10. Chang N. C., Tavis M. T. Gain of high pressure CO_2 lasers.— «IEEE J. Q. E.», 1974, vol. 10, N 3, p. 372.
11. Devir A. D., Oppenheim V. P. Line width determination in the 9,4 and 10,4 μ bands of CO_2 using CO_2 laser.— «J. Appl. Opt.», 1969, vol. 8, N 9, p. 2121.
12. Крошко В. Н., Солоухин Р. И., Фомин Н. А. Влияние состава и температуры среды на эффективность термического возбуждения инверсии смешением в сверхзвуковом потоке.— ФГВ, 1974, т. 10, № 4, с. 473.
13. Солоухин Р. И., Якоби Ю. А. К вопросу об измерении коэффициента усиления.— ПМТФ, 1974, № 3, с. 3.
14. Солоухин Р. И. Некоторые данные о неравновесном состоянии углекислого газа за фронтом ударной волны.— ПМТФ, 1963, № 6, с. 138.
15. Lapworth K. C. Normal shock wave tables for air, argon, carbon dioxide, carbon monoxide, hydrogen, nitrogen, nitrous oxide and oxygen.— «Aeronautical Res. Council Current Papers», 1970, c. p. N 1101.
16. Law C. K., Bristow M. Tables of normal shock wave properties for oxygen and nitrogen in dissociation equilibrium.— In: UTIAS Techn. Note N 148, AFOSR 70—0766, Toronto, 1969.
17. Miller J. L., George E. V. High-pressure absorption spectrum of CO_2 laser bands at 10 μ.— «Appl. Phys. Lett.», 1975, vol. 27, N 12, p. 665.

УДК 621.375.82

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ВОЛНОВОДОВ И СОЛИТОНОВ ПРИ ТРЕХЧАСТОТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

Ю. Н. Карамзин, Т. С. Филипчук

(*Москва*)

В средах с квадратичной нелинейностью может происходить резонансное взаимодействие трех волн, частоты которых связаны соотношением $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. Одним из наиболее интересных следствий такого взаимодействия является возникновение при определенных условиях специфического распространения, когда взаимодействие носит в основном реактивный характер. При этом может происходить компенсация дифракционной расходимости (вследствие нелинейного изменения фазовых скоростей) ограниченных пучков с образованием связанных волноводов и компенсация дисперсионного расплывания коротких импульсов с образованием связанных солитонов [1—3].

В ряде частных случаев удалось найти профили волноводов и солитонов: аналитически (структура одной моды солитонов при наличии фазовой расстройки [1]) или численными методами (форма цилиндрических трехчастотных волноводов [2] и одномерных волноводов в вырожденном случае $\omega_1 = \omega_2$ [3] при фазовом синхронизме, а также одной моды цилиндрических пучков с расстройкой фазовых скоростей [3]). Однако в общем случае вопрос о существовании волноводов и солитонов оставался открытым.

В данной работе доказано существование двухпараметрического семейства волноводных и солитонных решений системы уравнений, описывающей трехчастотное взаимодействие волн в недиссипативной диспергирующей среде,

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} + iD_1\Delta_\perp v_1 = -i\gamma_1 v_3 v_2^* e^{i\Delta z};$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial z} + iD_2\Delta_\perp v_2 = -i\gamma_2 v_3 v_1^* e^{i\Delta z};\tag{1}$$
$$\frac{\partial v_3}{\partial z} + iD_3\Delta_\perp v_3 = -i\gamma_3 v_1 v_2 e^{-i\Delta z},$$

т. е. ограниченных решений вида $v_j = y_j(x)e^{-i\Gamma_j z}$ $(\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = -\Delta)$. Здесь v_j — комплексные амплитуды волн, распространяющихся вдоль оси z; $\Delta_\perp = x^{-m}(\partial/\partial x)(x^m\,\partial/\partial x)$; $\Delta = k_1 + k_2 - k_3$ — расстройка средних величин волновых векторов. При $m = 0$ (плоский случай) система уравнений (1) описывает взаимодействие импульсов при условии равенства групповых скоростей волн; $D_j = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_j}{\partial\omega_j^2}$ — коэффициенты диффузии волновых пакетов; $x = t - z/u$ — сопровождающая координата. При $m = 1$ система уравнений (1) описывает взаимодействие аксиально-симметричных пучков, тогда $D_j = 1/2k_j$ — коэффициенты поперечной диффузии амплитуды.

В работе показано, что для всех положительных параметров $D_j^{-1}\Gamma_j(\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 = -\Delta)$ существуют положительные на полуинтервале $0 \leqslant x < \infty$ и обращающиеся в нуль только на бесконечности действительные функции $y_j(x)$ такие, что

$$\dot{y}_j(0) = y_j(\infty) = 0\tag{2}$$

и $v_j = y_j(x)e^{-i\Gamma_j z}$ — решения системы (1). Функции $y_j(x)$ удовлетворяют при этом системе уравнений

$$\Delta_\perp y_1 - \Gamma_1 D_1^{-1} y_1 = -\gamma_1 D_1^{-1} y_3 y_2;$$
$$\Delta_\perp y_2 - \Gamma_2 D_2^{-1} y_2 = -\gamma_2 D_2^{-1} y_3 y_1;\tag{3}$$
$$\Delta_\perp y_3 - \Gamma_3 D_3^{-1} y_3 = -\gamma_3 D_3^{-1} y_1 y_2.$$

Это означает, что при любой фазовой расстройке Δ при положительных коэффициентах диффузии D_j существует множество основных мод волноводов и солитонов, отличающихся друг от друга величиной фазовой скорости и видом амплитудного профиля. Коэффициенты диффузии волновых пакетов D_j могут иметь разные знаки. Режим образования солитонов возможен также, если все они отрицательны. При этом в отличие от случая положительных D_j солитоны будут ускоренными.

Заметим, что уравнения (1) допускают одновременное изменение знака двух из комплексных амплитуд v_j. Поэтому при $D_j > 0$, помимо решений с положительными амплитудными профилями $y_j(x)$, которые условно можно назвать синфазными, существуют решения, когда амплитудные профили двух из волн отрицательны (в противофазе к третьей волне). Аналогично при $D_j < 0$, кроме отрицательных решений $y_j(x)$, система (3) имеет решения, когда две из функций положительны. Такие решения могут иметь различную устойчивость по отношению к малым изменениям начальных условий.

1. Существование решений при $m = 0$. Основная идея доказательства состоит в привлечении вариационного принципа и использовалась ранее для доказательства существования решения одного дифференциального уравнения второго порядка [4].

Без ограничения общности будем считать все коэффициенты в системе (3) равными единице. Рассмотрим задачу на минимум функционала

$$J(y)=\int_0^\infty \sum_{j=1}^{3}\left(y_j^2+\dot y_j^2\right)dx=\min, \tag{4}$$

где $y_j(x)$ принадлежат классу функций K, неотрицательных, непрерывных и имеющих кусочно-непрерывную производную на $0\leqslant x<\infty$, удовлетворяющих условиям (2), условию нормировки

$$\int_0^\infty y_1y_2y_3dx=1 \tag{5}$$

и таких, что интеграл (4) существует.

Существование интеграла (5) следует из существования интеграла (4) и элементарного неравенства

$$y_j^2(x)=-2\int_x^\infty y_j\dot y_jd\xi\leqslant\int_0^\infty\left(y_j^2+\dot y_j^2\right)d\xi. \tag{6}$$

Для функций $y_j\in K$ из (5), (6) следует, что $J(y)\geqslant 1$. Тогда существует точная нижняя грань $\lambda=\inf\limits_{y\in K} J(y)\geqslant 1$ и последовательность функций $\{y_j^{(n)}\}\in K$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} J(y^{(n)})=\lambda$. Пусть $J(y^{(n)})\leqslant c^2$. Из (6) следует

$$y_j^{(n)^2}(x)\leqslant c^2,\ n=1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

С другой стороны, для любых x_1 и x_2

$$|y_j^{(n)}(x_2)-y_j^{(n)}(x_1)|^2=\left(\int_{x_1}^{x_2}\dot y_j^{(n)}dx\right)^2\leqslant J(y^{(n)})(x_2-x_1)\leqslant c^2(x_2-x_1).$$

По теореме Арцела из последовательности $\{y_j^{(n)}\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом конечном интервале к непрерывным функциям $y_j(x)$.

Задача теперь состоит в том, чтобы показать, что при выборе подходящих положительных констант β_j функции $\beta_jy_j(x)$ будут решением задачи (2), (3). Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\ddot u_1^{(n)}-u_1^{(n)}+\alpha_1^{(n)}y_3^{(n)}y_2^{(n)}=0;\\
&\ddot u_2^{(n)}-u_2^{(n)}+\alpha_2^{(n)}y_3^{(n)}u_1^{(n)}=0;\\
&\ddot u_3^{(n)}-u_3^{(n)}+\alpha_3^{(n)}u_1^{(n)}u_2^{(n)}=0
\end{aligned} \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\dot u_j(0)=u_j(\infty)=0. \tag{9}$$

Решение задачи (8), (9) имеет вид

$$\begin{aligned}
&u_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}\int_0^\infty G(x,\xi)\,y_3^{(n)}(\xi)\,y_2^{(n)}(\xi)\,d\xi;\\
&u_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}\int_0^\infty G(x,\xi)\,y_3^{(n)}(\xi)\,u_1^{(n)}(\xi)\,d\xi;\\
&u_3^{(n)}=\alpha_3^{(n)}\int_0^\infty G(x,\xi)\,u_1^{(n)}(\xi)\,u_2^{(n)}(\xi)\,d\xi,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $G(x, \xi) = (1/2)(e^{-|x-\xi|} + e^{-(x+\xi)})$ — функция Грина оператора $L(u) = \ddot{u} - u$ для граничных условий (9).

Используя представление (10), можно проверить, что интеграл $J(u^{(n)})$ существует. Выберем константы $\alpha_j^{(n)}$ из условий

$$\int_0^\infty u_1^{(n)} y_2^{(n)} y_3^{(n)} dx = \int_0^\infty u_1^{(n)} u_2^{(n)} y_3^{(n)} dx = \int_0^\infty u_1^{(n)} u_2^{(n)} u_3^{(n)} dx = 1$$

и покажем, что решение задачи (8), (9) уменьшает функционал (4), т. е.

$$J(u^{(n)}) \leqslant J(y^{(n)}).$$

После умножения уравнений (8) на $u_j^{(n)}$, сложения и интегрирования получим

$$J(u^{(n)}) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^{(n)}. \tag{11}$$

С другой стороны, умножение (8) на $y_j^{(n)}$ и интегрирование дает

$$J(u^{(n)}) + J(y^{(n)}) - J(u^{(n)} - y^{(n)}) = 2\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^{(n)}. \tag{12}$$

Из (11), (12) и (6) сразу же вытекают соотношения

$$J(u^{(n)}) \leqslant J(y^{(n)}), \quad u_j^{(n)} \in K;$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} J(u^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} J(y^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^{(n)} = \lambda; \\ &\lim_{n\to\infty} J(u^{(n)} - y^{(n)}) = 0; \\ &\lim_{n\to\infty} |u_j^{(n)}(x) - y_j^{(n)}(x)| = 0, \qquad x \in [0, \infty). \end{aligned} \tag{13}$$

Если воспользоваться равномерной сходимостью последовательности $\{y_j^{(n)}\}$ к непрерывным функциям па любом конечном интервале и представлением (10), то можно проверить существование пределов $\lim_{n\to\infty} \alpha_j^{(n)} = \alpha_j$.

Вернемся к определению функций $u_j^{(n)}$ (10). Разобьем интервал интегрирования на $[0, X]$ и $[X, \infty]$, тогда для $x < X$

$$\left| y_1^{(n)}(x) - \alpha_1^{(n)} \int_0^X G(x, \xi)\, y_3^{(n)}(\xi)\, y_2^{(n)}(\xi)\, d\xi \right| \leqslant |y_1^{(n)} - u_1^{(n)}| + \\ + \alpha_1^{(n)} \int_X^\infty G(x, \xi)\, y_3^{(n)}(\xi)\, y_2^{(n)}(\xi)\, d\xi.$$

Из равномерной сходимости последовательности $\{y_j^{(n)}\}$ на отрезке $[0, X]$ последнего соотношения в (13) и (7) следует, что

$$\left| y_1(x) - \alpha_1 \int_0^X G(x, \xi)\, y_3(\xi)\, y_2(\xi)\, d\xi \right| \leqslant \alpha_1 c^2 \operatorname{ch} x e^{-X}.$$

Устремляя X в бесконечность, получим

$$y_1(x) = \alpha_1 \int_0^\infty G(x, \xi)\, y_3(\xi)\, y_2(\xi)\, d\xi. \tag{14}$$

Аналогичным образом устанавливаются соотношения

(15) $$y_2(x) = \alpha_2 \int\limits_0^\infty G(x, \xi)\, y_3(\xi)\, y_1(\xi)\, d\xi;$$

(16) $$y_3(x) = \alpha_3 \int\limits_0^\infty G(x, \xi)\, y_1(\xi)\, y_2(\xi)\, d\xi.$$

По своему построению $y_j^{(n)}(x) > 0$ в $[0, \infty)$, $\alpha_j > 0$, $y_j(x) \geqslant 0$ в $[0, \infty)$. Предельные функции удовлетворяют условиям (2) и в силу (5) не могут быть тождественно равными нулю. Правые части в (14) — (16) могут быть дважды продифференцированы по x, в результате функции $\widetilde{y}_j = (\sqrt{\alpha_1\alpha_2\alpha_3/\alpha_j})\, y_j$ будут удовлетворять уравнениям (3) с единичными коэффициентами и граничным условиям (2).

2. Существование решений при $m = 1$. По аналогии с п. 1 ставится задача на минимум функционала

$$J(y) = \int\limits_0^\infty \sum_{j=1}^{3} (y_j^2 + \dot{y}_j^2)\, x dx = \min$$

с условием нормировки

$$\int\limits_0^\infty y_1 y_2 y_3 x dx = 1$$

в том же классе функций, что и для плоского случая. Но теперь минимизирующая последовательность $\{y_j^{(n)}\}$ может сходиться и неравномерно на любом конечном интервале. Однако всегда можно построить такую минимизирующую последовательность $\{u_j^{(n)}\}$, которая сходится равномерно на любом отрезке $[0, X]$. Для доказательства этого достаточно показать, что интеграл

(17) $$J(u^{(n)}) = \int\limits_0^\infty \sum_{j=1}^{3} \left(u_j^{(n)2} + \dot{u}_j^{(n)2}\right) dx$$

равномерно ограничен. Возьмем в качестве функций $u_j^{(n)}$ решение системы

(18) $$\ddot{u}_1^{(n)} + \frac{1}{x}\,\dot{u}_1^{(n)} - u_1^{(n)} + \alpha_1^{(n)} y_3^{(n)} y_2^{(n)} = 0;$$

$$\ddot{u}_2^{(n)} + \frac{1}{x}\,\dot{u}_2^{(n)} - u_2^{(n)} + \alpha_2^{(n)} y_3^{(n)} u_1^{(n)} = 0;$$

$$\ddot{u}_3^{(n)} + \frac{1}{x}\,\dot{u}_3^{(n)} - u_3^{(n)} + \alpha_3^{(n)} u_1^{(n)} u_2^{(n)} = 0$$

с граничными условиями (9). Тогда справедливо представление (10), где функция Грина оператора $L(u) = \ddot{u} + (1/x)\dot{u} - u$, $\dot{u}(0) = u(\infty) = 0$ имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi I_0(\xi)\, K_0(x), & 0 \leqslant \xi \leqslant x < \infty, \\ \xi K_0(\xi)\, I_0(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi < \infty. \end{cases}$$

Оказывается, что $y_j^{(n)} \in L_2[0, \infty)$. Действительно,

(19) $$\int\limits_0^\infty y_j^{(n)2} dx = -\int\limits_0^\infty \left(\dot{y}_j^{(n)2}\right) x dx = -2\int\limits_0^\infty y_j^{(n)} \dot{y}_j^{(n)} x dx \leqslant c^2.$$

Используя неравенство (19) и представление решения системы (18) в виде (10), убедимся в равномерной ограниченности интеграла (17). Тогда в качестве исходной минимизирующей последовательности можно взять равномерно сходящуюся последовательность $\{u_j^{(n)}\}$. Дальнейший ход доказательства совпадает с проведенным для плоского случая.

Поступила 12 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.** О взаимофокусировке мощных световых пучков в средах с квадратичной нелинейностью.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 3, с. 835—847.
2. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.** О самозахвате световых пучков в параметрически связанные волноводы.— «Письма в ЖТФ», 1975, т. 1, вып. 16, с. 737—741.
3. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.** Нелинейное взаимодействие дифрагирующих световых пучков в среде с квадратичной нелинейностью.— «Письма в ЖЭТФ», 1974, т. 20, вып. 11, с. 734—739.
4. **Nehary Z.** Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations.— «Acta Math.», 1961, vol. 10 S, p. 141.

УДК 533.932

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ДИФФУЗИИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. И. Литвинов

(*Москва*)

В элементарной кинетической теории газов и незамагниченной плазмы [1—3] двумя фундаментальными величинами являются длина свободного пробега частиц $\lambda = v\tau$ и плотность их хаотического потока $J_0 = nv/4$. С помощью этих параметров определяются все коэффициенты переноса и соответствующие им макроскопические потоки частиц, вязкого импульса и тепла [3]. Обе величины играют важную роль также и в теории пристеночных слоев (λ-слой Кнудсена [4]), в которых макроскопические уравнения теряют смысл. Сшивание потоков для внутренней и внешней плазмы с использованием этих параметров дает фиктивные граничные условия у стенки для упомянутых уравнений, решение которых вне λ-слоя совпадает с истинным решением. В частности, граничные условия при простой диффузии частиц на поглощающую стенку определяются приближенно [5—7] из условия равенства диффузионного J_D и хаотического J_0 потоков частиц на границе слоя

(1) $$n_{\text{г}} = 2n_w = -2\lambda_D \nabla n, \ \lambda_D = (2/3)\lambda,$$

где n_w — плотность частиц на стенке.

Обоснование достаточной точности (1) путем прямого решения кинетического уравнения Больцмана во всей области перехода приводится в [7].

При наличии магнитного поля выражения для макроскопических потоков выводятся обычно формальным путем [3, 8], причем необходимые