

ВЕРТИКАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

УДК 532.59

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

При движении тела в невязкой неоднородной по плотности жидкости влияние стратификации на возникающие гидродинамические нагрузки проявляется через переменные гидростатические силы, добавочные силы, обусловленные энергетическими затратами на возбуждение внутренних гравитационных волн, и через мгновенный отклик жидкости на внешнее воздействие, т. е. реакцию невесомой жидкости. Большинство теоретических результатов о движении тела в несжимаемой стратифицированной жидкости получено в рамках линейной теории волн. Наиболее изученными являются горизонтальное движение погруженного тела с постоянной скоростью, когда данная задача рассматривается как стационарная, и малые установившиеся колебания тела как при отсутствии, так и при наличии равномерного горизонтального хода. При движении тела по наклонной траектории в жидкости с переменным градиентом плотности необходимо решать нестационарную задачу. В настоящее время имеется ряд исследований в этом направлении, посвященных в основном вертикальному движению тела через границу раздела двух сред и особенно частному случаю этой задачи — движению тела к свободной поверхности однородной жидкости (см. [1–8]). В ряде работ процесс генерации локализованных вблизи границы раздела внутренних волн называется переходным излучением.

Трудности точного решения задачи обтекания зачастую обходятся с помощью приближенного моделирования тела совокупностью массовых источников и стоков, заимствованной из теории однородной безграничной жидкости.

В данной работе рассматривается равномерное вертикальное движение тонкого тела вращения в безграничной жидкости с распределением плотности в виде пикноклина. Резкий пикноклин моделируется двухслойной жидкостью, плавный — трехслойной жидкостью с экспоненциально стратифицированным средним слоем и однородными верхним и нижним слоями. Тело начинает движение с постоянной скоростью далеко от пикноклина и, пересекая его, удаляется вверх на большое расстояние. Задача решена как с учетом приближения Буссинеска, так и без него. В последнем случае определена также нагрузка, возникающая при движении тела в невесомой жидкости. Исследовано влияние на подъемную силу формы тела и скорости его движения, а также толщины пикноклина и перепада плотности в нем.

1. Поле точечного источника. Система линейных уравнений, описывающая малые движения первоначально покоящейся безграничной несжимаемой невязкой стратифицированной жидкости, находящейся в однородном поле силы тяжести, при наличии массового источника с плотностью $\rho_0 Q(\mathbf{x}, t)$ в системе декартовых координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ с осью z , направленной вертикально вверх, имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p + \mathbf{F} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho'_0(z)w = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = Q(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)$, p , ρ — возмущения вектора скорости, давления и плотности; $\rho_0(z)$ — плотность жидкости в невозмущенном состоянии; $\mathbf{F} = (0, 0, g\rho)$ — вектор плотности массовых сил; g — ускорение силы тяжести; штрих означает дифференцирование по z ; t — время. Граничные и начальные условия таковы: $\mathbf{u}, p \rightarrow 0$ ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$), $\mathbf{u} = \rho = 0$ ($t = 0$).

Для произвольно движущегося точечного источника $Q(\mathbf{x}, t) = q(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{Y}(t))$ ($q(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$), δ — дельта-функция Дирака, $\mathbf{Y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, $\mathbf{x} = \mathbf{Y}(t)$ — траектория движения источника.

Систему уравнений (1.1) можно свести к одному уравнению для вертикальной компоненты скорости $w(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho_0 \Delta_2 w \right] + \rho_0 N^2 \Delta_2 w = \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} (\rho_0 Q). \quad (1.2)$$

Здесь $N(z) = \sqrt{-g\rho'_0/\rho_0}$ — частота плавучести; $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — горизонтальный оператор Лапласа. Все остальные величины могут быть выражены через w с помощью вытекающих из (1.1) соотношений, в частности, давление, вычисленное без учета гидростатических сил, запишем как

$$p = \rho_0 \Delta_2^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - Q \right). \quad (1.3)$$

Для определения искомых величин выполним преобразования Фурье по горизонтальным переменным x, y и времени t :

$$w_*(\mu, \nu, z, \omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty e^{-i\mu x} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-i\nu y} w(\mathbf{x}, t) dy.$$

Тогда для фурье-образа вертикальной скорости w_* получим уравнение

$$(\rho_0 w'_*)' - \rho_0 k^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) w_* = (\rho_0 Q'_*)', \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2, \quad (1.4)$$

решение которого найдем через функцию Грина $G(k, z, \xi, \omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$(\rho_0 G')' - \rho_0 k^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) G = \delta(z - \xi) \quad (1.5)$$

и граничным условиям $G \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$). Следуя [6], функцию G можно представить в виде суммы двух членов: $G(k, z, \xi, \omega) = G_0(k, z, \xi) + G_1(k, z, \xi, \omega)$, где $G_0(k, z, \xi) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(k, z, \xi, \omega)$ не зависит от ω и является решением уравнения

$$(\rho_0 G'_0)' - \rho_0 k^2 G_0 = \delta(z - \xi), \quad G_0 \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty). \quad (1.6)$$

Функция G_0 определяет мгновенную часть отклика системы на внешнее воздействие и описывает часть поля возмущения, увлекаемого движущимся источником и соответствующего невесомой жидкости, т. е. нулевому вектору плотности массовых сил \mathbf{F} в (1.1). Оставшаяся часть $G_1(k, z, \xi, \omega)$ представляет собой запаздывающий отклик и описывает внутренние волны, локализованные вблизи горизонтов изменения плотности. Функция G_1 — исчезающее при $|z| \rightarrow \infty$ решение неоднородного уравнения

$$(\rho_0 G'_1)' - \rho_0 k^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) G_1 = -\frac{k^2}{\omega^2} \rho_0 N^2 G_0. \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) может быть представлено в виде разложения по собственным функциям следующей задачи на собственные значения:

$$(\rho_0 W'_n)' - \rho_0 k^2 (1 - N^2/\omega^2) W_n = 0, \quad W_n \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty). \quad (1.8)$$

Спектральные свойства этой задачи хорошо изучены (см., например, [9]). Спектр $\omega_n^2(k)$ будет положительным и дискретным при устойчивой стратификации $N(z) \geq 0$ во

всем диапазоне глубин и отличии $N(z)$ от нуля только на ограниченном интервале. Собственные функции $W_n(z)$ ортогональны и нормированы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(z) N^2(z) W_n^2(z) dz = 1. \quad (1.9)$$

В результате для G_1 получим

$$G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\xi) W_n(z).$$

Здесь

$$F_n(\xi) = -\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - (\omega + i\lambda)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\eta) N^2(\eta) G_0(\eta, \xi) W_n(\eta) d\eta;$$

λ — малая положительная постоянная.

Зная функцию Грина, можно определить фурье-образы вертикальной скорости w_* и давления p_* , учитывая (1.3):

$$w_* = -\int_0^{\infty} q(\tau) \exp[i\omega\tau - i(\mu y_1(\tau) + \nu y_2(\tau))] \left[\rho_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial \xi} \right]_{\xi=y_3(\tau)} d\tau,$$

$$p_* = -\frac{i\omega}{k^2} \rho_0(z) \int_0^{\infty} q(\tau) \exp[i\omega\tau - i(\mu y_1(\tau) + \nu y_2(\tau))] \left[\rho_0(\xi) \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \xi} + \delta(z - \xi) \right]_{\xi=y_3(\tau)} d\tau.$$

Разбиению функции Грина на две части соответствует следующее представление для фурье-образа давления: $p_* = p_*^0 + p_*^1$, при этом первое слагаемое p_*^0 описывает возмущение давления в невесомой жидкости и исчезает при выключении источника:

$$p_*^0 = -\frac{i\omega}{k^2} \rho_0(z) \int_0^{\infty} q(\tau) \exp[i\omega\tau - i(\mu y_1(\tau) + \nu y_2(\tau))] M(z, y_3(\tau)) d\tau \quad (1.10)$$

$$\left(M(z, \xi) = \rho_0(\xi) \frac{\partial^2 G_0}{\partial z \partial \xi} + \delta(z - \xi) \right),$$

а второе слагаемое представляет волновую часть возмущения давления и не исчезает при выключении источника:

$$p_*^1 = -\frac{i\omega}{k^2} \rho_0(z) \int_0^{\infty} q(\tau) \exp[i\omega\tau - i(\mu y_1(\tau) + \nu y_2(\tau))] \left[\rho_0(\xi) \frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial \xi} \right]_{\xi=y_3(\tau)} d\tau.$$

После выполнения обратных преобразований Фурье

$$p = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu y} p_* d\nu$$

имеем $p = p_0 + p_1$, где

$$p_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(z)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[q(t) \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_0(kr(t)) M(z, y_3(t)) \right],$$

$$p_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho_0(z)}{2\pi} \int_0^t q(\tau) \rho_0(y_3(\tau)) d\tau \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_0(kr(\tau)) \times \quad (1.11)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \cos \omega_n(t - \tau) W_n'(z) \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\eta) N^2(\eta) \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=y_3(\tau)} W_n(\eta) d\eta;$$

$r(\zeta) = [(x - y_1(\zeta))^2 + (y - y_2(\zeta))^2]^{1/2}$; J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Некоторые упрощения этого решения можно получить для слабо стратифицированной жидкости введением приближения Буссинеска. При этом приближении в уравнениях сохранения импульса (1.1) отличие плотности от постоянного значения $\rho_s = \rho_0(0)$ учитывается только в члене, описывающем плавучесть, в инерционных же членах действительная плотность заменяется ρ_s .

В приближении Буссинеска уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + N^2 \Delta_2 w = \frac{\partial^3 Q}{\partial t^2 \partial z},$$

где частота плавучести $N = \sqrt{-g\rho'_0/\rho_s}$; Δ — трехмерный оператор Лапласа. В соотношении (1.3) $\rho_0(z)$ следует заменить на ρ_s . Аналогичные изменения должны быть выполнены и в соотношениях (1.4)–(1.9). При этом уравнение (1.6) имеет простое решение, соответствующее однородной жидкости: $G_0 = -e^{-k|z-\xi|}/(2\rho_s k)$. После интегрирования в (1.11) получим хорошо известный для безграничной однородной жидкости результат:

$$p_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_s}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q(t)}{r_1} \right) \quad (r_1^2 = r^2(t) + (z - y_3(t))^2).$$

Наиболее простой пример стратифицированной жидкости — двухслойная жидкость, состоящая из слоев разной плотности. В более общем случае резкий скачок плотности между слоями можно заменить слоем непрерывного изменения плотности (трехслойная жидкость). Далее используем полученные решения для этих моделей стратификации жидкости.

2. Двухслойная жидкость. В невозмущенном состоянии верхний слой плотности ρ_1 занимает область $z > 0$, а нижний слой плотности $\rho_2 = (1 + \varepsilon)\rho_1$ ($\varepsilon > 0$) — область $z < 0$. Частным случаем такой жидкости при $\varepsilon \rightarrow \infty$ является полубезграничная однородная жидкость со свободной поверхностью.

Используя результаты [6], кратко изложим решение задачи в этом случае. Плотность жидкости в невозмущенном состоянии удобно записать в виде $\rho_0(z) = \rho_s(1 - \gamma \operatorname{sgn} z)$, где $\rho_s = \rho_1(2 + \varepsilon)/2$, $\gamma = \varepsilon/(2 + \varepsilon)$. Решение уравнения (1.6) имеет вид

$$G_0(k, z, \xi) = -\frac{1}{2k\rho_0(\xi)} \left[e^{-k|z-\xi|} - \gamma \operatorname{sgn} \xi e^{-k(|z|+|\xi|)} \right].$$

Задача на собственные значения (1.8) обладает единственным решением, так как в такой жидкости существует лишь одна волновая мода $W_1 = e^{-k|z|}/\sqrt{2\bar{g}\rho_s}$, $\omega_1 = \sqrt{\bar{g}k}$, $\bar{g} = \gamma g$, и, следовательно, решения для p_0 и p_1 в (1.11) запишем как

$$p_0 = \frac{\rho_0(z)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[q(t) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\gamma \operatorname{sgn} z}{r_2} \right) \right],$$

$$p_1 = \frac{\bar{g}\rho_0(z)}{4\pi} \operatorname{sgn} z \int_0^i q(\tau) [\operatorname{sgn}(y_3(\tau)) - \gamma] d\tau \int_0^\infty k J_0(kr) e^{-k(|z|+|y_3(\tau)|)} \cos \omega_1(t - \tau) dk \quad (2.1)$$

$$(r_2^2 = r^2 + (|z| + |y_3(t)|)^2).$$

В [10] определены потенциалы скоростей в каждом слое при нестационарном движении источника в двухслойной жидкости. Вычисленное на их основе давление совпадает с приведенным в (2.1).

3. Трехслойная жидкость. В невозмущенном состоянии непрерывное распределение плотности с постоянными значениями ρ_1 в верхнем слое $z > H$, ρ_2 в нижнем слое $z < -H$ и экспоненциальным изменением в среднем слое толщины $2H$ примет вид

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_1 = \rho_s e^{-\alpha H} & (z > H), \\ \rho_s e^{-\alpha z} & (|z| < H), \\ \rho_2 = \rho_s e^{\alpha H} & (z < -H). \end{cases} \quad (3.1)$$

Частота плавучести отлична от нуля только в среднем слое, где она имеет постоянное значение $N = \sqrt{\alpha g}$. Для удобства сравнения с результатами для двухслойной жидкости укажем соотношение $\alpha = \ln(1 + \varepsilon)/2H$.

В этом случае уравнение (1.6) имеет постоянные коэффициенты, и его решение удобно записать как

$$G_0 = \begin{cases} -w_1(z)w_2(\xi)/D & (z > \xi), \\ -w_1(\xi)w_2(z)/D & (z < \xi), \end{cases}$$

где $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — два линейно независимых решения:

$$(w_1, w_2) = \begin{cases} e^{-kz}, & e^{2\alpha H}(b_2 e^{kz} - b_1 e^{-kz}) & (z > H), \\ a_1 e^{\gamma_1 z} + a_2 e^{\gamma_2 z}, & c_1 e^{\gamma_1 z} + c_2 e^{\gamma_2 z} & (|z| < H), \\ b_1 e^{kz} + b_2 e^{-kz}, & e^{kz} & (z < -H). \end{cases}$$

Здесь $a_1 = -(k + \gamma_2)e^{-H(\gamma_1+k)}/2\mu$; $a_2 = (\gamma_1 + k)e^{-H(\gamma_2+k)}/2\mu$; $b_1 = \alpha(e^{-2H\gamma_2} - e^{-2H\gamma_1})/4\mu$; $b_2 = e^{-2Hk}[(k + \mu)e^{-2H\gamma_2} + (\mu - k)e^{-2H\gamma_1}]/2\mu$; $c_1 = (k - \gamma_2)e^{H(\gamma_1-k)}/2\mu$; $c_2 = (\gamma_1 - k) \times e^{H(\gamma_2-k)}/2\mu$; $\gamma_1 = \alpha/2 + \mu$; $\gamma_2 = \alpha/2 - \mu$; $\mu = \sqrt{k^2 + \alpha^2}/4$.

Вронскиан $D = \rho_0(\xi)[w_1(\xi)w_2'(\xi) - w_1'(\xi)w_2(\xi)]$ не зависит от ξ :

$$D = \rho_s k e^{2H(\mu-k)}[\mu + k + (\mu - k)e^{-4\mu H}]/\mu.$$

Функция $M(z, \xi)$ в (1.10) имеет девять различных представлений в зависимости от того, в каком слое находятся переменные z, ξ :

для $z > H$

$$M(z, \xi) = \frac{1}{2b_2} \begin{cases} k[b_1 e^{-k(z+\xi)} + b_2 e^{-k|z-\xi|}] & (\xi > H), \\ e^{-(kz+\alpha H)}(c_1 \gamma_1 e^{-\gamma_2 \xi} + c_2 \gamma_2 e^{-\gamma_1 \xi}) & (|\xi| < H), \\ k e^{k(\xi-z)} & (\xi < -H), \end{cases}$$

для $|z| < H$

$$M(z, \xi) = \frac{1}{2b_2} \begin{cases} e^{-(k\xi+2\alpha H)}(c_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 z} + c_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 z}) & (\xi > H), \\ -(e^{-\alpha H}/k)[a_1 c_1 \gamma_1^2 e^{\gamma_1 z - \gamma_2 \xi} + a_2 c_2 \gamma_2^2 e^{\gamma_2 z - \gamma_1 \xi} - \\ \quad - k^2(a_2 c_1 e^{\alpha(z-\xi)/2 - \mu|z-\xi|} + a_1 c_2 e^{\alpha(z-\xi)/2 + \mu|z-\xi|})] & (|\xi| < H), \\ -e^{k\xi}(a_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 z} + a_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 z}) & (\xi < -H), \end{cases}$$

для $z < -H$

$$M(z, \xi) = \frac{1}{2b_2} \begin{cases} ke^{k(z-\xi)-2\alpha H} & (\xi > H), \\ -e^{kz-\alpha H}(a_1\gamma_1 e^{-\gamma_2\xi} + a_2\gamma_2 e^{-\gamma_1\xi}) & (|\xi| < H), \\ \frac{a_1\gamma_1}{\nu_1\nu_2} e^{-k|z-\xi|} - b_1 e^{k(z+\xi)} & (\xi < -H). \end{cases}$$

Решение задачи на собственные значения (1.8) для данной стратификации подробно изложено в [9, 11]. Приведем кратко основные результаты. Счетная система собственных функций $W_n(z)$ имеет вид

$$W_n = \Lambda^{-1/2} \begin{cases} e^{-kz} & (z > H), \\ e^{\alpha z/2}(A \sin \mu_1 z + B \cos \mu_1 z) & (|z| < H), \\ Ce^{kz} & (z < -H), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$A = \frac{e^{-kH}}{2\mu_1 \cos \mu_1 H} \left[C\sigma \left(k - \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{\sigma} \left(k + \frac{\alpha}{2} \right) \right]; \quad B = \frac{e^{-kH}}{2 \cos \mu_1 H} \left(C\sigma + \frac{1}{\sigma} \right);$$

$$C = \sigma^{-2} \begin{cases} (k + \alpha/2 + \mu_1 \operatorname{ctg} \mu_1 H) / (k - \alpha/2 + \mu_1 \operatorname{ctg} \mu_1 H) & (n - \text{нечетные}), \\ (k + \alpha/2 - \mu_1 \operatorname{tg} \mu_1 H) / (\alpha/2 - k + \mu_1 \operatorname{tg} \mu_1 H) & (n - \text{четные}); \end{cases}$$

$\sigma = e^{\alpha H/2}$; $\mu_1 = \sqrt{k^2(N^2/\omega^2 - 1) - \alpha^2/4}$; нормировочный коэффициент

$$\Lambda = \rho_s N^2 \left[(A^2 + B^2)H + \frac{B^2 - A^2}{2\mu_1} \sin 2\mu_1 H \right].$$

Дисперсионные соотношения $\omega_n(k)$ определяются из решения уравнения

$$\operatorname{tg} 2\mu_1 H = 2\mu_1 \omega^2 / [k(N^2 - 2\omega^2)]. \quad (3.3)$$

Очевидно, что одним из его решений является решение $\mu_1 = 0$, соответствующее $\omega_0/N = 2k/\sqrt{4k^2 + \alpha^2}$ и названное в [11] «нулевой модой». Оно возможно только при одном специальном значении k и не дает вклада в искомое решение. При $\omega < \omega_0$ значение μ_1 становится мнимым, и уравнение (3.3) имеет единственное решение, которое описывает начальный участок дисперсионной зависимости первой моды при не слишком больших k . При $\omega > \omega_0$ продолжение этой зависимости определяется вещественными значениями μ_1 .

Из (3.3) оценим поведение дисперсионных зависимостей в предельном случае малых k :

$$\omega_1 \approx \beta_1 \sqrt{k}, \quad \omega_n \approx \beta_n k \quad (k \rightarrow 0) \quad (3.4)$$

$$\left(\beta_1 = N \sqrt{\frac{\operatorname{th} \alpha H}{\alpha}}, \quad \beta_n = \frac{2NH}{\sqrt{\alpha^2 H^2 + \pi^2(n-1)^2}} \quad (n \geq 2) \right).$$

При исследовании данной задачи в приближении Буссинеска экспоненциальное распределение плотности в среднем слое невозмущенного состояния жидкости (3.1) заменим на близкое к нему в слабо стратифицированной жидкости линейное распределение:

$$\rho_0(z) = \rho_s \begin{cases} 2/(2 + \varepsilon) & (z > H), \\ 1 - \gamma z/H & (|z| < H), \\ 2(1 + \varepsilon)/(2 + \varepsilon) & (z < -H). \end{cases}$$

В этом случае частота плавучести также постоянная в среднем слое ($N = \sqrt{g/H}$). Выражения для собственных функций и дисперсионное уравнение можно получить из (3.2),

(3.3), положив $\alpha = 0$. Отметим, что в приближении Буссинеска из дисперсионного уравнения можно определить явную зависимость волнового числа от частоты:

$$k_n(\omega) = \frac{1}{2H} \begin{cases} \frac{\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2}} \left[(n-1)\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega\sqrt{N^2 - \omega^2}}{N^2 - 2\omega^2} \right) \right] & (\omega < N/\sqrt{2}), \\ \pi(n-1/2) & (\omega = N/\sqrt{2}), \\ \frac{\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2}} \left[n\pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{2\omega\sqrt{N^2 - \omega^2}}{N^2 - 2\omega^2} \right) \right] & (\omega > N/\sqrt{2}). \end{cases}$$

4. Тонкое тело вращения. Далее ограничимся случаем равномерного вертикального движения источника постоянной интенсивности со скоростью U . Удобно провести сдвиг по времени и за нулевой момент времени принять момент пересечения источником начала координат. Тогда траекторию его движения запишем в виде $y_1(t) = y_2(t) = 0$, $y_3 = Ut$, $r^2 = x^2 + y^2$ и течение жидкости становится осесимметричным.

Как известно, движение тонкого тела вращения вдоль своей оси в безграничной однородной жидкости можно моделировать движением системы точечных особенностей, непрерывно расположенных на оси тела (см., например, [2]). Пусть в подвижной системе координат $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z - Ut$ уравнение поверхности тела имеет вид $r = f(z_1)$. Функция $f(z_1)$ предполагается четной и ограничена вместе с первой производной всюду, за исключением малых окрестностей концевых точек, где первая производная может иметь особенности. Обозначим через a и b соответственно полуширину и полудлину тела, для тонкого тела $a/b \ll 1$.

Эквивалентная этому телу система точечных особенностей имеет следующее распределение по оси z_1 на отрезке $|z_1| \leq b$: $q(z_1, t) = -2\pi U f(z_1) f'(z_1) = -U S'(z_1)$ ($S = \pi f^2$ — площадь поперечного сечения тела).

Очевидно, что в стратифицированной жидкости такое приближение моделирует тело, меняющее свою форму во времени. Однако предполагается, что при слабой стратификации эти изменения малы.

Суммарное давление P в жидкости, вызванное движением этой системы особенностей, представим как

$$P(r, z, t) = \int_{-b}^b q(s, t) p(r, z, t, s) ds,$$

при этом в выражениях (1.11) для p следует положить $q(\zeta) = 1$, $y_1 = y_2 = 0$, $y_3(\zeta) = s + U\zeta$.

Вертикальная сила R , действующая на тонкое тело, определяется после интегрирования давления по поверхности следующим образом:

$$R(t) = \int_{-b}^b P(f(\eta), \eta + Ut, t) S'(\eta) d\eta.$$

Без введения приближения Буссинеска вертикальная сила представляет собой сумму двух слагаемых: $R = R_0 + R_1$, первое из которых соответствует движению тела в невесомой жидкости, а второе описывает волновое воздействие.

В приближении Буссинеска вертикальная сила определяется только волновой составляющей давления поля точечного источника p_1 , так как в идеальной безграничной однородной жидкости сопротивление поступательно движущегося тела равно нулю (парадокс Даламбера).

Окончательные выражения для вертикальной силы, действующей на тонкое тело при

его движения в двухслойной жидкости, имеют вид

$$R_0 = -\frac{\bar{U}^2}{4\pi} \left\{ \int_{-b}^b \rho_0(\eta + Ut) S'(\eta) d\eta \int_{-b}^b \frac{(\eta - \zeta) S'(\zeta) d\zeta}{[f^2(\eta) + (\eta - \zeta)^2]^{3/2}} - \gamma \int_{-b}^b \rho(\eta + Ut) \operatorname{sgn}(\eta + Ut) S'(\eta) d\eta \times \right. \\ \left. \times \int_{-b}^b \frac{(|\eta + Ut| + |\zeta + Ut|)}{[f^2(\eta) + (|\eta + Ut| + |\zeta + Ut|)^2]^{3/2}} \operatorname{sgn}(\zeta + Ut) S'(\zeta) d\zeta \right\}; \quad (4.1)$$

$$R_1 = -\frac{\bar{g}U}{4\pi} \int_{-b}^b \rho_0(Ut + \eta) \operatorname{sgn}(\eta + Ut) S'(\eta) d\eta \int_{-b}^b S'(\zeta) d\zeta \times \\ \times \int_{-\infty}^t [\operatorname{sgn}(\zeta + U\tau) - \gamma] d\tau \int_0^{\infty} k J_0(kf(\eta)) e^{-k(|\eta + Ut| + |\zeta + U\tau|)} \cos \omega_1(t - \tau) dk. \quad (4.2)$$

В трехслойной жидкости без приближения Буссинеска

$$R_0 = -\frac{U^2}{2\pi} \int_{-b}^b \rho_0(\eta + Ut) S'(\eta) d\eta \int_{-b}^b S'(\zeta) d\zeta \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_0(kf(\eta)) M_1(\eta + Ut, \zeta + Ut) dk. \quad (4.3)$$

$$R_1 = \frac{UN^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-b}^b \rho_0(\eta + Ut) S'(\eta) d\eta \int_{-b}^b S'(\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^t \rho_0(\zeta + U\tau) d\tau \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_0(kf(\eta)) \omega_n^2 \Phi_n(\zeta + U\tau) W_n'(\eta + Ut) \cos \omega_n(t - \tau) \quad (4.4)$$

$$\left(M_1(z, \xi) = \frac{\partial M(z, \xi)}{\partial \xi}, \quad \Phi_n(\xi) = \int_{-H}^H \rho_0(s) \frac{\partial G_0(s, \xi)}{\partial \xi} W_n(s) ds \right).$$

В приближении Буссинеска выражение (4.4) для волновой составляющей вертикальной силы несколько упрощается:

$$R_1 = -\frac{\rho_s^2 UN^2}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-b}^b S'(\eta) d\eta \int_{-b}^b S'(\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^t d\tau \int_0^{\infty} \frac{J_0(kf(\eta))}{k} \omega_n^2 \Psi_n(\zeta + U\tau) W_n'(\eta + Ut) \times \\ \times \cos \omega_n(t - \tau) dk \quad \left(\Psi_n(\xi) = \int_{-H}^H e^{-k|s-\xi|} \operatorname{sgn}(s - \xi) W_n(s) ds \right). \quad (4.5)$$

Отметим, что в [12] с использованием приближения Буссинеска была определена мощность излучения внутренних гравитационных волн заданным точечным источником массы. На основе этих результатов можно также вычислить вертикальную реакцию жидкости, вызванную распределенным источником, и для рассматриваемой задачи получим

$$R_1 = -\frac{\rho_s^2 U}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-b}^b S'(\eta) d\eta \int_{-b}^b S'(\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^t d\tau \int_0^{\infty} \frac{\omega_n^4}{k^3} W_n'(\zeta + U\tau) W_n'(\eta + Ut) \cos \omega_n(t - \tau) dk. \quad (4.6)$$

Для тонкого тела в (4.4), (4.5) функцию Бесселя можно приближенно считать равной 1.

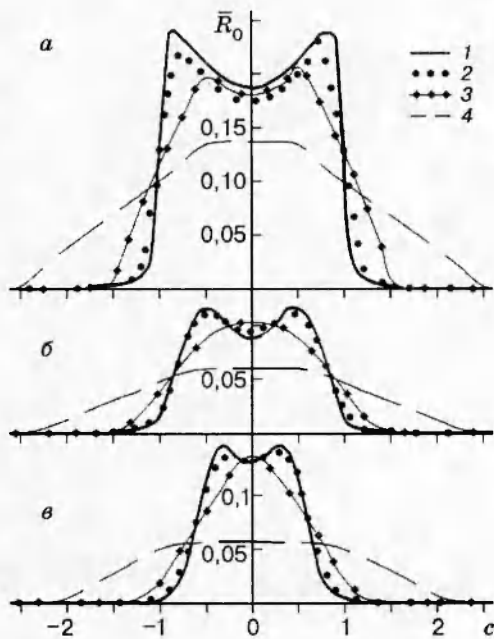


Рис. 1

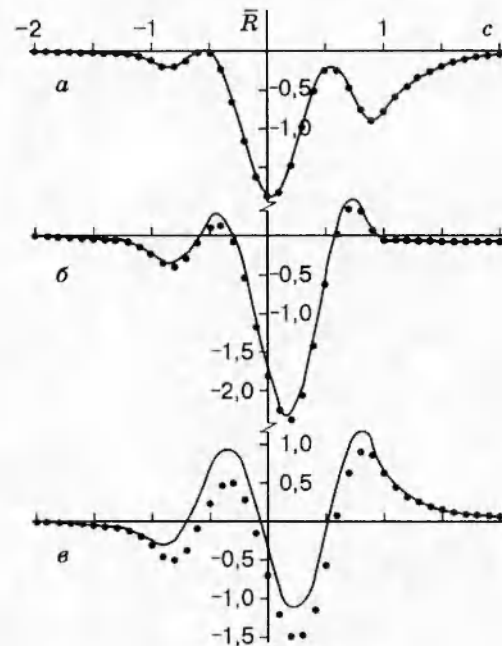


Рис. 2

В этом приближении выполнены все численные расчеты, представленные ниже. Нетрудно показать, что тогда для исследуемой стратификации жидкости выражения (4.5) и (4.6) тождественно равны.

5. Численные результаты. Для конкретных расчетов выбраны тела трех форм с различной степенью заостренности в концевых точках

$$f(z_1) = a \begin{cases} \sqrt{1 - z_1^2/b^2} & \text{(B1),} \\ \cos(\pi z_1/2b) & \text{(B2),} \\ (1 + \cos(\pi z_1/b))/2 & \text{(B3).} \end{cases} \quad (5.1)$$

Сфероид B1 является тупым телом, тело B2 имеет острый угол при вершине, а тело B3 — нулевой. Объемы этих тел при постоянных значениях a и b относятся как $1 : 3/4 : 9/16$. Во всех приведенных расчетах полагалось $a/b = 0,1$.

Выбор формы тела в виде (5.1) наряду с простыми моделями распределения плотности позволил выполнить аналитически некоторые интегрирования в (4.2), (4.4), (4.5) и свести эти выражения к двукратным интегралам: в (4.2) по η и k , в (4.4), (4.5) по k и τ .

На рис. 1, а–в представлена вертикальная сила $\bar{R}_0 = R_0 b^2 / (\rho_s a^4 U^2)$ в зависимости от $c = Ut/b$ соответственно для тел B1, B2, B3, возникающая в невесомой двух- и трехслойной жидкости при $\epsilon = 0,03$ и вычисленная в результате интегрирования (4.1), (4.3). Кривые 1 отвечают двухслойной жидкости, кривые 2–4 — трехслойной жидкости для толщин среднего слоя $H/b = 0,2; 0,5; 1,5$. Как отмечено в [5], при исследовании движения тела к свободной поверхности однородной жидкости вертикальная сила в невесомой жидкости всегда направлена вверх. Точное использование (4.1) для тупого тела B1 приводит к бесконечному значению R_0 при $|Ut/b| = 1$ (см., например, [5]). Для устранения этой особенности в приведенных расчетах для тела B1 массовые источники были распределены не по всему отрезку $|z_1| \leq b$, а только между фокусами эллипса $|z_1| \leq \sqrt{b^2 - a^2}$ по аналогии с известным решением о моделировании осевого обтекания сфероида системой распределенных диполей [13]. Видно, что для тонкого стратифицированного слоя поведе-

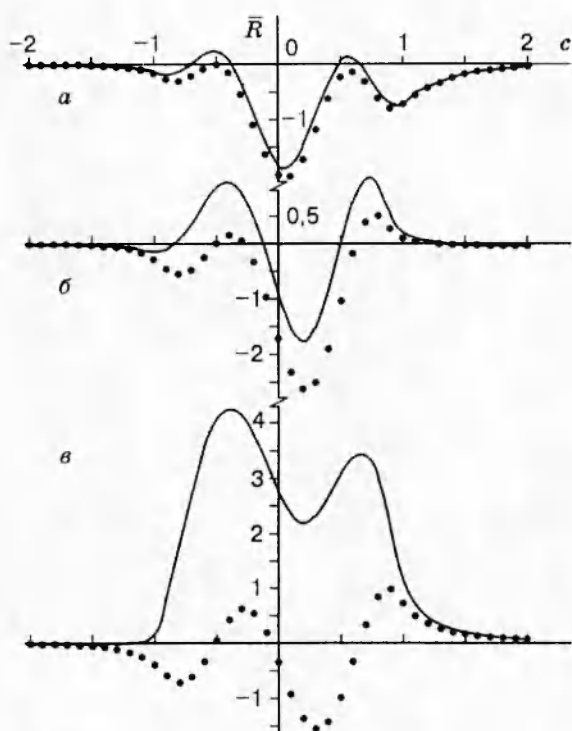


Рис. 3

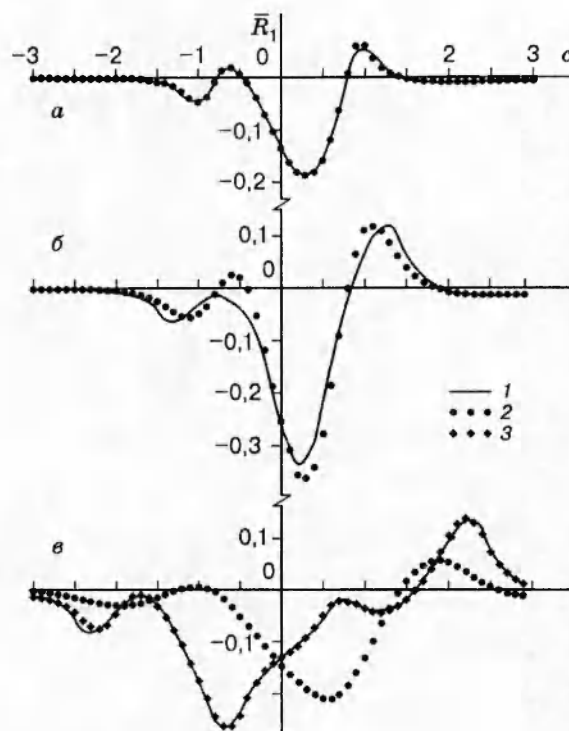


Рис. 4

ние вертикальной силы близко к случаю двухслойной жидкости. С увеличением толщины пикноклина максимальное значение вертикальной силы падает.

Сопоставление полной вертикальной силы $\bar{R} = Rb/(\rho_s \bar{g} a^4)$, определенной из (4.1), (4.2), с той, которая возникает в невесомой жидкости для тела В2, показано на рис. 2, 3 соответственно при $\epsilon = 0,03; 0,3$. Рис. 2, а-в и 3, а-в даны для чисел Фруда $Fr = U/\sqrt{\bar{g}b} = 0,5; 1; 2$. Сплошными линиями на рис. 2, 3 показана полная сила \bar{R} , пунктирными — аналогичный безразмерный комплекс для волновой составляющей вертикальной силы. В [2] определена полная работа, затрачиваемая на генерацию волн при вертикальном движении тела в двухслойной жидкости. Согласно [2], для тел различной формы волновые потери максимальны при $Fr \sim 1$. Эти выводы подтверждаются сравнением максимальных значений волновой составляющей силы на рис. 2, 3. Сопротивление тела в невесомой жидкости пропорционально Fr^2 . Следовательно, можно сделать вывод, что при больших скоростях движения тела весомость жидкости оказывает незначительное влияние, а при $Fr \sim 1$ доминирует. При малых скоростях ($Fr \ll 1$) влияние обоих факторов мало. Сравнение рис. 2 и 3 показывает, что влияние скачка плотности в используемых безразмерных переменных наиболее ощутимо для невесомой составляющей вертикальной силы, а волновая часть меняется слабо.

Волновая нагрузка для трехслойной жидкости $\bar{R}_1 = R_1/(\rho_s a^4 N^2)$, вычисленная в приближении Буссинеска с использованием (4.5), или, что то же самое, (4.6), показана на рис. 4, а-в для тела В1 при $\epsilon = 0,03$, $Fr = 1$ и толщинах среднего слоя $H/b = 0,2; 0,5; 1,5$ соответственно. В этой задаче представляет интерес вклад различных мод. В расчетах учитывалось 20 мод (кривые 1). В случае тонкого пикноклина ($H/b = 0,2$) полная нагрузка определяется в основном 1-й модой (кривые 2), вклад следующих мод мал. С увеличением толщины пикноклина возрастают вклады более высоких мод. На рис. 4, в наряду с вкладом 1-й моды представлена также сумма первых пяти мод (кривая 3). Видно,

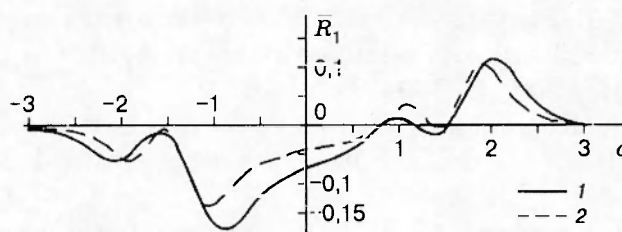


Рис. 5

что волновая нагрузка для рассмотренных толщин пикноклина определяется в основном низшими модами.

На рис. 5 показано влияние формы тела на волновую составляющую вертикальной силы, вычисленную при $\epsilon = 0,03$, $H/b = 1,5$, $Fr = 1$ в приближении Буссинеска. Кривые 1, 2 отвечают телам В2, В3 (аналогичные результаты для тела В1 см. на рис. 4, в). Видно, что максимумы абсолютных значений волновой силы примерно пропорциональны объемам этих тел.

Определение волновой составляющей вертикальной нагрузки без введения приближения Буссинеска является наиболее трудоемким. Однако полученные результаты численного интегрирования (4.4) показали практическое совпадение волновых нагрузок, определенных как с использованием приближения Буссинеска, так и без него при относительно малых значениях перепада плотности между верхним и нижним слоями ($\epsilon \leq 0,3$). Этот факт можно было предсказать, сопоставляя максимальные фазовые скорости внутренних волн в приближении Буссинеска и без него. Согласно (3.4), относительное различие максимальных фазовых скоростей не превышает 1 % в указанном диапазоне ϵ . Расхождение между волновыми силами, вычисленными с использованием (4.4) и (4.5), не превышало указанного значения.

Представленные численные расчеты позволяют оценить влияние плавного пикноклина на различные составляющие вертикальной силы, действующей на движущееся тело.

Изложенные результаты могут быть использованы при исследовании движения тела в стратифицированной жидкости по произвольной траектории, а также при создании численного метода граничных элементов для определения давления на поверхности тела с точным выполнением условия непротекания.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (грант JHX 100).

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанянц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
2. Warren F. W. G. The generation of wave energy at a fluid interface by the passage of a vertical moving slender body // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1961. V. 87, N 371. P. 43–54.
3. Moran J. P., Kerney K. P. On the small-perturbation theory of water exit and entry // Develop. Mech. 1965. V. 2, N 1. P. 478–506.
4. Порфирьев Н. П., Романов А. В. Вертикальное движение тонкого плоского тела к свободной поверхности весомой жидкости // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары, 1980. С. 137–144.

5. **Порфирьев Н. П.** Вертикальное движение тонких осесимметричных тел к свободной поверхности весомой жидкости безграничной глубины // Гидродинамика больших скоростей. Чебоксары, 1981. С. 100–109.
6. **Теодорович Э. В.** Переходное излучение внутренних волн движущимся массовым источником // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20, № 3. С. 300–307.
7. **Галанин А. В., Порфирьев Н. П.** О движении тел в жидкости конечной глубины // Гидродинамика больших скоростей. Чебоксары, 1985. С. 34–41.
8. **Порфирьев Н. П., Филиппов В. П.** Пересечение осесимметричного тела границы раздела двух жидкостей // Динамика сплошных сред со свободными границами. Чебоксары, 1996. С. 178–196.
9. **Миропольский Ю. З.** Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
10. **He You-sheng, Lu Chuan-jing, Chen Xue-nong.** Analytical solutions of singularities moving with an arbitrary path when two fluids are present // Appl. Math. and Mech.: Engl. Ed. 1991. V. 12, N 2. P. 131–148.
11. **Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г.** Изменчивость Мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
12. **Sturova I. V.** Waves generated by unsteady body motion in stratified fluid // Proc. 15th Sci. and Methodol. Seminar on Ship Hydrodynamics. Warna: BSHS, 1986. V. 1. P. 27-1–27-7.
13. **Wehausen J. V., Laitone E. V.** Surface waves // Handbuch der Physik. Berlin: Springer-Verl., 1960. V. 9. P. 446–778.

*Поступила в редакцию 28/XI 1995 г.,
в окончательном варианте — 5/I 1996 г.*
