. Рахматулина в одномерном случае имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_n u_n) &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jn} \rho_j - \rho_n \sum_{j=1}^n \lambda_{nj} \\ \frac{du_n}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{ni}} \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{j=1}^n \frac{K_{jn}}{\rho_n} (u_j - u_n) + X_n \\ p &= p(\rho_{ni}, C_n), \quad \frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \dots + \frac{\rho_n}{\rho_{ni}} = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

При использовании уравнений такого типа для изучения различных сред в каждом частном случае необходимо конкретизировать законы превращений и законы силового взаимодействия.

Полагая правомерным применение к аэрозолю методов механики сплошных сред, принимая для частиц сферическую форму и считая величину силового воздействия со стороны газа функцией квадрата относительной скорости, для движения без взаимных превращений компонентов с учетом вязкости газа можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 u_1) &= 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 u_2) = 0 \\ \frac{du_1}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{1i}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{3}{8} \frac{c_x}{r} \frac{\rho_2 \rho_{1i}}{\rho_1 \rho_{2i}} (u_1 - u_2)^2 + \frac{4}{3\rho_{1i}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \\ \frac{du_2}{dt} &= -\frac{3}{8} \frac{c_x}{r} \frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}} (u_1 - u_2)^2 \\ p &= p(\rho_{1i}, C), \quad \frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}} = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Вывод уравнений не приводится, так как он повторяет основные моменты работы [1]. Х. А. Рахматулин.

Коэффициент сопротивления  $c_x$  является функцией числа Рейнольдса, индексами 1, 2 обозначена принадлежность соответственно к газу и к твердой фазе. Взаимодействие частиц между собой считается несущественным.

Далее при помощи системы (2) исследуется скачок уплотнения постоянной интенсивности (с неизменными параметрами перед скачком), поэтому уравнения переписаны

ваются для стационарного случая в системе координат, связанной с фронтом скачка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\rho_1 u_1) &= 0, & \frac{d}{dx} (\rho_2 u_2) &= 0, & \frac{\rho_1}{\rho_{1i}} + \frac{\rho_2}{\rho_{2i}} &= 1 \\ u_1 \frac{du_1}{dx} &= -\frac{1}{\rho_{1i}} \frac{dp}{dx} + \frac{3}{8} \frac{c_x}{r} \frac{\rho_2 \rho_{1i}}{\rho_1 \rho_{2i}} (u_1 - u_2)^2 + \frac{4}{3\rho_{1i}} \frac{d}{dx} \left[ \mu \frac{du_1}{dx} \right] \\ u_2 \frac{du_2}{dx} &= -\frac{3}{8} \frac{c_x}{r} \frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}} (u_1 - u_2)^2, & p &= p(\rho_{1i}, C) \end{aligned} \quad (3)$$

Следует заметить, что в случае движения газа без примеси, даже при изменяющейся во времени амплитуде ударной волны, поведение и структуру ударного фронта можно описать для любого момента времени при помощи теории установившегося состояния.

Это возможно потому, что на протяжении некоторого времени, малого по сравнению с общим временным масштабом газодинамического процесса, но большего времени  $\Delta t$  прохождения фронтом расстояния порядка своей ширины  $\Delta x$ , вся картина распределения величин во фронте волны распространяется по газу в «застывшем» виде как целое [4,5].

Для рассматриваемой в данной работе среды со своего рода релаксацией в макроскопическом масштабе использование теории установившегося состояния при исследовании нестационарных процессов ограничено. При этом допустимая скорость изменения параметров перед фронтом может быть оценена непосредственно из решения системы (3) после определения величины релаксационной зоны.

Итак, рассматривается случай малого объемного содержания взвешенных частиц, т. е.  $\rho_1 / \rho_{1i} \sim 1$ . С учетом этого, после частичного интегрирования система уравнений (3) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_1^\circ u_1^\circ, & \rho_2 u_2 &= \rho_2^\circ u_2^\circ, & p &= p(\rho_{1i}, C) \\ \rho_1^\circ u_1^\circ u_1 + \rho_2^\circ u_2^\circ u_2 + p - \frac{4}{3} \mu \frac{du_1}{dx} &= \rho_1^\circ u_1^{\circ 2} + \rho_2^\circ u_2^{\circ 2} + p^\circ \\ u_2 \frac{du_2}{dx} &= -\frac{3}{8} \frac{c_x}{r} \frac{\rho_{1i}}{\rho_{2i}} (u_1 - u_2)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Для дальнейших преобразований системы (4) целесообразно ввести безразмерные комплексы

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{u_1}{u_1^\circ}, & U_2 &= \frac{u_2}{u_2^\circ}, & X &= \frac{x}{r}, & R^\circ &= \frac{2u_1^\circ r}{v^\circ} \\ E_1^\circ &= \frac{p^\circ}{\rho_1^\circ u_1^{\circ 2}}, & E_2^\circ &= \frac{p^\circ}{\rho_2^\circ u_2^{\circ 2}}, & E_3^\circ &= \frac{p^\circ}{\rho_2^\circ u_2^{\circ 2}} \end{aligned}$$

В данной работе основное внимание уделяется вопросу силового взаимодействия фаз, поэтому для оценки порядка величин и рассмотрения качественной стороны в энергетике процесса достаточно ограничиться некоторыми приближениями.

В качестве таких приближений взяты изотермическое ( $\mu = \text{const}$ ,  $p = p^\circ \rho_1 / \rho_1^\circ$ ) и изоэнтропическое (адиабата Пуассона для газообразной фазы при теплоизолированных частицах).

В изотермическом случае с учетом принятых обозначений система (4) после простых преобразований записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dX} &= \frac{3}{8} R^\circ \left( U_1 + \frac{E_1^\circ}{E_2^\circ} U_2 + \frac{E_1^\circ}{U_1} - 1 - \frac{E_1^\circ}{E_2^\circ} - E_1^\circ \right) \\ \frac{dU_2}{dX} &= \frac{3}{8} \frac{E_3^\circ}{E_1^\circ} c_x \left( 2 - \frac{U_1}{U_2} - \frac{U_2}{U_1} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Изоэнтропический случай с формальной стороны отличается от изотермического тем, что в первом уравнении системы (5) третье слагаемое в скобках приобретает вид  $E_1^\circ / U_1^k$ , и  $R^\circ = \text{var}$ .

Для простоты предполагается, что в начальный момент скорости фаз совпадают. Тогда для описания скачка уплотнения к системе (5) следует присоединить граничные условия, выражающие отсутствие градиентов перед и за фронтом скачка и стремление газодинамических величин к начальным (при  $X \rightarrow -\infty$ ) и конечным (при  $X \rightarrow +\infty$ )

значениям. Итак, полагая в системе (5) производные скоростей равными нулю ( $dU_1/dX = dU_2/dX = 0$ ), легко найти граничные значения скоростей

$$\begin{aligned} X = -\infty, \quad U_1 = U_2 = 1 \\ X = +\infty, \quad U_1 = U_2 = \frac{E_1^\circ E_2^\circ}{E_1^\circ + E_2^\circ} \end{aligned} \quad (6)$$

Полученные значения соответствуют обычным соотношениям на разрыве. Если количество примеси очень мало ( $E_2^\circ \rightarrow \infty$ ), то после раскрытия неопределенности в (6) получается  $U = E_1^\circ$ , что соответствует случаю чистого газа. Из (6) видно, что интенсивность скачка возрастает при прочих равных условиях с возрастанием массы примеси, а именно

$$U = \frac{E_1^\circ}{1 + \rho_1^\circ / \rho_2^\circ} \quad (7)$$

Система уравнений (5) решена численным методом для случая водо-воздушной среды (туман) в предположении, что не происходит дробления капель и фазовых превращений, т. е. частицы воды эквивалентны твердым телам. Параметры потока перед скачком имели следующие значения:

$$\begin{aligned} p^\circ = 9.81 \cdot 10^4 \text{ н / м}^2, \quad T = 303^\circ \text{ К}, \quad v^\circ = 16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{сек}, \quad M = 1.1 \\ \rho_1^\circ = \rho_2^\circ, \quad E_1^\circ = E_2^\circ \approx 0.598, \quad E_3^\circ \approx 0.662 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Как видно, массовые соотношения газа и примеси взяты одинаковыми. Оценка отношений фиктивной и истинной плотности газа дает следующее:

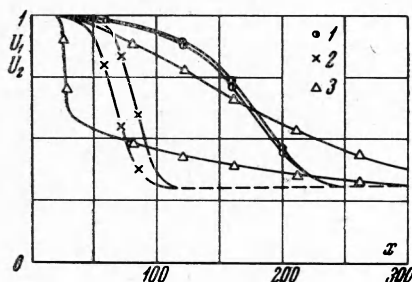
$$\frac{\rho_1}{\rho_{1i}} = \frac{1}{1 + \rho_{1i} / \rho_{2i}} \approx 0.999$$

т. е. с точностью до 0.001 данные плотности взаимозаменяемы.

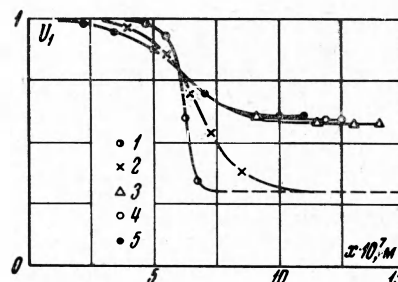
При решении системы (5) частицы взяты следующих размеров:

$$r = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9} \text{ ([}r\text{] — }M\text{)}$$

Для общности включен случай скачка в чистом газе при тех же исходных данных.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для коэффициента сопротивления  $c_x$  принята зависимость, приведенная в монографии [6]

$$c_x = f(R) \quad (8)$$

Число Рейнольдса вычисляется по относительной скорости

$$R = \frac{2r |u_1 - u_2|}{v} \quad (9)$$

Если при малых значениях числа Рейнольдса заменить  $c_x$  его приближенным выражением

$$c_x = 24 / R \quad (10)$$

то система уравнений (5) будет описывать случай стоксовского взаимодействия среды с частицами

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dX} &= \frac{3}{8} R^\circ \left( U_1 + \frac{E_1^\circ}{E_2^\circ} U_2 + \frac{E_1^\circ}{U_1} - 1 - \frac{E_1^\circ}{E_2^\circ} - E_1^\circ \right) \\ \frac{dU_2}{dX} &= \frac{9}{R} \frac{E_3^\circ}{E_1^\circ} \left( 1 - \frac{U_1}{U_2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Следует заметить, что полученное решение имеет в основном качественный характер, так как применимость обычных законов к процессу обтекания очень малых частиц не является строго обоснованной.

Для случая скачка уплотнения в чистом воздухе легко получается аналитическое решение, которое можно использовать для сравнения с результатами численного расчета

$$X = \frac{8}{3R^\circ(1 - E_1^\circ)} \ln \frac{1 - U}{(U - E_1^\circ)^{E_1^\circ}} \quad (12)$$

Расчетные данные для двухфазной среды представлены графически на фиг. 1, 2.

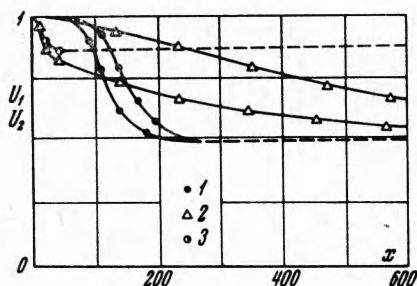
Фигура 1 дает представление о качественной стороне процесса, на фиг. 2 показано изменение интенсивности процесса в газообразной фазе в зависимости от размеров частиц (точками 1, 2, 3, 4 обозначены соответственно результаты расчетов для частиц  $r = 10^{-9}$  м,  $10^{-8}$  м,  $10^{-7}$  м,  $10^{-6}$  м; 5 (·) соответствует случаю скачка уплотнения в газе без примеси).

Как видно, при сравнительно крупных частицах процесс распадается на два разнопорядковых по величине участка.

При этом в пределах первого участка скорость частиц остается практически неизменной, в то время как в газе происходит резкое изменение скорости, по интенсивности и градиенту соответствующее случаю скачка в чистом газе.

На втором участке параметры газа и частиц достигают своих конечных значений при существенно замедленном процессе. Однако следует заметить, что в целом область возмущения для случая малых частиц остается незначительной. При уменьшении радиуса частиц характер скачка меняется таким образом, что процесс для обеих фаз становится однопорядковым по интенсивности при общем увеличении градиента скоростей. Естественно, что изотермическая модель скачка уплотнения в вязком газе является довольно грубой в термодинамическом отношении; поэтому ее следует считать первым приближением, как, например, в монографии [7].

В качестве второго приближения в данной работе рассмотрен изоэнтропический скачок. В качественном отношении данная модель скачка уплотнения лучше, так как при разложении в ряд адиабата Пуассона с точностью до члена третьего порядка малости совпадает с ударной адиабатой Гюгонно [4,5]. Однако, поскольку промежуточные состояния в случае



Фиг. 3

интенсивных скачков уплотнения не описываются уравнениями названных выше адиабат, для получения более точных результатов в этих случаях необходимо привлекать уравнение энергетического баланса.

Результаты расчета изоэнтропического скачка при прежних начальных условиях представлены на фиг. 3, где точки 1 соответствуют случаю  $r = 10^{-8}$  м, точки 2 — случаю  $r = 10^{-7}$  м, точки 3 — случаю скачка уплотнения в газе без примеси.

Зависимость вязкости от температуры была принята в следующей форме:

$$\mu = \mu^\circ \left( \frac{T}{T^\circ} \right)^{0.7} \quad (13)$$

Из рассмотрения фиг. 3 видно, что в отношении характера изменения скоростей фаз данный случай не представляет качественно нового явления, отличаясь существенно от изотермического случая в отношении порядка газодинамических величин.

Вообще, если в некотором процессе параметры газа изменяются по адиабате Пуассона с показателем  $k$ , то параметры двухфазной среды изменяются политропически с некоторым показателем  $n$ , определяемым в  $p, v$ -переменных следующим образом:

$$n = - \frac{v}{p} \frac{\partial p}{\partial v} \quad (14)$$

Для рассматриваемой среды при отсутствии фазового перехода и теплообмена между фазами показатель политропы легко может быть получен в следующей форме:

$$n = k \left[ 1 + \frac{1 - \kappa}{\kappa} \frac{v_{2i}}{v_{1i}} \left( \frac{p}{p^\circ} \right)^{1/k} \right] \quad (15)$$

С учетом теплообмена выражение для показателя политропы видоизменяется

$$n = \frac{1}{1 - \kappa R/c} \left[ 1 + \frac{1 - \kappa}{\kappa} \frac{v_{2i}}{v_{1i}} \left( \frac{p}{p^0} \right)^{1 - \kappa R/c} \right] \quad (16)$$

Итак, если рассматриваемую среду принять за некоторый гипотетический газ с осредненными параметрами и выписать обычные соотношения на скачке, то для ударной адиабаты в этом случае легко получить следующее выражение;

$$\frac{p}{p^0} = \frac{[1 + k(2k/n - 1)] \rho / \rho^0 - (k - 1)}{[1 + k(2k/n^0 - 1)] - (k - 1) \rho / \rho^0} \quad (17)$$

В случае отсутствия теплообмена между фазами показатель  $n$  мало отличается от  $k$  (в нашем примере  $n^0/k = 1.0011$ ), т. е. с точки зрения состояний на  $\pm \infty$  двухфазная среда ведет себя как «тяжелый» газ с показателем адиабаты, примерно равным  $k$ .

В этом смысле примесь, как и в изотермическом случае, увеличивает интенсивность скачка уплотнения. Если учитывать теплообмен между фазами, то показатель  $n$  может существенно отличаться от  $k$ . При этом процесс осложняется тепловой релаксацией, которая интенсифицирует скачок. Изотермический скачок в этом смысле можно рассматривать как некоторый предельный случай, когда газ идеально теплопроводен, а частицы являются термостатом.

Возвращаясь к вопросу о возможности описания неустановившихся процессов в двухфазной среде при помощи стационарных уравнений, можно отметить следующее.

Из рассмотрения фиг. 1, 3 видно, что в случае достаточно малых частиц масштаб процесса в газе может быть масштабом для среды в целом, так что стационарная теория применима без ограничения.

В случае более крупных частиц эти масштабы не совпадают. Порядок величины релаксационной зоны в простейшем случае можно оценить, решив уравнение движения отдельной частицы, внесенной в поток газа, движущийся со скоростью  $u$  (при стоксовском взаимодействии)

$$\frac{R^0}{9} \frac{\rho_{2i}}{\rho_{1i}} \frac{dU_2}{dX} = \frac{1 - U_2}{U_2} \quad (18)$$

Уравнение (18) интегрируется при  $U = \text{const}$  и при следующем граничном условии:  $X = 0, U_2 = 0$ . В результате получим

$$X = - \frac{U_2 + \ln(1 - U_2)}{(9/R^0)(\rho_{1i}/\rho_{2i})} \quad (19)$$

Полагая  $U_2 \approx 0.667$  (порядка  $1 - e^{-1}$ , согласно теории релаксации), легко получить значение  $\Delta X$ , которое можно назвать участком релаксации

$$\Delta X \approx 0.0481 R^0 \rho_{2i} / \rho_{1i} \quad (20)$$

Таким образом, методом стационарных процессов в двухфазной среде можно исследовать лишь такие неустановившиеся процессы, в которых изменение макроскопических параметров происходит на участках, существенно больших  $\Delta X$ . При этом при вычислении  $R^0$  за характерную скорость следует брать величину скачка скорости в ударной волне.

Следует заметить, что в данной работе рассмотрен тот частный случай скачка, когда состояние перед скачком термически равновесное и скорости фаз совпадают. В общем случае качественная картина может оказаться существенно сложнее.

Поступила 23 VII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Клейман Я. З. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
3. Rudinger G., Chang A. Analysis of nonsteady two-phase flow. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 11, pt. 1, pp. 1747—1754.
4. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 5. М., «Наука», 1965.
7. Паттерсон Г. Н. Молекулярное течение газов. М., Физматгиз, 1960.