Сибирский экологический журнал, 4 (1999) 377–379

УДК 517.958

Оценка параметров модели Риккера по неточным наблюдениям

А. Б. ТАЛАЛАЕВА, Г. Ш. ЦИЦИАШВИЛИ

Институт прикладной математики ДВО РАН
690032 Владивосток, ул. Радио, 7

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается проблема оценки параметров дискретной модели Риккера динамики численности изолированной популяции по неточным наблюдениям. Приводятся соответствующие формулы и указывается, что полученные авторами оценки являются состоятельными.

ВВЕДЕНИЕ

В начале 70-х годов появились глубокие исследования моделей динамики численности, подобных

$$N_{n+1} = aN_n f(N_n), \qquad n = 0,1, \dots , \qquad (1)$$

дальневосточного ученого А. П. Шапиро [1, 2] и его американского коллеги Р. М. Мэя [3]. Детальный обзор результатов по этой тематике содержится в статье Е. Я. Фрисмана [4]. Среди рекуррентных моделей вида (1) для математической экологии большой интерес представляет модель Риккера

$$x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}, \quad n = 0,1,\dots, \quad a > 0, b > 0, \quad x_0 > 0, (2)$$

подробно рассмотренная в работах [1, 4]. В них указаны области значений параметра (a, b), при которых последовательность x_n, $n = 0,1,\dots$ имеет либо притягивающий цикл, либо предельное распределение. Особое внимание здесь уделяется зависимости длины притягивающего цикла от параметра (a, b).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оценка параметра (a, b) по неточным наблюдениям y_n, $n = 0,1,\dots$ за последовательностью x_n, $n = 0,1,\dots$ является непростой статистической задачей. Проведенные Н. А. Солоповым в аспирантуре МИФИ численные эксперименты по решению этой задачи методом наименьших квадратов не дали удовлетворительного результата. В работе Г. Ш. Цициашвили [5] предложен метод оценки параметра логистического роста рекуррентной модели

$$u_{n+1} = au_n(1 - u_n), \; n = 0,1,\dots, \; 0 < u_0 < 1, \; 1 < a < 4,$$

по неточным наблюдениям v_n за u_n, $n = 0,1,\dots$ Этот метод основан на существовании у последовательности u_n, $n = 0, 1, \dots$ либо притягивающего цикла, либо предельного распределения. Он предполагает, что ошибка наблюдения входит или аддитивно:

$$v_n = u_n + z_n,$$

или мультипликативно:

$$v_n = u_n e^{z_n}. \qquad (3)$$

Здесь $z_0, z_1, \ldots$ – последовательность независимых, нормально распределенных случайных величин со средним 0 и дисперсией d. В настоящей работе строится статистическая оценка параметра (a, b) рекуррентной модели Риккера (2) по наблюдениям y_n за значениями x_n, $n = 0,1, \ldots$ При этом ошибка входит в наблюдения y_n мультипликативно (3).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предположим, что у последовательности x_n, $n = 0,1,\ldots$ существует либо притягивающий цикл длины $q > 1$, либо невырожденное предельное распределение, причем a > 1, обозначим

$$\overline{f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

В рамках указанных предположений и обозначений параметр (a, b) удовлетворяет равенствам

$$b = 2\,\frac{\overline{x\ \ln x} - \overline{x}\ \overline{\ln x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^{\,2}}, \qquad \ln a = b\overline{x}. \quad (4)$$

С помощью равенства (4) строится следующая оценка $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ параметра (a, b) по наблюдениям y_i, $i = 0,1, \ldots, n-1$. Обозначим

$$\mathrm{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad (\mathrm{Y}^2)_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i^2,$$

$$(\mathrm{Y}\ln \mathrm{Y})_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \ln, y_i,$$

$$(\ln \mathrm{Y})_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln, y_i,$$

и положим

$$\hat{b}_n = 2e^{d/2}\,\frac{(\mathrm{Y}\ln \mathrm{Y})_n - d\mathrm{Y}_n - \mathrm{Y}_n(\ln \mathrm{Y})_n}{(\mathrm{Y}^2)_n\, e^{-d} - (\mathrm{Y}_n)^2}$$

$$\hat{a}_n = \exp(\hat{b}_n\, \mathrm{Y}_n\, e^{d/2}).$$

Методами работы [5] можно доказать сходимость по вероятности

$(\hat{a}_n, \hat{b}_n) \to (a, b)$, $n \to \infty$.

Иными словами, $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ является состоятельной оценкой параметра (a, b) модели (2) по наблюдениям (3).

Рекуррентная модель логистического роста $x_{n+1} = bx_n(1 - x_n)$ и модель Риккера $x_{n+1} = bx_n\, e^{-c\frac{x}{n}}$ привлекают к себе повышенное внимание со стороны биологов и физиков. Это вызвано тем, что при определенных значениях параметров последовательности x_n, $n = 0, 1, \ldots$ становятся псевдослучайными. Для этих моделей и практически, и теоретически важно оценивать параметры по неточным наблюдениям y_n за состояниями x_n, $n = 0, 1, \ldots$. В силу нелинейности рекуррентной модели логистического роста и модели Риккера оценка их параметров методом наименьших квадратов не вполне удачна. Это подтверждается многочисленными компьютерными экспериментами, проведенными Н. А. Солоповым в аспирантуре МИФИ.

В настоящей работе оценка параметров производится в два этапа. Сначала неизвестные параметры выражаются через средние по траектории

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

различных функций f от фазовой переменной x_n. Затем эти средние оцениваются через наблюдения y_n, $n = 0,1, \ldots$. В результате строятся состоятельные (сходящиеся по вероятности при $n\to\infty$) оценки неизвестных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Шапиро, Управление и информация, Владивосток, вып. 3, ДВНЦ АН СССР, 1972, 96–118.
2. А. П. Шапиро, С. П. Луппов, Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии, М., Наука, 1983.
3. R. M. May, *J. Theor. Biol.*, 1975, **51:** 2, 511–524.
4. Е. Я. Фрисман, *Вестн. ДВО РАН*, 1995, 4, 92–103.
5. Г. Ш. Цициашвили, Оценка параметра логистического роста по неточным наблюдениям, Препринт, Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, 1995.

Estimation of the Ricker's Model Parameters on Inaccurate Observations

A. B. TALALAEVA, G. SH. TSITSIASHVILI

Institute of Applied Mathematics,
Far East Branch of the Russian Acad. Sci

The problem of estimating the parameters of discrete Ricker's model of the time course of numbers of an isolated population on the basis of inaccurate observations is considered. Appropriate formulae are given and it is indicated that the estimates obtained by the authors are valid.