

ЛИТЕРАТУРА

1. Науэ Г. Законы сохранения неклассической гидродинамики и их применение к турбулентным каналовым течениям. Числен. методы механ. сплош. среды. Новосибирск, изд. Вычислит. центра СО АН СССР, 1973, т. 4, № 1, с. 84—101.
2. Kirwan A. D., Newman N. Simple flow of a fluid containing deformable structures.— «Intern. J. Engng Sci.», 1969, vol. 7, N 10, p. 1067—1078.
3. Суязов В. М. К гидродинамической теории пристеночного и приосевого эффектов и эффектов Фареуса — Линдквиста. Деп. ВИНТИ, № 4912-72 Деп.— «Механика полимеров», 1973, № 2, с. 379.
4. Eringen A. C. Simple microfluids.— «Intern. J. Engng Sci.», 1964, vol. 2, N 4, p. 205—217.
5. Kirwan A. D. Constitutive equations a fluid containing nonrigid structures.— «Phys. Fluids», 1968, vol. 11, N 7, p. 1440—1446.
6. Суязов В. М. О структурно-континуальном подходе в магнито- и электрореологии дисперсных систем.— «Магнитная гидродинамика», 1972, № 2, с. 3—19.
7. Суязов В. М. К магнитной гидродинамике микроструктурных сред. Реоэлектрический эффект.— «Магнитная гидродинамика», 1973, № 4, с. 59—65.
8. Суязов В. М. К линейной теории вязкоупругих сред с деформируемой микроструктурой.— «Труды научно-исслед. Ин-та математики Воронежского ун-та», 1973, вып. 10, с. 24—35.
9. Rao S. K. L., Ramacharyulu N. C. P., Rao P. V. Slow steady rotation of a sphere in a micro-polar fluid.— «Intern. J. Engng Sci.», 1969, vol. 7, N 9, p. 905—916.
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
11. Стар В. П. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., «Мир», 1971.

УДК 533.542

К ВОПРОСУ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ КАПЕЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ

М. Я. Куракина, В. П. Радченко, В. А. Юфин

(Москва)

Рассматриваются некоторые случаи неустановившегося движения капельной сжимаемой жидкости при различных законах трения в трубопроводах (в частности, в магистральных нефтепроводах). Приведены результаты решения ряда задач неустановившегося движения капельной жидкости в трубах с квадратичным законом сопротивления и для режима гидравлически гладких труб, полученные численно методом конечных разностей (методом сеток). Дано сопоставление с результатами, полученными при линеаризации члена с квадратичным трением, согласно методике [1]. Исследуются отклонения параметров неустановившихся течений для рассматриваемых законов сопротивления.

Рассматривается система уравнений одномерного неустановившегося движения капельной сжимаемой жидкости в трубах в постановке, приведенной в [1]

$$(1) \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho w^2) + \frac{\lambda}{2D} \rho w |w| = 0; \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \\ + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

где p , ρ , w — среднее по сечению давление, плотность и скорость жидкости; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; D — диаметр трубопровода; x — координата вдоль оси трубы; t — переменная времени;

L —длина участка трубопровода; $c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$ —скорость звука в жидкости, где $K = \frac{K_{ж}}{1 + a_1 \frac{K_{ж}}{E}}$ —приведенный модуль объемного сжатия, учитывающий

упругость стенок трубы; $K_{ж}$ —модуль объемного сжатия жидкости; a_1 —некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения и толщины стенок.

Для тонкостенных труб $a_1 = \frac{D}{\delta_0}$, где D —внутренний диаметр трубы; δ_0 —толщина стенки трубы; E —модуль упругости 1-го рода материала трубы; ρ_0 —плотность при давлении p_0 .

Чтобы избежать трудностей при решении системы (1), связанных, в частности, с нелинейностью члена с трением в динамическом уравнении, в работе [1] предложено линеаризовать его следующим образом:

$$(2) \quad \frac{\lambda \rho w |w|}{2D} \approx \left(\frac{\lambda w}{2D} \right)_{cp} \rho w = 2a\rho w,$$

где $2a = \frac{\lambda(w_2 + 2w_1)}{3D}$, w_1, w_2 —пределы изменения скорости w в данном неустановившемся движении.

Систему уравнений (1), линеаризованную, согласно (2), используют и при расчетах неустановившегося течения нефти в магистральных нефтепроводах, хотя режим течения в них соответствует турбулентному в зоне гидравлически гладких труб. При этом обычно пренебрегают в динамическом уравнении слагаемым $\frac{\partial}{\partial x}(\rho w^2)$, характеризующим изменение скоростного напора по длине трубы, т. е. вместо (1) рассматривают линейную систему [1]:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + 2a\rho w &= 0; \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Для оценки погрешности, возникающей при таком упрощении исходной системы уравнений, были получены численные решения на БЭСМ-6 ряда задач неустановившегося течения жидкости на основе системы уравнений (1) в зоне квадратичного закона сопротивления и для турбулентного течения капельных жидкостей в зоне гидравлически гладких труб, когда $\lambda = 0,3164/Re^{0,25}$ (зона Блазиуса). Указанные численные решения были сопоставлены с решением линеаризованных по [1] уравнений (3), полученным также численно на ЭВМ. Зависимость плотности жидкости от давления принимается согласно закону Гука

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_{ж}} \right).$$

Разность давлений $p - p_0$ предполагается малой по сравнению с E и $K_{ж}$. В качестве начальных условий задавалось стационарное распределение давления и скорости вдоль трубопровода

$$(4) \quad p(x) = p_0 - (p_0 - p_L) \frac{x}{L}; \quad w(x) = w_0 = \text{const} \quad (0 \leq x \leq L),$$

где p_0, p_L — соответственно давление в начале и в конце трубы. Граничные условия рассматривались двух типов:

$$(5) \quad w(0, t) = f_1, \quad p(L, t) = f_2;$$

$$(6) \quad p(0, t) = f_3, \quad p(L, t) = f_4.$$

Для численного решения систем уравнений (1), (3) с начальными и граничными условиями типа (4)–(6) был применен метод сеток. При численном расчете использовалась характеристическая форма уравнений (1)

$$(7) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + (w \pm c) \frac{\partial p}{\partial x} \pm \rho c \left[\frac{\partial w}{\partial t} \pm (w \pm c) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \pm c \Phi,$$

где

$$\Phi = -\frac{\lambda}{2D} \rho w |w|,$$

соответственно для системы (3)

$$(8) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t} \pm c \frac{\partial p}{\partial x} \right) (c \pm w) \pm \rho c^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \pm c \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \pm c^2 \Phi_1,$$

где

$$\Phi_1 = -2\alpha r w$$

Для решения системы уравнений (7) применялась следующая конечно-разностная схема [2]:

$$\begin{aligned} & (p_{i,k+1} - p_{i,k})/\tau + (w \pm c)_{i,k} (p_{i+1,k+1} - p_{i-1,k+1})/2h \pm \\ & \pm (\rho c)_{i,k} [(w_{i,k+1} - w_{i,k})/\tau + (w \pm c)_{i,k} (w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1})] = \\ & = c \Phi_{i,k}, \quad i=1, 2, \dots, N-1; \\ & (p_{0,k+1} - p_{0,k})/\tau + (w_{0,k} - c) (p_{1,k+1} - p_{0,k+1})/h - (\rho c)_{0,k} [(w_{0,k+1} - \\ & - w_{0,k})/\tau + (w_{0,k} - c) (w_{1,k+1} - w_{0,k+1})/h] = -c \Phi_{0,k}; \\ & [(p_{N,k+1} - p_{N,k})/\tau + (w_{N,k} + c) (p_{N,k+1} - p_{N-1,k+1})/h + (\rho c)_{N,k} \times \\ & \times [(w_{N,k+1} - w_{N,k})/\tau + (w_{N,k} + c) (w_{N,k+1} - w_{N-1,k+1})/h] = c \Phi_{N,k}. \end{aligned}$$

Аналогичная неявная разностная схема применялась и для решения системы уравнений (8). Методы решения систем квазилинейных гиперболических уравнений с использованием характеристической формы рассматривались в [3].

Полученная замкнутая система линейных алгебраических уравнений решалась методом прогонки, при этом предварительно системы уравнений (7), (8) приводились к безразмерной форме введением переменных:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}; \quad \bar{w} = \frac{w}{w_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \text{где } t_0 = \frac{L}{c}.$$

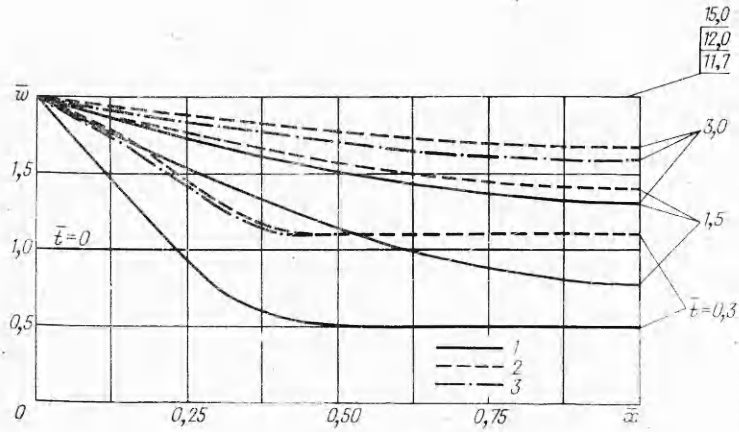
В качестве примера приведены результаты расчетов неустановившегося течения капельной жидкости, для которой в уравнениях (1) и (3) можно принять практически без погрешности $\rho = \rho_0 = \text{const}$ [1].

Сходимость и устойчивость полученных численных решений проверялись путем экспериментальных просчетов при вариациях шагов прямоугольной сетки. Расчеты проводились при граничных условиях:

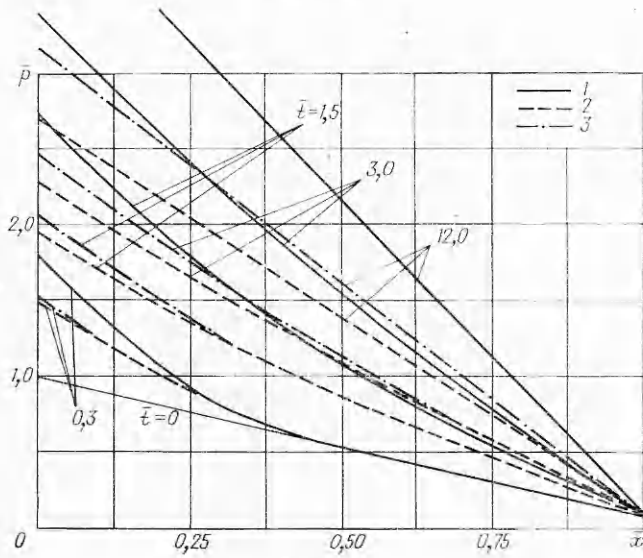
$$(9) \quad w(0, t) = 2w_0, \quad p(L, t) = p_L;$$

$$(10) \quad w(0, t) = 3w_0, \quad p(L, t) = p_L;$$

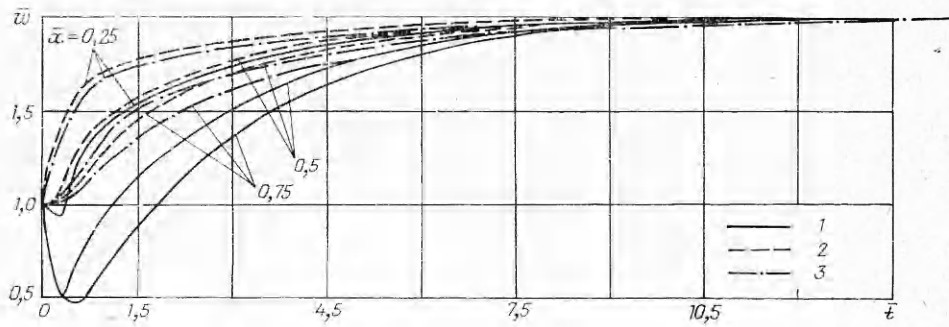
$$(11) \quad p(0, t) = 2p_0, \quad p(L, t) = p_L.$$



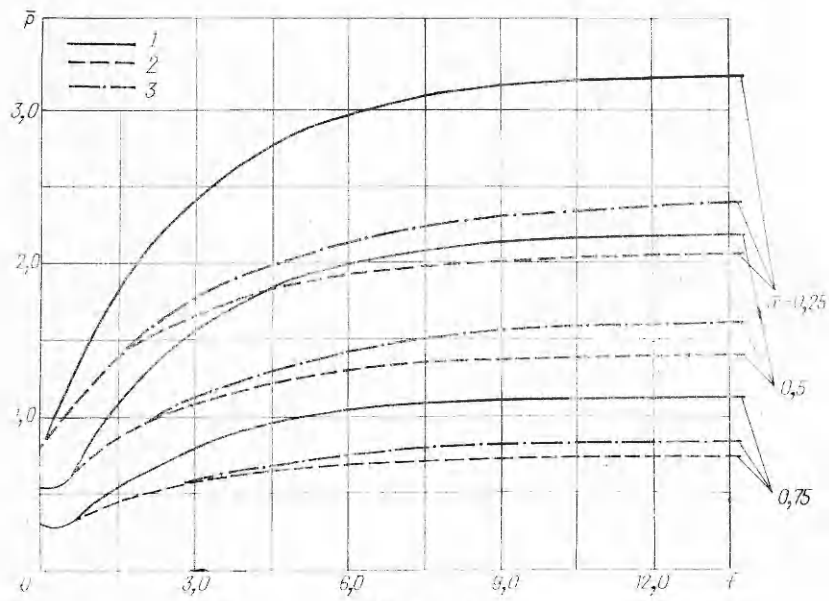
Ф и г. 1



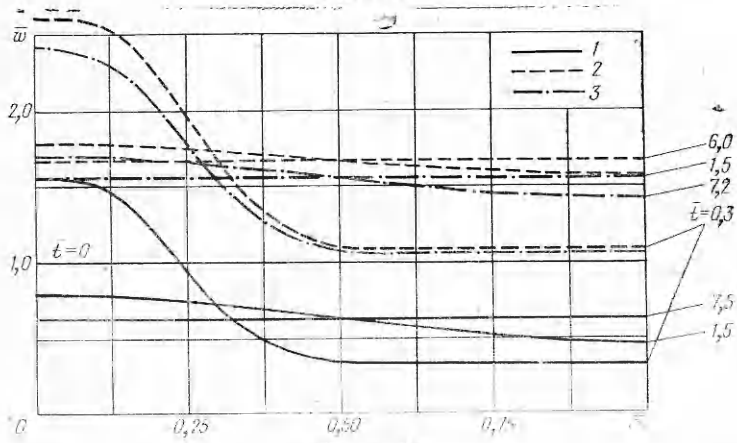
Ф и г. 2



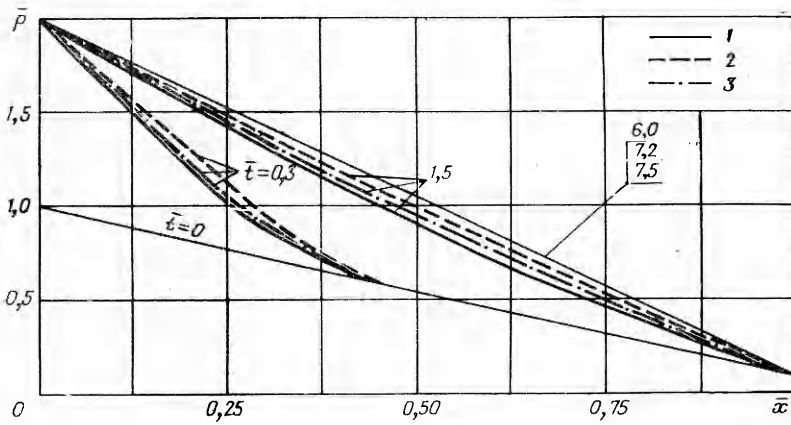
Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5



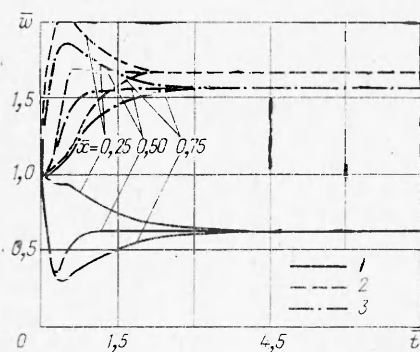
Ф и г. 6

Значения исходных параметров следующие [4]:

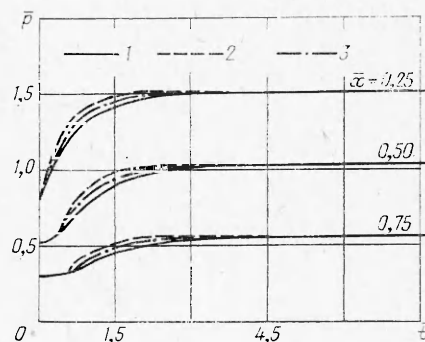
$L=109$ км; $D=0,509$ м; $p_0=32,25 \cdot 10^4$ кг/м²; $p_L=2,61 \cdot 10^4$ кг/м²; $w_0=1$ м/с; $c=1100$ м/с*; $\lambda=0,0266$; $\rho=88,8$ кг·с²/м⁴; $\nu=0,25 \cdot 10^4$ м²/с, где ν — кинематическая вязкость.

Сравнение результатов расчетов линейризованной системы уравнений (3) с решениями нелинейной системы уравнений (1) для квадратичного закона трения и режима гидравлически гладких труб показано на фиг. 1—4 (граничные условия (9)), на фиг. 5—8 (граничные условия (11)), где кривые 1 соответствуют линейризованной системе уравнений, 2 — зоне гидравлически гладких труб, 3 — зоне квадратичного закона трения. Из фиг. 1 следует, что функция $\bar{w}(x, \bar{t})$ в начале переходного процесса ($\bar{t}=0,3$) резко уменьшается по величине на участке $0 < x < 0,5$ и затем остается практически постоянной и равной: для зоны гидравлически гладких труб и зоны квадратичного закона трения $0,5\bar{w}(0, \bar{t})$, а для линейризованных уравнений $0,25\bar{w}(0, \bar{t})$. При больших моментах времени скорость постоянно увеличивается и расхождение между значениями скоростей для различных законов трения уменьшается.

При $\bar{t}=11,7$ для зоны Блазиуса, $\bar{t}=12$ для линейризованной системы уравнений и $\bar{t}=15,0$ для зоны квадратичного закона трения переходный процесс заканчивается и на всем протяжении $\bar{w}=2\bar{w}_0$.



Ф и г. 7



Ф и г. 8

На фиг. 2 показано изменение давления во времени при граничных условиях (9). С течением времени давление в трубопроводе увеличивается и к моменту $\bar{t}=1,5$ удваивается в начале трубопровода для зоны гидравлически гладких труб и для квадратичного закона трения, а для линейризованной системы уравнений достигает значения $\bar{p}(0, \bar{t})=2,74$. Распределение скорости во времени для трех сечений трубопровода при граничных условиях (9) представлено на фиг. 3. Из фиг. 4 следует, что давление во время всего переходного процесса, рассчитанное по линейризованным уравнениям, значительно выше, чем для зоны гидравлически гладких

* Для принятых исходных данных ($K_{жк}=1,4 \cdot 10^8$ кг/м², $E=2 \cdot 10^{10}$ кг/м² (сталь), $\delta=0,01$ м) скорость звука получается равной $\sqrt{K/\rho_0}=c=1080$ м/с. В расчетах принималось близкое к указанному значение $c=1100$ м/с, полученное экспериментально в [4].

труб и квадратичного закона трения. Изменение относительных отклонений скорости и давления во времени для линеаризованных уравнений по сравнению с квадратичным законом трения и режимом гидравлически гладких труб приведено в таблице (граничные условия (9)). Индексы л, к, Б относятся соответственно к случаю линеаризованной системы, квадратичному закону трения, режиму гладкого трения (зона Блазиуса).

\bar{t}	$\bar{x}=0,25$					$\bar{x}=0,5$					$\bar{x}=0,75$				
	$\bar{w}_Л$	$\bar{w}_К$	$\bar{w}_Б$	δw_K	δw_B	$\bar{w}_Л$	$\bar{w}_К$	$\bar{w}_Б$	δw_K	δw_B	$\bar{w}_Л$	$\bar{w}_К$	$\bar{w}_Б$	δw_K	δw_B
0	1,00	1,00	1,00	0,0	0,0	1,00	1,00	1,00	0,0	0,0	1,00	1,00	1,00	0,0	0,0
0,3	0,94	1,41	1,45	33,4	35,2	0,52	1,08	1,09	51,8	52,3	0,50	1,07	1,08	52,7	53,6
0,6	1,29	1,60	1,65	19,4	21,8	0,71	1,28	1,34	44,4	48,0	0,47	1,10	1,12	57,4	58,0
1,2	1,49	1,70	1,74	12,4	14,4	1,05	1,46	1,51	28,0	30,4	0,75	1,30	1,36	42,3	44,9
2,1	1,63	1,78	1,82	8,4	10,4	1,32	1,60	1,67	17,5	21,0	1,10	1,49	1,57	26,2	29,9
3,0	1,74	1,83	1,88	4,93	7,45	1,31	1,70	1,77	11,2	14,7	1,37	1,62	1,70	15,4	19,4
6,0	1,92	1,93	1,96	0,52	2,04	1,85	1,88	1,93	1,6	4,15	1,80	1,84	1,91	2,18	5,76
12,0	2,00	1,99	2,00	0,45	0,00	1,99	1,98	2,00	0,81	0,1	1,99	1,98	2,00	1,01	1,15
	$\bar{p}_Л$	$\bar{p}_К$	$\bar{p}_Б$	δp_K	δp_B	$\bar{p}_Л$	$\bar{p}_К$	$\bar{p}_Б$	δp_K	δp_B	$\bar{p}_Л$	$\bar{p}_К$	$\bar{p}_Б$	δp_K	δp_B
0	0,77	0,77	0,77	0,0	0,0	0,54	0,54	0,54	0,0	0,0	0,31	0,31	0,31	0,0	0,0
0,3	0,93	0,90	0,90	3,34	3,34	0,54	0,54	0,54	0,0	0,0	0,31	0,31	0,31	0,0	0,0
0,6	1,22	1,06	1,06	15,1	15,1	0,65	0,63	0,64	3,18	1,56	0,32	0,32	0,32	0,0	0,0
1,2	1,63	1,29	1,27	26,4	28,4	0,96	0,80	0,81	20,0	18,5	0,46	0,41	0,43	12,2	7,0
2,1	2,09	1,55	1,5	34,8	39,4	1,31	0,99	0,98	32,4	33,7	0,66	0,51	0,51	29,4	29,4
3,0	2,41	1,75	1,66	37,8	45,0	1,54	1,13	1,10	36,3	40,0	0,79	0,59	0,58	33,9	36,2
6,0	2,97	2,13	1,92	39,5	54,7	1,98	1,42	1,30	39,4	52,3	1,02	0,74	0,68	37,8	50,0
12,0	3,21	2,38	2,05	30,6	56,8	2,17	1,61	1,39	34,5	55,6	1,13	0,85	0,74	33,1	52,7

При увеличении возмущающего воздействия (граничные условия (10)) характер изменения скорости и давления остается прежним, но время переходного процесса увеличивается (для зоны Блазиуса $\bar{t}=13,5$, для линеаризованной системы уравнений $\bar{t}=13,8$ и для квадратичного закона трения $\bar{t}=19,5$).

Результаты численных расчетов неустановившихся течений при граничных условиях (9), (10) показали, что линеаризованная система уравнений дает заниженные значения скорости (см. фиг. 1,3) и завышенные значения давления (см. фиг. 2, 4) по сравнению с режимом гидравлически гладких труб. Например, максимальные относительные отклонения по скорости при граничных условиях (9) для трех сечений трубопровода ($\bar{x}=0,25; 0,5$ и $0,75$) составили соответственно (в процентах) $\delta|\bar{t}=0,3 = 35,2; \delta|\bar{t}=0,3 = 52,3; \delta|\bar{t}=0,6 = 58$. При граничных условиях (3.2) максимальные относительные отклонения возросли и составили (в процентах) $\delta|\bar{t}=0,3 = 39,2; \delta|\bar{t}=0,3 = 62,7; \delta|\bar{t}=0,6 = 67$.

Относительные отклонения по давлению для тех же сечений трубопровода к моменту времени $\bar{t}=9,0$ принимают постоянные значения и составляют приблизительно 50—55% для граничных условий (9) (см. таблицу) и 45—50% для граничных условий (10). Распределение скорости во времени для граничных условий (11) представлено на фиг. 7, из которой следует, что функция $\bar{w}(x, \bar{t})$ в начале переходного процесса резко возрастает для зоны Блазиуса и квадратичного закона трения и уменьшается для линеаризованной системы уравнений. К моменту времени $\bar{t}=3,0$

скорость становится постоянной для квадратичного закона трения ($\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})=1,56$) и для зоны Блазиуса ($\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})=1,67$), а для линеаризованной системы к моменту времени ($\bar{t}=4,5$) $\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})=0,62$.

На фиг. 6 показано распределение давления по длине трубопровода при граничных условиях (11). С течением времени давление в трубопроводе возрастает, и к моменту $\bar{t}=6,0$ для режима гидравлически гладких труб, $\bar{t}=7,2$ для квадратичного закона трения и $\bar{t}=7,5$ для линеаризованной системы уравнений переходный процесс заканчивается. Следует отметить, что значения давления и скорости, полученные по линеаризованной системе уравнений при граничных условиях (11), ниже соответствующих значений для режима Блазиуса и квадратичного закона трения.

Из приведенных результатов следует, что применяемая линеаризация уравнений неустановившегося движения жидкости в трубопроводах вносит существенную погрешность при определении давления (45—55%) и скорости (40—70%). Максимальное расхождение соответствующих результатов расчетов по формулам режима Блазиуса и квадратичного закона трения не превышает 10% для скорости и 12% для давления.

Поступила 23 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., Гостехтеориздат, 1951.
2. Владиславлев А. С., Писаревский Б. М., Писаревский В. М., Радченко В. П. О газодинамическом расчете пульсирующего потока в трубопроводах.— ПМТФ, 1972, № 4, с. 85—88.
3. Васильев О. Ф., Годунов С. К. и др. Численный метод расчета распространения длинных волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 3, с. 525—527.
4. Мороз П. А., Галицков Н. Ф., Прохоров Б. М. Экспериментальные исследования гидродинамических процессов на трубопроводе.— В кн.: Транспорт и хранение нефти и нефтепродуктов. ЦНИИТЭнефтегаз, 1964, № 6, с. 7—12.

УДК 536.25

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. М. Шихов

(Пермь)

Рассматривается задача об устойчивости стационарного конвективного движения вязкой несжимаемой жидкости в канале между проницаемыми вертикальными плоскостями, нагретыми до разной температуры, при наличии однородного поперечного продува. Численно определены границы устойчивости для разных значений числа Прандтля Pr и числа Пекле Pe , характеризующего интенсивность поперечного движения. Полученные результаты показывают существенное влияние поперечного продува как на гидродинамический механизм неустойчивости, так и на неустойчивость, связанную с нарастанием в потоке тепловых волн.

В работах [1—7] подробно исследована устойчивость стационарного конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры. Показано существование неустойчивости монотонного типа, имеющей гидродинамическую природу,