

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОГО ПУЗЫРЯ В ЖИДКОСТИ
МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

О. В. Воинов, А. М. Головин, А. Г. Петров

(Москва)

Рассматривается задача о скорости движения пузыря, а также степени его деформации. Объем пузыря предполагается постоянным.

1. Уравнения Лагранжа. Рассматривается движение пузыря изменяющейся формы в идеальной несжимаемой жидкости. Предполагается, что жидкость не имеет свободных поверхностей и покоится на бесконечности. Движение пузыря определяется обобщенными координатами q_1, q_2, \dots и обобщенными скоростями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$.

В число обобщенных координат q_i входят декартовы координаты центра массы пузыря и параметры, определяющие его форму, число которых, вообще говоря, бесконечно. Известно, что движение твердого тела в идеальной жидкости описывается уравнениями Лагранжа [1-3]. Ниже, следуя вариационному методу Брейквелла [1], показано, что и для деформирующегося пузыря изменение обобщенных координат также описывается уравнениями Лагранжа.

Известно [1-3], что потенциал скоростей Φ и скорость жидкости v зависят от q_i и \dot{q}_i , а также от пространственных координат r_α , а кинетическая энергия жидкости T зависит от q_i и \dot{q}_i ($i = 1, 2, \dots$). Пусть на интервале времени от t_0 до t_1 обобщенные координаты изменяются во времени как $q_i(t)$, и $\delta q_i(t)$ — вариации этих координат удовлетворяют условиям $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt \quad (1.1)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Если перейти к лагранжевым координатам \mathbf{a} , представляющим собой координаты частиц жидкости плотностью ρ в момент времени t_0 , то можно получить

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta \int \frac{\rho v^2}{2} d^3r = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta \int \frac{\rho v^2}{2} d^3a = \int a^3 a \int_{t_0}^{t_1} \rho v_\alpha \delta v_\alpha dt \quad (1.2)$$

Вектор смещения частицы жидкости $\delta \mathbf{r}$ в момент времени t при изменении обобщенных координат $q_i(t)$ на величину $\delta q_i(t)$ связан с изменением скорости частицы жидкости $\delta \mathbf{v}$ соотношением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \delta r_\alpha \right)_a = \frac{d}{dt} \delta r_\alpha = \delta v_\alpha$$

Если $q_i(t)$ и $\delta q_i(t)$ — заданные функции времени, то $\delta \mathbf{r}$ является функцией от \mathbf{a} и t или в эйлеровых координатах функцией от \mathbf{r} и t —

Далее из (1.2) следует:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int d^3a \left\{ \rho v_\alpha \delta r_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \delta r_\alpha dt \right\} = \int \rho v_\alpha \delta r_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} d^3r - \int_{t_0}^{t_1} dt \int \rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \delta r_\alpha d^3r \quad (1.3)$$

Можно доказать, что для несжимаемой жидкости выполняется соотношение $\operatorname{div} \delta \mathbf{r} \equiv 0$.

Уравнения безвихревого движения идеальной жидкости имеют вид

$$\rho d\mathbf{v} / dt = -\nabla p, \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi$$

Объемные интегралы в (1.3) сводятся к поверхностным

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T = - \int \rho \Phi \delta r_\alpha n_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} dS - \int_{t_0}^{t_1} dt \int (p - p_\infty) \delta r_\alpha n_\alpha dS \quad (1.4)$$

Здесь p_∞ — давление жидкости на бесконечности, n_α — компоненты вектора внешней нормали к поверхности пузыря. Можно доказать, что интегралы по сфере бесконечно большого радиуса равны нулю [4].

Пусть при изменении координат $q_i(t)$ на $\delta q_i(t)$ соответствующее нормальное перемещение границы пузыря равно $w_i \delta q_i$. Тогда на границе выполняется условие

$$\delta r_\alpha n_\alpha = w_i \delta q_i \quad (1.5)$$

Из формул (1.1), (1.4) и (1.5) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \int p w_i dS \right] \delta q_i = 0$$

Отсюда в силу произвольности вариаций δq_i получаются уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \int p w_i dS \quad (1.6)$$

2. Уравнение движения пузыря в жидкости малой вязкости. Если число Рейнольдса R для поступательного движения пузыря существенно превышает единицу, то силы вязкого сопротивления можно включить в обобщенные внешние силы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = P_i \quad (2.1)$$

Эти силы можно определить в задаче о движении одного пузыря по скорости изменения кинетической энергии вязкой жидкости. В работе [4] показано, что при стационарном движении пузыря можно пренебречь различием кинетической энергии идеальной и вязкой жидкости. Ниже предполагается, что это справедливо и при движении пузыря изменяющейся формы.

В силу квадратичности T относительно обобщенных скоростей q_i из (2.1) следует, что

$$\frac{d}{dt} T = P_i q_i \quad (2.2)$$

С другой стороны, изменение кинетической энергии можно вычислить из уравнений Навье — Стокса

$$\frac{d}{dt} T = \int (p\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}') v_{\alpha} n_{\beta} dS + \int U v_{\alpha} n_{\alpha} dS - \int \sigma_{\alpha\beta}' \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} d^3r \quad (2.3)$$

Здесь μ — динамическая вязкость жидкости, U — потенциал внешних массовых сил. Первый интеграл (2.3) представляет собой работу внешних сил, которая идет на увеличение поверхностной энергии

$$\int (p\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}') v_{\alpha} n_{\beta} dS = -\sigma \frac{dS}{dt} = -\sigma \frac{\partial S}{\partial q_i} q_i \quad (2.4)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, S — площадь поверхности пузыря. Второй интеграл (2.3) представляет собой работу массовых сил F_i в единицу времени

$$\int U v_{\alpha} n_{\alpha} dS = \int U w_i q_i dS = F_i q_i \quad (2.5)$$

Последний объемный интеграл в (2.3) равен работе вязких сил Q_i . Этот интеграл для $R \gg 1$ вычисляется в приближении потенциального течения. Допустимость такого приближения доказана в работе [4] для стационарного движения пузыря

$$-\int \sigma_{\alpha\beta}' \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} d^3r = \mu \int \frac{\partial}{\partial n} v^2 dS = -Q_i q_i \quad (2.6)$$

Сравнивая выражения (2.2) и (2.3), с помощью формул (2.4) — (2.6) получим

$$P_i = -\sigma \frac{\partial S_i}{\partial q_i} + F_i - Q_i$$

Если включить поверхностную энергию σS в функцию Лагранжа, то получаются следующие уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i - Q_i, \quad L = T - \sigma S \quad (2.7)$$

3. Эллипсоид в жидкости малой вязкости. Предполагается, что пузырь имеет форму осесимметричного эллипсоида вращения, поверхность которого в декартовой системе координат описывается уравнением

$$(x^2 + y^2) / l_x^2 + z^2 / l_z^2 = 1 \quad (l_z < l_x)$$

В эллипсоидальной системе координат (α, β, φ)

$$x = k [(1 + \alpha^2)(1 - \beta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \quad y = k [(1 + \alpha^2)(1 - \beta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \\ z = k \alpha \beta$$

поверхность эллипсоида соответствует $\alpha = \alpha_0$.

Пусть эллипсоид постоянного объема движется в направлении оси z со скоростью u и совершает колебания, сохраняя эллипсоидальную форму, так что

$$k^3 \alpha_0 (1 + \alpha_0^2) = l^3$$

Здесь k и α_0 — функция от времени t , l — радиус сферы эквивалентного объема.

Нормальные смещения поверхности эллипсоида за счет колебаний w_x и поступательного движения w_z равны

$$w_x = \frac{h_x (3\beta^2 - 1)}{3(\alpha_0^2 + \beta^2)}, \quad w_z = \frac{\beta k}{h_x}. \quad \left(h_x = k \left(\frac{\alpha_0^2 + \beta^2}{1 + \alpha_0^2} \right)^{1/2} \right)$$

Потенциал скоростей Φ должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$ с граничными условиями

$$\frac{1}{h_x} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = w_z u + w_x \alpha' \quad \text{при } \alpha = \alpha_0, \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty$$

Следуя [2], можно получить

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{uky\beta B(\alpha)}{\alpha_0 B - A} + \frac{k^2 \alpha'}{6} (3\beta^2 - 1) \frac{3\alpha B(\alpha) - A(\alpha)}{3yB - 1}$$

$$A(\alpha) = \text{arc ctg } \alpha, \quad B(\alpha) = 1 - \alpha A(\alpha)$$

$$A = A(\alpha_0), \quad B = B(\alpha_0), \quad y = 1 + \alpha_0^2$$

Кинетическая энергия жидкости T , площадь поверхности S и скорость диссипации энергии E определяются следующими формулами:

$$\frac{2}{\rho} T = - \int \frac{\Phi}{h_x} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} dS = \frac{4\pi}{3} \left(l^3 u^2 T_u + \frac{2}{15} l^5 \alpha'^2 T_\alpha \right) \quad (3.1)$$

$$T_u = \frac{yB}{1-yB}, \quad T_\alpha = \frac{3\alpha B - A}{(1-3yB)(\alpha y)^{5/3}}$$

$$S = 2\pi l^2 s, \quad s = \left(\frac{y}{\alpha^2} \right)^{1/3} + \frac{\ln[(1 + \sqrt{y})/\alpha]}{(\alpha y)^{1/6}} \quad (3.2)$$

$$\frac{E}{4\pi\mu} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial v^2}{\partial n} dS = - \frac{ky}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_{-1}^1 v^2 d\beta = u^2 l Q_u + 4\alpha'^2 l^3 Q_\alpha$$

$$Q_u = \frac{y^{2/3}(A + \alpha B)}{\alpha^{7/3}(A - \alpha B)^2}, \quad Q_\alpha = \frac{q}{(1-3yB)^2} \quad (3.3)$$

$$q = A^2 - \frac{2A}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{9y^2} - \frac{1}{3y} - \frac{1}{18y\alpha^2} \right) + \frac{1}{y} + \frac{1}{3y^2} + \frac{1}{9y^2\alpha^2}$$

Здесь и далее вместо α_0 пишется α .

При $\alpha' = 0$ формулы (3.1) и (3.3) переходят в формулы, полученные в работе [4]. Таким образом, уравнения движения эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости в поле силы тяжести с ускорением g имеют вид

$$\frac{d}{dt} u T_u = g - 3 \frac{v u}{l^2} Q_n \quad (3.4)$$

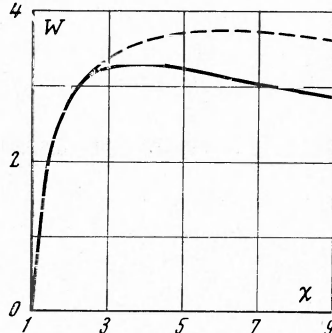
$$\frac{d}{dt} (\alpha' T_\alpha) = \frac{15u^2}{4l^2} \frac{dT_u}{d\alpha} - \frac{\alpha'^2}{2} \frac{dT_\alpha}{d\alpha} = - \frac{45}{4} \frac{\sigma}{\rho l^3} \frac{ds}{d\alpha} - 90 \frac{v \alpha'}{l^2} Q_\alpha$$

4. Стационарное движение эллипсоидального пузыря. Стационарный подъем эллипсоидального пузыря описывается уравнениями

$$u_0 = 1/3 g l^3 / \nu Q_u, \quad T_u' = 3\sigma s' / \rho l u_0^2 \quad (4.1)$$

Второе уравнение системы (4.1) определяет число Вебера W как функцию координаты α_0 , характеризующей равновесную форму пузыря

$$W = 2\rho l u_0^2 / \sigma = 6s'(\alpha_0) / T_u'(\alpha_0) \quad (4.2)$$



Фиг. 1

В работе [3] зависимость числа Вебера от отношения полуосей эллипсоида $\chi = l_x / l_z$ получена путем удовлетворения точного граничного условия $p_i - p = K\sigma$ (K — средняя кривизна поверхности, p_i — давление газа внутри пузыря) только в точке торможения и на экваторе. В работе [5] аналогичная зависимость для $\chi \leq 2$ найдена численно, причем граничное условие для давления выполнялось в среднем на поверхности эллипсоида. На фиг. 1 сравниваются результаты работ [4, 5] с функцией (4.2), график которой изображен сплошной линией. Для $\chi < 2.5$ все графики практически совпадают. Различия с [4] проявляются при больших χ . Так, при $\chi \approx 5$ различие достигает 17%. Максимальное число Вебера по [4] равно 3.745 в точке $\chi \approx 6$, тогда как по формуле (4.2) максимальное значение равно 3.276 в точке $\chi \approx 3.7$.

Если исключить из уравнений (4.1) l и u , то получится зависимость скорости подъема пузыря u от l в параметрическом виде

$$u = \left(\frac{\sigma^2 g}{12\rho^2 \nu} \right)^{1/5} W^{2/5} Q_u^{-1/5}, \quad l = \left(\frac{95\nu^2}{2\rho g^2} \right)^{1/5} W^{1/5} Q_u^{2/5} \quad (4.3)$$

Из-за слабой зависимости u от W скорость подъема пузыря, вычисленная по формулам (4.3), мало отличается от результатов расчета Мура. Однако в области, отвечающей $2.5 < \chi < 4$, формула (4.3) несколько лучше согласуется с экспериментом [6], чем результаты [4].

5. Колебания пузыря. Пусть ξ и η — параметры, характеризующие деформации и скорости пузыря от положения равновесия

$$\alpha = \alpha_0 (1 + \xi), \quad u = u_0 (1 + \eta), \quad \xi \ll 1, \quad \eta \ll 1$$

Тогда из уравнений (3.4) получатся уравнения малых колебаний

$$\begin{aligned} T_u' \xi'' + T_u \eta'' &= -3\varepsilon (Q_u' \xi + Q_u \eta), \quad \varepsilon = W^{1/2} / R \\ T_\alpha \xi'' - 15/4 W (T_u'' \xi + 2T_u' \eta) &= -45/2 s'' \xi - 90\varepsilon Q_\alpha \xi \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $R = u_0 l / \nu$ — число Рейнольдса, штрихами обозначены производные по α в точке α_0 , точками — производные по безразмерному t' , связанному с t следующим образом:

$$t = t' \sqrt{2gl^3 / \sigma}$$

Решение системы (5.1) следует искать в виде

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda t'}, \quad \eta = \eta_0 e^{\lambda t'}$$

