УДК 532.517

С. Р. Богданов, Г. Ф. Лехто

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. РАСЧЕТ БЕЗВИХРЕВОГО ИСКАЖЕНИЯ ПОТОКА ЗА РЕШЕТКОЙ

Изложенный в [1] метод замыкания уравнений развитой анизотропной турбулентности, основанный на гипотезах о характере зависимости спектральных тензоров от волнового вектора (скэйлинг и факторизация), используется для расчета безвихревых искажений решеточной турбулентности. Получена замкнутая система уравнений, которая разделяется на две подсистемы. Одна из них (для относительных интенсивностей) линейна. Вторая сводится к автономному уравнению для специальной функции A, характеризующей топологическую структуру потока. Проведено сравнение расчетов с экспериментом и теорией быстрого искажения. Показано, что результат искажения и, в частности, характер асимптотик, существенно зависят от структуры турбулентности входного потока.

1. Уравнения для ориентационных моментов спектрального тензора. В [1] получена замкнутая система уравнений для секулярных полей развитой анизотропной турбулентности, к которым, как было показано, относятся интегральный масштаб r_c, тензор $f_{ij}^{(0)}$, получаемый интегрированием спектральной функции F_{ij} по всем возможным ориентациям волнового вектора k, а также функция A, задаваемая соотношением

$$U_{lm}f_{ij}^{(lm)} = Af_{ij}^{(0)}. \tag{1.1}$$

Тензор $f_{ij}^{(0)}$ и определяемый аналогично тензор ориентационных моментов второго порядка $f_{ij}^{(lm)}$ непосредственно связаны соответственно с тензором рейнольдсовых напряжений $\langle u_i u_j\rangle$ и «быстрой» частью корреляций давление — скорость деформации $\Phi_{ij,2}$:

$$\langle u_i u_j\rangle = \alpha r_c^{-3} f_{ij}^{(0)}, \quad \Phi_{ij,2} = \alpha r_c^{-3} P_{ij}, \tag{1.2}$$

где $P_{ij} \equiv \widehat{P} = U_{lm}f_{mj}^{(li)}$; $U_{lm} \equiv \widehat{U} = \partial U_l/\partial x_m$; все обозначения совпадают с принятыми в [1].

Уравнения для $f_{ij}^{(0)}$ и r_c, выведенные в [1] из уравнения Крэйа с использованием гипотез о характере зависимости спектральных функций от волнового вектора, имеют вид

$$U_k \frac{\partial f_{ij}^{(0)}}{\partial x_k} + \left(U_{il} f_{lj}^{(0)}\right)_s - 3Af_{ij}^{(0)} = 2\,(P_{ij})_s; \tag{1.3}$$

$$U_k \frac{\partial \ln r_c}{\partial x_k} = A + 2(r_c/r_d)^{-1/\nu} t_d^{-1}. \tag{1.4}$$

Величина A^{-1}, согласно (1.4), связана с характерным временным масштабом изменения r_c. Здесь $r_d \equiv (\eta^3/\langle\varepsilon\rangle)^{1/4}$, $t_d = (\eta/\langle\varepsilon\rangle)^{1/2}$ — колмогоровские масштабы; $\nu = 6/(4+3\mu)$; μ — спектральный индекс, характеризующий флуктуации диссипации энергии.

Для $\langle\varepsilon\rangle$ в [1] получено алгебраическое представление

$$\langle\varepsilon\rangle = 3t_d^{-1}(r_c/r_d)^{-1/\nu}\langle u_i^2\rangle/2, \tag{1.5}$$

а для тензора $f_{ij}^{(lm)}$, свертки которого с $\widehat{U}$ присутствуют в правых частях уравнений (1.3) и (1.4), выведено уравнение

$$U_k \frac{\partial f_{ij}^{(pq)}}{\partial x_k} + \left(U_{il} f_{lj}^{(pq)}\right)_s + \left(U_{lq} f_{ij}^{(lp)}\right)_s - 5Af_{ij}^{(pq)} = 2U_{lm}\left(f_{mj}^{(lipq)}\right)_s. \tag{1.6}$$

При расчете простейшего случая осесимметричного поджатия потока за решеткой компоненты тензора P_{ij} выражаются через A и $f_{ij}^{(0)}$. Уравнение для A выводится при этом из (1.6) сворачиванием индексов p, i; q, j с U_{pi}, U_{qj}:

$$U_k \frac{\partial (\widehat{P}\widehat{U})}{\partial x_k} + 4(\widehat{P}\widehat{U}^2) - 9A(\widehat{P}\widehat{U}) = 2U_k \widehat{P} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial x_k}. \tag{1.7}$$

После некоторых преобразований из (1.7) с использованием (1.3) имеем

$$\frac{U}{\varkappa}\frac{d\overline{A}}{dx} = (\overline{A} - 1)(2\overline{A} + 1), \tag{1.8}$$

где $\varkappa \equiv \partial U/\partial x$; ось x направлена вдоль потока; U — соответствующая компонента скорости; черта над величиной означает обезразмеривание с помощью $\varkappa$.

Система (1.3), (1.4), (1.8) легко интегрируется, при этом удается получить явный вид зависимости A, r_c, $f_{11}^{(0)}$, $f_{ii}^{(0)}$ (и как следствие — величин $\langle u_1^2\rangle$, $\langle u_i^2\rangle$, $\langle\varepsilon\rangle$) от x.

2. Безвихревое искажение общего вида. В данной работе предложенный в [1] метод применяется для расчета течений, возникающих за решеткой при безвихревом искажении общего вида, когда

$$\widehat{U} = \varkappa \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & -F-1 \end{pmatrix}, \quad -0{,}5 \leqslant F \leqslant 1. \tag{2.1}$$

Библиография соответствующих экспериментальных исследований обширна; наиболее полно изучены случаи осесимметричного поджатия ($F = -1/2$) [2—6] и плоской деформации, когда $F = 0$ [7—11].

Как и при расчете осесимметричного поджатия, ограничимся расчетом характеристик турбулентности лишь на оси канала. При этом записанные выше уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным. Кроме того, $\varkappa$ и F будем считать константами, учитывая, что значительная часть экспериментальных результатов [7—10] относится именно к этому случаю.

Течения указанного типа в известной степени являются эталонными. Так, с одной стороны, они наиболее удобны для изучения взаимодействия пульсаций со средним сдвигом: поле средней скорости определяется в данном случае лишь геометрией стенок канала, тензоры $\langle u_i u_j\rangle$ и P_{ij} диагональны, а диффузионные слагаемые в уравнениях для $\langle u_i u_j\rangle$ малы в силу условия $\sqrt{\langle u_i^2\rangle} \ll U$; с другой — получаемые здесь результаты часто используются при выборе значений констант в различных полуэмпирических моделях [12].

В то же время, несмотря на относительную простоту, указанные течения с трудом поддаются расчету [13], хотя поведение относительной интенсивности пульсаций различных компонент качественно описывает даже теория быстрого искажения [14].

Перейдем к непосредственному анализу приведенной в п. 1 системы применительно к данному случаю. Здесь неизвестными являются интенсивности всех трех компонент и, соответственно, в уравнениях (1.3) для $f_{ij}^{(0)}$ присутствуют обе независимые компоненты бесшпурового тензора P_{ij}. Для определения последних в отличие от осесимметричного поджатия одного алгебраического соотношения (1.1) уже недостаточно. Из уравнения (1.6), однако, нетрудно получить дополнительное соотношение, замыкающее систему уравнений. Действительно, сворачивая в (1.6) индексы p, q с U_{pq} и применяя (1.3), имеем

$$U_{lm}^{2} f_{ij}^{(lm)} = B f_{ij}^{(0)}, \tag{2.2}$$

где $B = A^2 + \varkappa \frac{dA}{dt}$; $t = -2\int \frac{\varkappa dx}{U(x)}$ — параметр, характеризующий степень искажения.

С использованием (1.8) и (2.1) нетрудно убедиться, что при $F = -1/2$ соотношение (2.2) совпадает с (1.1).

После некоторых вычислений, приведенных в приложении, из (1.1) и (2.2) удается найти выражения, связывающие P_{ij} с $\bar{A}$ и $f_{ij}^{(0)}$:

$$(2.3)\quad 2\bar{P}_{11} = -\frac{3}{(F-1)(F+2)}\left(\bar{B} + \bar{A} - F(F+1)\right)f_{11}^{(0)} - \frac{1}{(F-1)}\left(\bar{B} + F\bar{A} - (F+1)\right)f_{22}^{(0)} + \frac{1}{(F+2)}\left(\bar{B} - \bar{A}(F+1) + F\right)f_{33}^{(0)};$$

$$(2.4)\quad 2\bar{P}_{22} = \frac{1}{(F-1)}\left(\bar{B} + \bar{A} - F(F+1)\right)f_{11}^{(0)} + \frac{3F}{(F-1)(2F+1)}\left(\bar{B} + F\bar{A} - (F+1)\right)f_{22}^{(0)} + \frac{1}{(2F+1)}\left(\bar{B} - \bar{A}(F+1) + F\right)f_{33}^{(0)}.$$

На основе представлений (2.3), (2.4) уравнение (1.7) после довольно громоздких выкладок преобразуется к автономному уравнению для функции $\bar{A}$:

$$\frac{d^2\bar{A}}{dt^2} + 3\bar{A}\frac{d\bar{A}}{dt} + \bar{A}^3 - \bar{A}(F^2 + F + 1) + F(F+1) = 0.$$

Его общее решение имеет вид ($l = \exp(-t/2)$)

$$(2.5)\qquad \bar{A} = \frac{l^{-1/2} + FD_2 l^{-F/2} - (F+1)D_3 l^{(F+1)/2}}{l^{-1/2} + D_2 l^{-F/2} + D_3 l^{(F+1)/2}},$$

или, что эквивалентно, $\bar{A} = -2l\frac{d\ln u}{dl}$, где $u = l^{-1/2} + D_2 l^{-F/2} + D_3 l^{(F+1)/2}$; D_2, D_3 — константы.

Используя явное выражение (2.5) для $\bar{A}$, соотношения (2.3), (2.4) для $\bar{P}_{ij}$ можно записать более компактно:

$$(2.6)\qquad 2\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{u}\widehat{M}\mathbf{f}^{(0)}.$$

Здесь $\mathbf{P}$ и $\mathbf{f}^{(0)}$ — векторы-столбцы, составленные из диагональных компонент тензоров P_{ij} и $f_{ij}^{(0)}$; $\widehat{M}$ — матрица вида

$$(2.7)\quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} 3l^{-1/2} & -2(F+1)D_2 l^{-F/2} & (2F+1)D_3 l^{(F+1)/2} \\ -(F+2)l^{-1/2} & 3FD_2 l^{-F/2} & (F+2)D_3 l^{(F+1)/2} \\ (F-1)l^{-1/2} & (1-F)D_2 l^{-F/2} & -3(F+1)D_3 l^{(F+1)/2} \end{pmatrix}.$$

Наконец, с учетом (2.5)—(2.7) тензорное уравнение (1.3) легко сводится к системе трех линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$(2.8)\quad 4ul\frac{df_{11}^{(0)}}{dt} = \left(7l^{-1/2} + (3F-2)D_2 l^{-F/2} - (3F+5)D_3 l^{(F+1)/2}\right)f_{11}^{(0)} - 2(2F+1)D_2 l^{-F/2} f_{22}^{(0)} + 2(2F+1)D_3 l^{(F+1)/2} f_{33}^{(0)};$$

$$4ul\frac{df_{22}^{(0)}}{dt} = -2(F+2)l^{-1/2}f_{11}^{(0)} + \left((3-2F)l^{-1/2} + 7FD_2 l^{-F/2} - (5F+3)D_3 l^{(F+1)/2}\right)f_{22}^{(0)} + 2(F+2)D_3 l^{(F+1)/2} f_{33}^{(0)},$$

$$4ul\frac{df_{33}^{(0)}}{dt} = 2(F-1)l^{-1/2}f_{11}^{(0)} - 2(F-1)D_2 l^{-F/2} f_{22}^{(0)} + \left((2F+5)l^{-1/2} + (5F+2)D_2 l^{-F/2} - 7(F+1)D_3 l^{(F+1)/2}\right)f_{33}^{(0)}.$$

В частном случае ($F = -0{,}5$) формула (2.5) и первое из уравнений (2.8) сводятся к соотношениям из [1]:

$$\overline{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1+\beta l^3} - 1\right), \quad U\frac{df_{11}^{(0)}}{dx} = \overline{A} f_{11}^{(0)} \quad (\beta = D_2 + D_3).$$

3. Проблема начальных условий. Полученные в п. 2 уравнения фактически не содержат эмпирических констант, а начальные значения функций $f_{ij}^{(0)}$ легко определяются из условий эксперимента по первой из формул (1.2). В то же время при нахождении начальных значений функции A и ее производной (или, что эквивалентно, параметров D_2 и D_3) возникают трудности.

Во-первых, для определения этих значений необходима постановка довольно тонкого спектрального эксперимента. Получим в этой связи явное представление для констант D_2 и D_3, конкретизирующее их спектральный смысл. С учетом формулы (2.5) приведенные в приложении соотношения (П.1), (П.2) для компонент тензора $f_{ij}^{(0)}$ можно записать как

$$f_{ij}^{(11)} = \frac{l^{-1/2}}{u} f_{ij}^{(0)}, \quad f_{ij}^{(22)} = \frac{D_2 l^{-F/2}}{u} f_{ij}^{(0)}. \tag{3.1}$$

При $l = 1$ из (3.1) получаем

$$\frac{1}{1+D_2+D_3} = \frac{f_{ij}^{(11)}(1)}{f_{ij}^{(0)}(1)}, \quad \frac{D_2}{1+D_2+D_3} = \frac{f_{ij}^{(22)}(1)}{f_{ij}^{(0)}(1)}. \tag{3.2}$$

Согласно (3.2), константы D_2 и D_3 определяются начальными значениями компонент тензора ориентационных моментов второго порядка.

Вторая трудность обусловлена спецификой рассматриваемого класса течений, а именно: условие $\varkappa = \mathrm{const}$ предполагает скачок производной средней скорости в начале участка искажения. Как следствие производные величин $\langle u_i u_j \rangle$ и r_c, вероятнее всего, также не непрерывны при $t = 0$. Основываясь на уравнении (1.4), аналогичный вывод можно сделать по отношению к функции A. Это означает, что D_2 и D_3 однозначно найти по характеристикам набегающего потока в данном случае нельзя.

Существуют, однако, дополнительные общие соображения, позволяющие конкретизировать область возможных значений D_2 и D_3. В качестве исходного используем известное неравенство [15]

$$F_{ij}\zeta_i\zeta_j^* \geqslant 0 \tag{3.3}$$

(ζ — произвольный вектор). Его следствием является, например, соотношение $\langle u_1^2\rangle\langle u_2^2\rangle \geqslant \langle u_1 u_2\rangle^2$ [16], представляющее собой, по существу, ограничение на значения моментов нулевого порядка. Нетрудно получить аналогичное соотношение и для моментов второго порядка. В частности, выбирая в качестве ζ_i вектор $K_{il}\theta_l$ ($\widehat{K}$ — диагональная матрица), после интегрирования левой части неравенства (3.3) по всем θ получим форму $K_{il}f_{ij}^{(lm)}K_{jm}$. Из условий ее положительной определенности имеем $f_{11}^{(11)}f_{22}^{(22)} \geqslant \left(f_{12}^{(12)}\right)^2$. Для изотропных (в смысле $f_{ij}^{(0)}\big|_{l=1} \sim \delta_{ij}$) начальных условий при $l = 1$ из последнего неравенства с учетом представления (3.2) находим

$$(D_3 - D_2 - 1)^2 \leqslant 4D_2. \tag{3.4}$$

Соответствующая область возможных значений D_2 и D_3 представлена на рис. 1. Она ограничена параболой, ось симметрии которой совпадает с прямой $D_2 = D_3$ (линия *1*). Аналогичные результаты получаются в случае, когда поток на входе несимметричен: $f_{22}^{(0)} = f_{33}^{(0)}$, $f_{11}^{(0)} = af_{22}^{(0)}$ (т. е. $\langle u_1^2\rangle/\langle u_2^2\rangle = a$). Для примера на рисунке отмечены параболы, соответствующие значениям $a = 1{,}5$ и $0{,}75$ (линии *2* и *3*).

4. Условия осевой симметрии. Задача отыскания значений D_2 и D_3 имеет дополнительный аспект, заслуживающий отдельного рассмотрения.

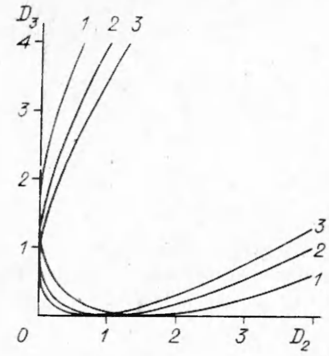

Рис. 1

Если для спектрального тензора, как и в теории быстрого искажения, использовать при $t = 0$ изотропную параметризацию $F_{ij} \sim$ $\sim (\delta_{ij} - \vartheta_i\vartheta_j)$, то моменты любого порядка могут быть непосредственно вычислены. В [1], однако, показано, что понятие изотропной турбулентности представляет собой весьма грубую модель реального турбулентного потока, буквальная реализация которой в общем случае, по-видимому, невозможна. Этот вывод может быть усилен: в рамках предлагаемого метода осесимметричные модели также не вполне адекватны, а именно: если ось x_1 соответствует направлению неискаженного потока, то при $x_1 = 0$ из условия осевой симметрии, в частности, следует

$$f_{22}^{(0)} = f_{33}^{(0)}, \quad f_{ij}^{(22)} = f_{ij}^{(33)}, \quad f_{j2}^{(i2)} = f_{j3}^{(i3)}. \tag{4.1}$$

Из последней формулы (4.1) нетрудно получить $P_{22}(0) = P_{33}(0)$, откуда с учетом (2.6) и (2.7) имеем

$$D_2 = \frac{a\,(2F + 1) - (4F + 5)\,D_3}{4F - 1}. \tag{4.2}$$

Второе из условий (4.1) с учетом представлений (3.2) дает $D_2 = D_3$. В результате из (4.2) находим $D_2 = D_3 = a/4$.

Таким образом, использование предположения об осевой симметрии входного потока на первый взгляд позволяет однозначно определить параметры D_2 и D_3. Более того, при изотропных (по отношению к $f_{ij}^{(0)}$) начальных условиях, когда $a = 1$, $D_2 = D_3 = 0{,}25$ (эта точка совпадает с вершиной параболы, ограничивающей область (3.4)), а $\beta = 0{,}5$. При этом последнее значение лишь несущественно отличается от полученного в [1] из сравнения с экспериментом по осесимметричному поджатию.

Это отличие, однако, принципиального характера: вблизи значений β, близких к 0,5, существенно изменяется, например, характер асимптотики величины $\langle u_i^2\rangle/\langle u_1^2\rangle$, т. е. при $\beta = 0{,}5$ из формулы (42) работы [1] имеем $\langle u_i^2\rangle/\langle u_1^2\rangle = 1 + 2l^{-3} \xrightarrow[l\to\infty]{} 1$, в то время как при $\beta > 0{,}5$ указанная величина монотонно убывает до 0, что и наблюдается в большинстве экспериментальных работ. Аналогичную (по отношению к параметрам D_2 и D_3) чувствительность обнаруживают решения системы (2.8) и в общем случае, когда $F \neq -0{,}5$.

В итоге можно сделать следующий вывод: характер перераспределения энергии между компонентами в результате внешнего искажения существенно зависит от выполнения условий осесимметричности (точнее, от степени их невыполнения) входного потока по отношению к компонентам тензора $f_{ij}^{(lm)}$. Этот вывод косвенно подтверждается большим разбросом экспериментальных данных по конфузорам и, в частности, аномальными результатами [4], где на участке поджатия наблюдался рост компоненты $\langle u_1^2\rangle$. Он также согласуется с выводами в [17—19] о топологической нетривиальности структуры турбулентности и существенном влиянии соответствующих параметров на эволюцию потока.

5. Некоторые результаты численных расчетов. Для определенности в данном разделе приведены результаты, относящиеся к случаю $F = 0$. Как уже отмечалось в п. 4, решения системы (2.8) обнаруживают большую чувствительность по отношению к значениям D_2 и D_3. В качестве примера на рис. 2 представлена зависимость параметра анизотропии $K =$ $= (\langle u_3^2\rangle - \langle u_1^2\rangle)/(\langle u_3^2\rangle + \langle u_1^2\rangle)$ от $\ln l$ для различных D_3 при $D_2 = 1$. Кривые *1—3* соответствуют $D_3 = 0$; 0,1; 0,5.

В области возможных значений D_2 и D_3 выделенную роль играет точка $D_3 = 0$, $D_2 = 1$: при таких параметрах величина K и относительные

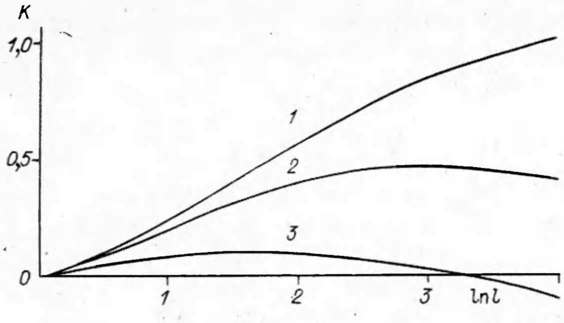

Рис. 2

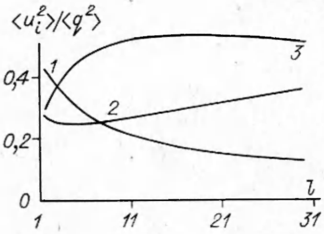

Рис. 3

интенсивности различных компонент изменяются, как и в теории быстрого искажения, монотонно. Этим, однако, и ограничивается совпадение с результатами указанной теории. Так, асимптотическое значение $\langle u_3^2\rangle/\langle q^2\rangle$ $(\langle q^2\rangle = \langle u_i^2\rangle)$ оказывается равным 1, а не 0,5.

В экспериментах, как известно [9—11], наблюдается более медленное изменение интенсивностей по сравнению с предсказаниями теории быстрого искажения. Кроме того, для асимптотического значения $\langle u_3^2\rangle/\langle q^2\rangle$ получена оценка 0,5—0,7. Подобные особенности опытных данных воспроизводятся расчетом, если для D_3 использовать значения, несколько большие 0.

В качестве примера рассмотрена третья серия опытов [9]: плоское искажение, анизотропные начальные условия, в конце искажающего участка ($l \approx 7{,}2$) достигается предположительно асимптотическое состояние, характеризуемое значениями относительных интенсивностей 0,1; 0,37; 0,53. В [7] для этих значений получена несколько иная оценка: 0,19; 0,33; 0,48, что может свидетельствовать о большой чувствительности по отношению к начальной анизотропии. Результаты расчетов, отвечающих условиям указанных опытов, представлены на рис. 3, где номер кривой соответствует индексу i в $\langle u_i^2\rangle/\langle q^2\rangle$ (по i нет суммирования), $D_2 = 1$. Видно, что величина $\langle u_3^2\rangle/\langle q^2\rangle$ при $l \geqslant 8$ действительно изменяется незначительно. Указанной области, однако, отвечает не асимптотика, а пологий максимум. Значение $\langle u_3^2\rangle/\langle q^2\rangle$ в точке максимума существенно зависит от D_3, оно совпадает с 0,53, если выбрать $D_2 = 0{,}035$. Соответствующие относительные интенсивности $\langle u_1^2\rangle/\langle q^2\rangle$ и $\langle u_2^2\rangle/\langle q^2\rangle$ равны при этом 0,15 и 0,30, что неплохо согласуется с приведенными выше экспериментальными оценками.

В целом изменение интенсивностей происходит при $D_3 \neq 0$ сложным образом: величины $\langle u_3^2\rangle/\langle q^2\rangle$ и $\langle u_2^2\rangle/\langle q^2\rangle$ проходят точки максимума и минимума, а затем асимптотически стремятся к 0 и 1. На возможность такой неожиданной эволюции и существования экстремальных точек указывают, как отмечалось в [9], даже расчеты по теории быстрого искажения, но лишь при значениях F, близких к 1. Кроме того, максимум функции $\langle u_3^2\rangle/\langle q^2\rangle$ обнаружен и на некоторых экспериментальных кривых в [7, 8], однако он проинтерпретирован как результат возмущений на выходе, и, кроме того, степень деформации потока была относительно невелика ($l = 4$ и 6). В целом вопрос о возможном реверсе асимптотики и существовании при больших степенях деформации аномального межкомпонентного переноса энергии остается открытым.

Приложение. С учетом тождества $f_{ij}^{(ll)} = f_{ij}^{(0)}$ из формул (1.1) и (2.2) легко получить алгебраические соотношения, выражающие компоненты ориентационного тензора второго ранга через $f_{ij}^{(0)}$, A и B:

$$f_{ij}^{(11)} = \frac{1}{(F+2)(1-F)}\left(\overline{B} + \overline{A} - F(F+1)\right) f_{ij}^{(0)}; \tag{П.1}$$

$$f_{ij}^{(22)} = \frac{1}{(2F+1)(F-1)}\left(\overline{B} + F\overline{A} - (F+1)\right) f_{ij}^{(0)}. \tag{П.2}$$

С другой стороны, подставляя в определение $P_{ij} = U_{lm} f_{mj}^{(li)}$ конкретную матрицу (2.1) с учетом тождества $f_{jl}^{(il)} = 0$ (условие несжимаемости), имеем

$$\overline{P}_{ij} = (F+2) f_{1j}^{(1i)} + (2F+1) f_{2j}^{(2i)}. \tag{П.3}$$

Используя симметрию $f_{ij}^{(lm)}$ по верхним и нижним индексам, а также тождество $P_{ii} = 0$, из (П.3) можно вывести два уравнения, связывающих P_{11} и P_{22}:

$$\overline{P}_{22} - \frac{F+2}{2F+1}\overline{P}_{11} = -\frac{(F+2)^2}{2F+1} f_{11}^{(11)} + (2F+1) f_{22}^{(22)},$$

$$-\frac{3}{F+2}\overline{P}_{22} - \overline{P}_{11} = \frac{(F-1)^2}{F+2} f_{22}^{(22)} - (F+2) f_{33}^{(33)}.$$

Из последних соотношений после несложных, но громоздких вычислений с применением (П.1) и (П.2) получаем формулы (2.3) и (2.4) основного текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов С. Р. Замыкание уравнений турбулентности как проблема аналитических и скейлинговых свойств спектральных функций // ПМТФ.— 1991.— № 6.
2. **Uberoi M. S.** Effect of wind-tunnel contraction on freestream turbulence // J. Aero. Science.— 1965.— V. 23.— P. 756.
3. **Comte-Bellot G., Corrsin S.** The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence // J. Fluid Mech.— 1966.— V. 25, pt 4.
4. **Klein A., Ramjee V.** Effect of contraction geometry on nonisotropic free-stream turbulence // Aero. Quart.— 1973.— V. 24, pt 1.
5. **Хуссейн, Рамье.** Влияние формы осесимметричного конфузорного канала на турбулентное течение несжимаемой жидкости // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов.— 1976.— № 2.
6. **Дербунович Г. И., Земская А. С., Репик Е. У., Соседко Ю. П.** Влияние конфузорности течения на уровень турбулентности потоков // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 2.
7. **Таунсенд А. А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом.— М.: ИЛ, 1959.
8. **Tucker H. J., Reynolds A. J.** The distortion of turbulence by irrotational plane strain // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 32, pt 4.
9. **Reynolds A. J., Tucker H. J.** The distortion of turbulence by general irrotational strain // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 68, pt 4.
10. **Marechal J.** Étude experimentale de la déformation plane d'une turbulence homogène // J. de Mécanique.— 1972.— V. 11, N 2.
11. **Матье Ж., Жандель Д.** Патологическое поведение турбулентных течений и спектральный метод // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.
12. **Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.** Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 68, pt 3.
13. **Лин А., Вольфштейн М.** Теоретическое исследование уравнений для напряжений Рейнольдса // Турбулентные сдвиговые течения. 1.— М.: Машиностроение, 1982.
14. **Batchelor G. K., Proudman I.** The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion // Quart. Journ. Mech. and Applied Math.— 1954.— V. 7, pt 1.
15. **Kerschen E. J.** Constraints on the invariant functions of axisymmetric turbulence // AIAA J.— 1983.— V. 21, N 7.
16. **Ламли Дж.** Модели второго порядка для турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.
17. **Moffat H. K.** The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 35, pt 1.
18. **Levich A., Tsinober A.** On the role of helical structures in three dimensional turbulent flow // Phys. Lett.— 1983.— V. 93A, N 6.
19. **Moffat H. K.** Transport effects associated with turbulence, with particular attention to the influence of helicity // Rep. on progress in physics.— 1983.— V. 46, N 5.

г. Петрозаводск

Поступила 13/XI 1990 г., в окончательном варианте — 21/III 1991 г.