

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ
В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

A. E. Якубенко

(*Москва*)

Методом Винера—Хопфа решаются две задачи о течении проводящей жидкости в плоском канале. В первой задаче рассматривается движение полубесконечной пластины в электропроводящей жидкости, заключенной между двумя параллельными плоскостями в поперечном магнитном поле. Во второй задаче рассматривается течение жидкости между параллельными стенками, которые наполовину диэлектрики, наполовину идеальные проводники.

§ 1. Движение полубесконечной пластины. Рассмотрим движение пластины $y_1 = 0$, $x_1 \geq 0$, $-\infty < z_1 < \infty$ с постоянной скоростью U_0 вдоль оси z_1 в проводящей, несжимаемой, вязкой жидкости, заключенной между плоскостями $y_1 = \pm h$ в однородном магнитном поле H_0 , направленном вдоль оси y_1 . Отметим, что аналогичная задача о движении полубесконечной пластины в жидкости, занимающей все пространство, решена Хазимото [1].

Предположим, что единственной составляющей скорости жидкости будет $v_z = v_z(x_1, y_1)$. В силу этого предположения индуцированное магнитное поле будет иметь также только одну составляющую $H_z = H_z(x_1, y_1)$. Для определения v_z и H_z имеем уравнения [2]

$$\Delta v + 2M \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \Delta H + 2M \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

$$v = 0, \quad H = 0 \quad \text{при } y = \pm 1$$

$$v = 1, \quad H = 0 \quad \text{или} \quad \partial H / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x \geq 0$$

Здесь

$$v = \frac{v_z}{U_0}, \quad H = \frac{2M}{R_m} \frac{H_z}{H_0}, \quad x = \frac{x_1}{h}, \quad y = \frac{y_1}{h}, \quad M = \frac{H_0 h}{2c} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \quad R_m = \frac{4\pi\sigma U_0 h}{c^2}$$

Границные условия для H при $y = \pm 1$ получены в предположении, что стенки — диэлектрики. Границное условие $H = 0$ при $y = 0$, $x \geq 0$ соответствует движению пластины из диэлектрика, а условие $\partial H / \partial y = 0$ при $y = 0$, $x \geq 0$ соответствует движению идеально проводящей пластины. Решение системы (1.1) ищем в виде [2]

$$v = u_1 \operatorname{ch} My - u_2 \operatorname{sh} My, \quad H = -u_1 \operatorname{sh} My + u_2 \operatorname{ch} My \quad (1.2)$$

Для определения функций u_1 и u_2 получим

$$\begin{aligned} \Delta u_{1,2} - M^2 u_{1,2} &= 0 \\ u_1 &= 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \quad u_1 = 1 \quad \text{при } y = 0 \quad (x \geq 0) \\ u_2 &= 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \quad \partial u_2 / \partial y = M \quad \text{при } y = 0 \quad (x \geq 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Формулы (1.2) дают решение задачи как в случае движения проводящей пластины, так и в случае непроводящей. В случае непроводящей пластины надо положить $u_2 = 0$, а u_1 найти, решив (1.3).

Начнем с определения функции u_1 . Применим двустороннее преобразование Лапласа по x :

$$\Phi(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} u_1(x, y) dx, \quad \Phi_+(p, y) = \int_0^{\infty} e^{-px} u_1(x, y) dx,$$

$$\Phi_-(p, y) = \int_{-\infty}^0 e^{-px} u_1(x, y) dx \quad (p = \xi + i\eta)$$

Для $\Phi(p, y)$ из уравнения (1.3) получим

$$d^2\Phi / dy^2 - \gamma^2 \Phi = 0 \quad (\gamma = \sqrt{M^2 - P^2}) \quad (1.4)$$

Решение для $\Phi(p, y)$ берем в виде

$$\Phi(p, y) = \begin{cases} A(p) \operatorname{sh} \gamma(1-y) & (y \geq 0) \\ B(p) \operatorname{sh} \gamma(1+y) & (y \leq 0) \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что это решение удовлетворяет граничным условиям при $y = \pm 1$. В силу непрерывности u_1 при $y = 0$ получим, что $A(p) = B(p)$. Таким образом, имеем

$$\Phi(p, y) = A(p) \operatorname{sh} \gamma(1 - |y|) \quad (1.5)$$

Для определения $A(p)$ при $y = 0$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_+(p, +0) + \Phi_-(p, +0) &= A(p) \operatorname{sh} \gamma \\ \Phi'_+(p, +0) + \Phi'_-(p, +0) &= -\gamma A(p) \operatorname{ch} \gamma \\ \Phi_+(p, -0) + \Phi_-(p, -0) &= A(p) \operatorname{sh} \gamma \\ \Phi'_+(p, -0) + \Phi'_-(p, -0) &= \gamma A(p) \operatorname{ch} \gamma \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из граничных условий для u_1 при $y = 0$, $x \geq 0$ и непрерывности $\partial u_1 / \partial y$ при $y = 0$, $x \leq 0$ найдем

$$\Phi_+(p, +0) = \Phi_+(p, -0) = 1/p, \quad \Phi'_-(p, +0) = \Phi'_-(p, -0)$$

Введем функции $D_-(p)$ и $S_+'(p)$ соотношениями

$$\begin{aligned} D_-(p) &= \Phi_-(p, +0) + \Phi_-(p, -0) \\ S_+'(p) &= \Phi'_+(p, +0) - \Phi'_-(p, -0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для $D_-(p)$ и $S_+'(p)$ из (1.6), (1.7) получим функциональное уравнение

$$S_+'(p) + (2\gamma \operatorname{cth} \gamma) p^{-1} = -\gamma \operatorname{cth} \gamma D_-(p) \quad (1.8)$$

Функциональное уравнение (1.8) решаем методом Винера — Хопфа [3]. В предположении непрерывности $u_1(x, 0)$ при $x = 0$ ($\lim u_1(x, 0) = 1$ при $x \rightarrow 0$) из уравнения (1.8) получим

$$S_+'(p) = -[K_-(0) K_+(p)] p^{-1} \quad (0 < \operatorname{Re} p < M) \quad (1.9)$$

Здесь

$$K_-(p) K_+(p) = \gamma \operatorname{cth} \gamma, \quad K_{\pm}(p) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + M^2 b_n^2} \pm b_n p}{\sqrt{1 + M^2 a_n^2} \pm a_n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \quad b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$$

так как $K_-(p) = K_+(-p)$, то $K_-(0) = \sqrt{M} \operatorname{cth} M$.

Из системы (1.6) находим $A(p)$ и, подставляя в (1.5), получим

$$\Phi(p, y) = \frac{\sqrt{M} \operatorname{cth} M K_+(p) \operatorname{sh} \gamma(1 - |y|)}{p \gamma \operatorname{ch} \gamma} = \frac{\sqrt{M} \operatorname{cth} M \operatorname{sh} \gamma(1 - |y|)}{p K_-(p) \operatorname{sh} \gamma} \quad (0 < \operatorname{Re} p < M)$$

При помощи формулы обращения преобразования Лапласа найдем

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{px} \Phi(p, y) dp \quad (0 < a < M) \quad (1.10)$$

По теореме Коши о вычетах, получим:

$$\text{при } x \geq 0 \quad (\alpha_n = \sqrt{M^2 + n^2\pi^2})$$

$$u_1(x, y) = \frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{sh} M} + \pi \sqrt{M \operatorname{cth} M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\pi |y| e^{-\alpha_n x}}{\alpha_n^2 K_+(a_n^2)} \quad (1.11)$$

$$\text{при } x \leq 0 \quad (\beta_n = \sqrt{M^2 + [(2n-1)\pi/2]^2})$$

$$u_1(x, y) = \sqrt{M \operatorname{cth} M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_+(\beta_n) \cos(2n-1)\pi y / 2 e^{\beta_n x}}{\beta_n^2} \quad (1.12)$$

В случае движения непроводящей пластинки решение на этом оканчивается. Функции v и H определяются формулами (1.2), (1.11), (1.12) и $u_2 = 0$. В случае движения идеально проводящей пластинки необходимо еще определить функцию u_2 . Повторяя аналогичные рассуждения, для определения u_2 получаем функциональное уравнение

$$D_-'(p) + 2M/p = -\gamma \operatorname{cth} \gamma S_+(p) \quad (1.13)$$

Здесь

$$S_+(p) = \psi_+(p, +0) - \psi_+(p, -0), \quad D_-'(p) = \psi_-'(p, +0) + \psi_-'(p, -0)$$

$$\psi_+(p, y) = \int_0^\infty e^{-px} u_2(x, y) dx, \quad \psi_-(p, y) = \int_{-\infty}^0 e^{-px} u_2(x, y) dx$$

Применяя метод Винера — Хопфа к уравнению (1.13), найдем

$$S_+(p) = -\frac{2M}{p K_-(0) K_+(p)}, \quad \psi(p, y) = -\frac{\sqrt{M} \operatorname{sign} y \operatorname{sh} \gamma (1 - |y|)}{\sqrt{\operatorname{cth} M} p \operatorname{sh} \gamma K_+(p)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{M} \operatorname{sign} y K_-(p) \operatorname{sh} \gamma (1 - |y|)}{\sqrt{\operatorname{cth} M} p \gamma \operatorname{ch} \gamma}$$

При помощи формулы обращения преобразования Лапласа находим

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{px} \psi(p, y) dy \quad (0 < a < M) \quad (1.14)$$

По теореме о вычетах получим

$$u_2(x, y) = -\frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{ch} M} \operatorname{sign} y + \frac{\sqrt{M} \operatorname{sign} y}{\sqrt{\operatorname{cth} M}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_+(\beta_n) \cos[(2n-1)\pi y/2] e^{-\beta_n x}}{\beta_n^2} \quad (x \geq 0)$$

$$u_2(x, y) = -\frac{\pi \sqrt{M}}{\sqrt{\operatorname{cth} M}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\pi y e^{\alpha_n x}}{\alpha_n^2 K_+(\alpha_n)} \quad (x \leq 0) \quad (1.15)$$

Решения для v и H находятся при помощи (1.2). Как видно из (1.11), (1.12), (1.14), (1.15) и (1.2), функции v и H при $x \rightarrow -\infty$ экспоненциально убывают, т. е. в движение вовлекается тонкий слой жидкости, прилегающий к пластине слева. Этот слой тем тоньше, чем больше M .

При $x \rightarrow \infty$ получаем

$$v = \frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{ch} M} \operatorname{ch} My + \operatorname{sign} y \frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{ch} M} \operatorname{sh} My$$

$$H = -\frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{sh} M} \operatorname{sh} My - \operatorname{sign} y \frac{\operatorname{sh} M(1 - |y|)}{\operatorname{ch} M} \operatorname{ch} My$$

решение, соответствующее движению безграничной идеально проводящей пластинки. Расстояния, на которых v и H переходят в указанные решения, уменьшается с ростом M .

§ 2. Движение проводящей жидкости между параллельными плоскостями. Рассмотрим движение электропроводящей жидкости между плоскостями $y_1 = \pm 1$ в направлении оси z_1 под действием постоянного перепада давления и однородного магнитного поля, направленного вдоль оси y_1 . Предполагается, что плоскости $y_1 = \pm 1$ наполовину диэлектрики (при $x \geq 0 - \infty < z < \infty$) наполовину идеальные проводники (при $x \leq 0 - \infty < z < \infty$). Для определения скорости v_z и индуцированного магнитного поля H_z имеем уравнения магнитной гидродинамики [4]

$$\Delta v + 2M \frac{\partial H}{\partial y} = -1, \quad \Delta H + 2M \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \quad (2.1)$$

$$v = 0, H = 0 \text{ при } y = \pm 1, x \geq 0, \quad v = 0, \partial H / \partial y = 0 \text{ при } y = \pm 1, x \leq 0$$

Здесь

$$v = \frac{\mu v_z}{kh}, \quad H = \frac{cH_z}{4\pi kh V_{\text{см}}}, \quad k = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad x = \frac{x_1}{h}, \quad y = \frac{y_1}{h}$$

Решение (2.1) ищем в виде

$$v = u_1 \operatorname{ch} My - u_2 \operatorname{sh} My + \frac{\operatorname{ch} 2M - \operatorname{ch} 2My}{4M^2 \operatorname{ch} 2M}$$

$$H = -u_1 \operatorname{sh} My + u_2 \operatorname{ch} My + \frac{\operatorname{sh} 2My - 2My \operatorname{ch} 2M}{4M^2 \operatorname{ch} 2M} \quad (2.2)$$

Для определения u_1 и u_2 получаем

$$\Delta u_{1,2} - M^2 u_{1,2} = 0$$

$$u_1 \operatorname{ch} M - u_2 \operatorname{sh} M = 0, \quad -\operatorname{sh} M \partial u_1 / \partial y + \operatorname{ch} M \partial u_2 / \partial y = 0$$

при $y = 1, x \leq 0$

$$u_1 \operatorname{ch} M + u_2 \operatorname{sh} M = 0, \quad \operatorname{sh} M \partial u_1 / \partial y + \operatorname{ch} M \partial u_2 / \partial y = 0$$

при $y = -1, x \leq 0$

$$u_1 = H_1 \operatorname{sh} M, \quad u_2 = \pm H_1 \operatorname{ch} M \quad \text{при } y = \pm 1, x \geq 0$$

$$(4M^2 H_1 = 2M - \operatorname{th} 2M)$$

Совершим преобразование Лапласа по переменной x (см. § 1). Для функций $\Phi(p, y)$ и $\psi(p, y)$ решения ищем в виде

$$\Phi(p, y) = A(p) \operatorname{ch} \gamma y, \quad \psi(p, y) = B(p) \operatorname{sh} \gamma y \quad (2.3)$$

Для $A(p)$ и $B(p)$ из граничных условий получим

$$(H_1 \operatorname{sh} M) / p + \Phi_-(p, 1) = A(p) \operatorname{ch} \gamma, \quad \Phi'_+(p, 1) + \Phi'_-(p, 1) = \gamma A(p) \operatorname{sh} \gamma$$

$$(H_1 \operatorname{ch} M) / p + \psi_-(p, 1) = B(p) \operatorname{sh} \gamma, \quad \psi'_+(p, 1) + \psi'_-(p, 1) = \gamma B(p) \operatorname{ch} \gamma$$

$$\operatorname{ch} M \Phi_-(p, 1) - \operatorname{sh} M \psi_-(p, 1) = 0, \quad -\operatorname{sh} M \Phi'_-(p, 1) + \operatorname{ch} M \psi'_-(p, 1) = 0$$

Границные условия при $y = -1$ в силу (2.3) выполняются автоматически. Введем функцию $S_+'(p)$ соотношением

$$S_+'(p) = \psi'_+(p, 1) - \operatorname{th} M \Phi'_+(p, 1)$$

Для определения функций $S_+'(p)$ и $\Phi_-(p, 1)$ из системы (2.4) получаем функциональное уравнение

$$S_+'(p) - \frac{2\gamma H_1 \operatorname{ch}(\gamma + M) \operatorname{ch}(\gamma - M)}{p \operatorname{sh} 2\gamma \operatorname{ch} M} = \frac{4\gamma \operatorname{ch}(\gamma + M) \operatorname{ch}(\gamma - M)}{\operatorname{sh} 2\gamma \operatorname{sh} 2M} \Phi_-(p, 1) \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) решаем методом Винера — Хонфа. В предположении непрерывности

$$u_1(x, 1) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (\lim u_1(x, 1) = H_1 \operatorname{sh} M \text{ при } x \rightarrow 0)$$

из (2.5) получим

$$\Phi_-(p, 1) = \frac{H_1 \operatorname{sh} M}{p} \left[\frac{K_-(0)}{K_-(p)} - 1 \right] \quad (2.6)$$

По известной функции $\Phi_-(p, 1)$ из системы (2.4) для $\psi_-(p, 1)$ имеем

$$\psi_-(p, 1) = \frac{H_1 \operatorname{ch} M}{p} \left[\frac{K_-(0)}{K_-(p)} - 1 \right] \quad (2.7)$$

Здесь

$$K_+(p) K_-(p) = \frac{2\gamma \operatorname{ch}(\gamma + M) \operatorname{ch}(\gamma - M)}{\operatorname{sh} 2\gamma}$$

$$K_{\pm}(p) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{(r_n+1)/2} \pm 2b_n p)^2 + (r_n-1)/2}{\sqrt{1+4M^2 a_n^2} \pm 2pa_n}$$

$$r_n = \sqrt{1+4M^2 b_n^2}, \quad K_+(p) = K_-(-p), \quad K_-(0) = \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}$$

Из системы (2.4) находим $A(p)$ и $B(p)$. Для функций u_1 и u_2 по формулам обращения преобразования Лапласа получим

$$u_1(x, y) = \frac{H_1 \operatorname{sh} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{px} \operatorname{ch} \gamma y}{p \operatorname{ch} \gamma K_-(p)} dp \quad (2.8)$$

$$u_2(x, y) = \frac{H_1 \operatorname{ch} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{px} \operatorname{sh} \gamma y}{p \operatorname{sh} \gamma K_-(p)} dp \quad (2.9)$$

$$(0 < a < \min[M, \sqrt{(r_1+1)/2}])$$

По теореме о вычетах найдем при $x \geq 0$

$$u_1(x, y) = H_1 \operatorname{th} M \operatorname{ch} My - \frac{\pi H_1 \operatorname{sh} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\beta_n x}}{\beta_n^2 K_+(\beta_n)} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2} \quad (2.10)$$

$$u_2(x, y) = H_1 \operatorname{cth} M \operatorname{sh} My - \pi H_1 \operatorname{ch} M \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\alpha_n x} \sin n\pi y}{\alpha_n^2 K_+(\alpha_n)} \quad (2.11)$$

При $x \leq 0$, воспользовавшись связью между $K_+(p)$ и $K_-(p)$, получим

$$u_1(x, y) = H_1 \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M} \operatorname{ch} My \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Im} \left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2} \right] \times \\ \times \exp(\xi_n x) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2} + \\ + H_1 \sqrt{2M \operatorname{cth} 2M} \operatorname{sh} My \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Re} \left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2} \right] \times \\ \times \exp(\xi_n x) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2} \quad (2.12)$$

$$u_2(x, y) = H_1 \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \operatorname{sh} My \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Im} \left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2} \right] \times \\ \times \exp(\xi_n x) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2} + H_1 \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \operatorname{ch} My \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Re} \left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2} \right] \exp(\xi_n x) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2} \quad (2.13)$$

Здесь

$$\xi_n = \frac{1}{4}(2n-1)\pi \sqrt{\frac{1}{2}(r_n+1)}, \quad \eta_n = \frac{1}{4}(2n-1)\pi \sqrt{\frac{1}{2}(r_n-1)}$$

Формулы (2.10) — (2.13) дают решение. Для v и H из (2.2) имеем: при $x \geq 0$

$$v = \frac{\operatorname{ch} 2M - \operatorname{ch} 2My}{4M^2 \operatorname{ch} 2M} + H_1 \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \times \quad (2.14)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Im} \left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2} \right] \exp(\xi_n x) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2}$$

$$H = \frac{\operatorname{sh} 2My - 2My \operatorname{ch} 2M}{4M^2 \operatorname{ch} 2M} + H_1 \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Re} \left[\frac{K_+(\xi_n + i\eta_n) \exp(i\eta_n x)}{(\xi_n + i\eta_n)^2} \right] \exp(\xi_n x) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2} \quad (2.15)$$

при $x \geq 0$

$$v = \frac{\operatorname{ch} 2M - \operatorname{ch} 2My}{2M \operatorname{sh} 2M} - \frac{\pi H_1 \operatorname{sh} M \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \operatorname{ch} My}{2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1) \exp(-\beta_n x)}{\beta_n^2 K_+(\beta_n)} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2} + \\ + \pi \operatorname{ch} M \operatorname{sh} My \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \exp(-\alpha_n x)}{\alpha_n^2 K_+(\alpha_n)} \sin n\pi y \quad (2.16)$$

$$H = \frac{\operatorname{sh} 2My - y \operatorname{sh} 2M}{2M \operatorname{sh} 2M} + \frac{\pi H_1 \operatorname{sh} M \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \operatorname{sh} My}{2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1) \exp(-\beta_n x)}{\beta_n^2 K_+(\beta_n)} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2} - \\ - \pi \operatorname{ch} M \sqrt{2M} \operatorname{cth} 2M \operatorname{ch} My \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \exp(-\alpha_n x)}{\alpha_n^2 K_+(\alpha_n)} \sin n\pi y \quad (2.17)$$

Как видно из решений (2.16) и (2.17), при $x \rightarrow \infty$ v и H стремятся к решению Гартмана, а при $x \rightarrow -\infty$ — к решению, соответствующему течению проводящей жидкости между идеально проводящими плоскостями. Длина зоны перехода от одного решения к другому будет зависеть от числа Гартмана M , причем чем больше M , тем эта длина меньше.

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 5 VII 1963

1. Hasimoto H. Steady longitudinal motion of cylinder in a conducting fluid. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, pt. 1.
2. Якубенко А. Е. Некоторые решения уравнений установившегося течения несжимаемой, вязкой и электропроводящей жидкости. ПМТФ, 1963, № 2.
3. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. ИЛ, 1962.
4. Якубенко А. Е. Течение по трубам вязкой, несжимаемой, проводящей жидкости в однородном и неоднородном магнитном поле. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.