ПМТФ, № 2, 1972

УДК 533.6.01

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О РАСПАДЕ ДВУМЕРНОГО РАЗРЫВА

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

Рассматривается плоская задача о распаде произвольного двумерного разрыва для уравнений газовой динамики. Начальная поверхность разрыва предполагается имеющей форму угла, близкого к π.

Доказаны существование и единственность решения задачи в линейной постановке.

Линейные задачи о дифракции и отражении ударных волн рассматривались в работах [1–3]. Задача о распаде двумерного разрыва приводит к новой краевой задаче для уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами.

1. Постановка задачи. Пусть некоторая кривая Γ разделяет плоскость на две части: D_0, D_1. В D_0 и D_1 находятся в момент $t = 0$ два политропных газа в состоянии, характеризующемся постоянными параметрами

$$\begin{aligned} &u = u_1, \quad v = v_1, \quad p = p_1, \quad \rho = \rho_1, \quad S = S_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad (x, y) \in D_1 \\ &u = u_0, \quad v = v_0, \quad p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad S = S_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad (x, y) \in D_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

В момент $t = 0$ перегородка Γ исчезает. Требуется описать движение газа.

Решение этой задачи известно в частном случае, когда начальная поверхность разрыва — прямая. Здесь решение задачи о распаде разрыва можно построить в классе автомодельных решений уравнений одномерной газовой динамики. Очевидно, что при произвольной кривой Γ решение задачи невозможно построить в классе автомодельных решений.

Необходимым условием автомодельности является инвариантность начальных данных задачи относительно преобразования независимых переменных x, y, соответствующего инфинитеземальному оператору [4]

$$x\partial / \partial x + y\partial / \partial y$$

Это условие выполняется только, тогда когда начальная поверхность разрыва Γ имеет форму угла. В этом случае возникает задача отыскания автомодельного решения, описывающего двумерный распад разрыва.

Далее рассматривается распад разрыва, симметричный относительно биссектрисы Γ_1 угла Γ. В силу симметрии на Γ_1 выполняется условие непротекания. Введем в плоскости течения неподвижную систему координат x, y так, чтобы в момент $t = 0$ начало координат совпадало с вершиной угла, а ось y была направлена вдоль стороны Γ. Пусть Γ_1 в этой системе координат задана уравнением $y = - x \operatorname{tg} \alpha$. Тогда начальные данные (1.1) должны удовлетворять соотношениям $v_1 = -u_1 \operatorname{tg} \alpha$, $v_0 = -u_0 \operatorname{tg} \alpha$. Без ограничения общности можно считать $u_0 = 0$, $p_1 \geqslant p_0$.

Если ввести новые зависимые и независимые переменные, соответствующие коническим течениям

$$\xi = x / t, \quad \eta = y / t, \quad \mathbf{U} = (U, V) = (u - \xi, v - \eta)$$

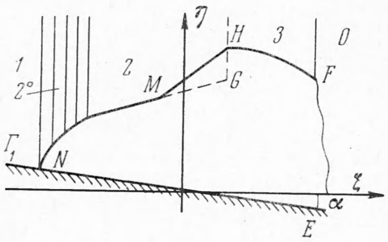
то система уравнений газовой динамики приведется к следующему виду:

$$(\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U}+\rho^{-1}\nabla p+\mathbf{U}=0$$

$$(\mathbf{U}\cdot\nabla\rho)+\rho\,(\operatorname{div}\mathbf{U}+2)=0,\quad (\mathbf{U}\cdot\nabla S)=0 \qquad (1.2)$$

Эта система гиперболическая при $|\mathbf{U}|^2>C^2=\partial p/\partial\rho$ и эллиптическая при $|\mathbf{U}|^2<C^2$.

При больших η распад разрыва описывается известным одномерным решением. При этом возможны разные конфигурации одномерного распада разрыва в зависимости от величины постоянных, задающих начальное состояние (1.1). Следуя терминологии книги [5], будем называть конфигурацией A такой распад одномерного разрыва, когда в D_0 идет ударная волна, а в D_1 — волна разрежения. Конфигурация $Б$ соответствует двум ударным волнам, идущим в D_0 и D_1, а конфигурация $В$ — двум волнам разрежения.



Фиг. 1

Соответствующие неравенства для начальных данных (1.1), обеспечивающие осуществление указанных конфигураций, приведены в [5]. Зная одномерные решения, можно построить границу области, в которой течение будет существенно двумерным.

Пусть при больших η происходит одномерный распад разрыва, соответствующий конфигурации A (фиг. 1). Решение строится из простой волны Римана $2°$ и двух постоянных течений, граничащих по контактному разрыву. Проведем из точки пересечения Γ_1 с передним фронтом простой волны характеристику системы (1.2) на известном решении $2°$, 2 до пересечения с фронтом контактного разрыва в точке G. На постоянном решении 3 построим окружность $U^2+V^2=C^2$, пересекающуюся с фронтом контактного разрыва в точке H. Если $\eta_H>\eta_G$ (как это имеет место на фиг. 1), то из точки H проводится характеристика по постоянному решению 2 до пересечения с характеристикой NG. Известная граница $NMHF$ и неизвестный фронт ударной волны FE замыкают область течения типа двойной волны. Аналогично можно построить границу указанной области и в остальных случаях. В области $NMHFE$ возникает определенная граничная задача для системы (1.2) с неизвестными границами — фронтами ударных волн и контактного разрыва.

Рассмотрим задачу о распаде разрыва в линейной постановке, предполагая угол α малым. В качестве основного решения, на котором проводится линеаризация, возьмем одномерный распад разрыва при $\alpha=0$.

Конфигурация А. На фиг. 2, *а*, *б*, *в* представлены некоторые возможные виды области возмущенного течения для линейной задачи. В области LMN течение можно считать потенциальным. Введем потенциал течения по формулам $\psi_\xi=U$, $\varphi_\eta=V$ и представим функцию φ в виде

$$\varphi=\varphi_0+\alpha\psi$$

где φ_0 — потенциал, соответствующий основному решению. После линеаризации получается уравнение для потенциала возмущений ψ

$$\frac{1}{2}\left[\eta^2-\left(\frac{2C_1}{\gamma_1+1}-\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}(\xi-u_1)\right)^2\right]\psi_{\eta\eta}-\left[\frac{2C_1}{\gamma_1+1}-\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}(\xi-u_1)\right]\times$$

$$\times\,\eta\psi_{\xi\eta}-\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\eta\psi_\eta+\left[\frac{2C_1}{\gamma_1+1}-\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}(\xi-u_1)\right]\psi_\xi+\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\psi=0 \qquad (1.3)$$

Граничные условия для функции ψ следующие: $\psi = -u_1\eta$ на характеристике LM, $\psi_\eta = -2(\gamma_1 + 1)^{-1}(C_1 + \xi) - (\gamma_1 - 1)(\gamma_1 + 1)^{-1}u_1$ при $\eta = 0$. Линеаризация системы (1.2) на постоянных решениях *2*, *3* приводит к уравнениям

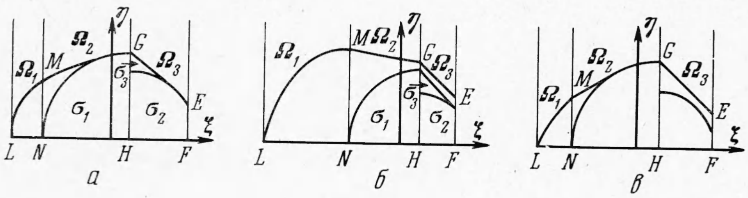
$$(\mathbf{x}_j \cdot \nabla)\mathbf{u}^j = \nabla p^j, \quad (\mathbf{x}_j \cdot \nabla)\rho^j = \operatorname{div}\mathbf{u}^j, \quad (\mathbf{x}_j \cdot \nabla)p^j = \operatorname{div}\mathbf{u}^j \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{u}^j$, p^j, ρ^j $(j = 2, 3)$ — искомые безразмерные возмущения, определяемые следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_j + \alpha C_j \mathbf{u}^j, \quad p = p_j + \alpha\rho_j C_j^2 p^j$$

$$\rho = \rho_j(1 + \alpha\rho^j), \quad x_j = (\xi - U_0)/C_j, \quad y_j = \eta / C_j$$

где $p_j, \rho_j, C_j, \mathbf{u}_j = (U_0, 0)$ — параметры газа в основных постоянных реше-



Фиг. 2

ниях. Из системы (1.4) следует уравнение для функции p^j

$$(x_j^2 - 1)p^j_{x_j x_j} + 2x_j y_j p^j_{x_j y_j} + (y_j^2 - 1)p^j_{y_j y_j} + 2x_j p^j_{x_j} + 2y_j p^j_{y_j} = 0 \tag{1.5}$$

Граничные условия для системы (1.4) имеют вид

$$p^2 = u^2 = \rho^2 = 0, \quad v^2 = -u_1/C_2, \quad (\xi, \eta) \in MG$$

$$v^2 = -U_0/C_2, \ p_{y_2}{}^2 = 0, \ y_2 = 0, \ p^3 = u^3 = \rho^3 = v^3 = 0$$

$$(\xi, \eta) \in GE, \ v^3 = -U_0/C_3, \ p_{y_3}{}^3 = 0, \ y_3 = 0$$

Пусть фронт контактного разрыва в возмущенной области задается уравнением

$$\xi = U_0 + \alpha f(\eta)$$

Условия на контактном разрыве дают следующие граничные условия:

$$\gamma_1 p^2 = \gamma_0 p_3, \ C_2 u^2 = C_3 u^3 = f(\eta) - \eta f'(\eta), \ x_2 = x_3 = 0$$

Используя уравнения (1.4), последнее соотношение можно записать в виде

$$C_2 p_{x_2}{}^2 = C_3 p_{x_3}{}^3 \quad (y_2 = C_2^{-1} C_3 y_3)$$

Пусть возмущенный участок фронта ударной волны задается уравнением

$$x_3 = k_3 + \alpha\psi_3(y_3) \left(k_3 = \frac{D_3 - U_0}{C_3} = \left[\frac{(\gamma_0 - 1)M_3^2 + 2}{2\gamma_0 M_3^2 - \gamma_0 + 1}\right]^{1/2}, \ M_3 = \frac{D_3}{C_0} \right)$$

где D_3 — скорость фронта невозмущенной ударной волны. Используя соотношения Гюгонио на ударной волне, можно вычислить u^3, v^3, p^3, ρ^3 на границе EF

$$u^3 = \frac{2}{\gamma_0 + 1} \frac{M_3^2 + 1}{M_3^2} (\psi_3(y_3) - y_3\psi'(y_3)), \quad v^3 = -\frac{2k_3(M_3^2 - 1)}{(\gamma_0 - 1)M_3^4 + 2} \psi_3'(y_3) \qquad (1.6)$$

$$p^3 = \frac{4k_3}{\gamma_0 + 1} (\psi_3(y_3) - y_3\psi'(y_3)), \quad \rho^3 = \frac{4}{(\gamma_0 + 1)k_3 M_3^4} (\psi_3(y_3) - y_3\psi'(y_3))$$

Из (1.4), (1.6) получаем

$$y_j(k_j^2 - 1)p_{x_j}^{\ j} + [(L_j + k_j)y_j^2 - N_j k_j]p_y^{\ j} = 0$$

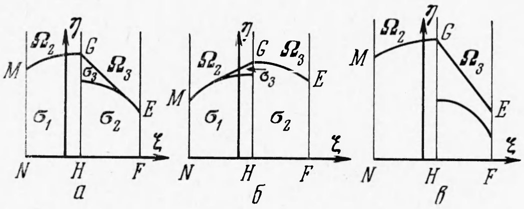
$$x_j = k_j \ (j = 3), \quad L_3 = 2k_3^{-1}M_3^{-2}(M_3^2 + 1),$$

$$N_3 = (\gamma_0 + 1)(M_3^2 - 1)[2(\gamma_0 - 1)M_3^2 + 4]^{-1} \qquad (1.7)$$

На EF должно выполняться еще условие гладкого фронта ударной волны в точке E

$$\int\limits_{EF} p_{y_3}^{\ 3}(k_3, t)\frac{dt}{t} = \frac{4k_3}{\gamma_0 + 1} \qquad (1.8)$$

Конфигурация Б (фиг. 3, *а*, *б*, *в*). Линеаризованные уравнения в этом случае имеют вид (1.4), (1.5) при $j = 2, 3$. Граничные условия в области



Фиг. 3

Ω_3 те же, что и в случае конфигурации A. Условия на границах MG, GH, NH в области Ω_2 также не меняются. Условия на границе MH

$$x_2 = k_2 = -[(\gamma_1 - 1)M_2^2 + 2]^{1/2}[2\gamma_1 M_2^2 - \gamma_1 + 1]^{-1/2}, \quad M_2 = |D_2 - u_1|/C_1$$

имеют тот же вид, что и условия на границе $x_3 = k_3$, если всюду в формулах (1.6) — (1.8) заменить γ_0 на γ_1 и индекс 3 на 2, за исключением второго условия (1.6), которое в данном случае имеет вид

$$v^2 = -\frac{2k_2(M_2^2 - 1)}{(\gamma_1 - 1)M_2^4 + 2}\psi_2'(y_2) - \frac{u_1}{C_2}$$

Конфигурация В (фиг. 4, *а*, *б*). Граничные условия и уравнения в области Ω_1, Ω_2 остаются теми же, что и в случае конфигурации A. В области Ω_4 уравнение для потенциала возмущений и граничные условия совпадают с уравнением и условиями, справедливыми в области Ω_1, если положить в них $u_1 = 0$ и заменить ξ, C_1, γ_1 на $-\xi$, C_0, γ_0. На оставшихся границах GE, GH, HQ справедливы те же граничные условия, что и в случае конфигурации $Б$.

2. Существование и единственность решения линейной задачи. Существование и единственность решения будут доказаны при следующих ограничениях на параметры задачи:

$$C_2 C_3^{-1} < (1 - k_3^2)^{-1/}$$

в случае конфигурации A и

$$(1-k_2^2)^{1/2} < C_2C_3^{-1} < (1-k_3^2)^{-1/2}$$

в случае конфигурации $Б$.

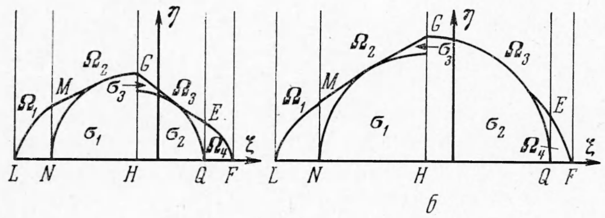
При таком выборе начальных данных (1.1) характеристика, исходящая из точки пересечения линии вырождения одного из уравнений (1.5) $x_j^2 + y_j^2 = 1$ с линией GH, окончивается на линии вырождения второго уравнения (фиг. 2, 3, *а*, *б*). В противном случае эта характеристика приходит на ударную волну (фиг. 2, 3, *в*).

Решение линеаризированной задачи вне областей σ_1, σ_2, σ_3 находится однозначно в явном виде. Как показано в [6], уравнение (1.3) интегрируется в квадратурах, а смешанная задача в областях Ω_1 и Ω_4 сводится к решению интегрального уравнения Абеля первого рода, разрешимого в явном виде. В области гиперболичности уравнение (1.5) заменой переменных

$$z = \theta + \arccos r_j^{-1}, \quad \tau = \theta - \arccos r_j^{-1}$$

$$(\theta = \operatorname{arc\,tg}(y_j / x_j), \quad r_j^2 = x_j^2 + y_j^2) \tag{2.1}$$

сводится к волновому уравнению $p_{z\tau}^j = 0$. Зная общий вид решения (1.5), можно построить решение линейной задачи вне областей σ_1, σ_2, σ_3 в явном виде.



Фиг. 4

Таким образом, доказательство существования и единственности решения задачи о распаде разрыва сводится к доказательству этих фактов для вспомогательной задачи, которая состоит в следующем: найти пару функций $P = (p^2(x_2, y_2), p_y(x_3, y_3))$, определенных при $x_2 \leqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$ соответственно, удовлетворяющих уравнениям (1.5) ($j = 2, 3$), непрерывных в замкнутых областях σ_1, σ_2, σ_3, дважды непрерывно дифференцируемых в областях σ_1, σ_2, непрерывно дифференцируемых в области σ_3, таких, что производные $p_{x_j}^j$, $p_{y_j}^j$ существуют и непрерывны при $x_j = 0$, а в случае конфигураций A и $Б$ — при $x_j = k_j$. Функции $p^j(x_j, y_j)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям для A, $Б$, $В$:

$$p_{y_j}^j = 0, \quad y_j = 0, \quad p^j|_l = \chi_j(y_j)$$

$$\gamma_1 p^2 = \gamma_0 p^3, \quad C_2 p_{x_2}^2 = C_3 p_{x_3}^3, \quad x_2 = x_3 = 0 \tag{2.2}$$

Для A, $Б$ ставятся еще такие условия: на границе $x_3 = k_3$ выполняется условие (1.7) ($j = 3$) и интегральное условие

$$\delta_1(P) = \int_0^{k_3'} p_{y_3}^3(k_3, t) \frac{dt}{i} = T_1 \tag{2.3}$$

В случае конфигурации $Б$ условие (1.7) ($j = 2$) выполняется и на границе $x_2 = k_2$, кроме того

$$\delta_2(P) = \int\limits_0^{k'_2} p_{y_2}{}^2(k_2, t)\frac{dt}{t} = T_2 \tag{2.4}$$

Здесь l — часть границы области $\sigma_1 U \sigma_2 U \sigma_3$, состоящая из отрезков линий вырождения типа уравнений (1.5) и характеристики, ограничивающей область σ_3; T_1 и T_2 — заданные постоянные; $\chi_j(y_j)$ — дифференцируемые вдоль l функции с непрерывной по Гельдеру производной, а $k_j' = \sqrt{1-k_j^2}$.

Теорема 1. Решение задачи (1.7), (2.2) — (2.4) при сделанных выше предположениях единственно.

В силу линейности задачи достаточно доказать, что однородная задача имеет лишь тривиальное решение. Пусть $\chi_j(y_j) = T_1 = T_2 = 0$. Продолжим решение в симметричную относительно оси $y_2 = y_3 = 0$ область, полагая $p^j(x_j, y_j) = p^j(x_j, -y_j)$. Пусть

$$p_* = \begin{cases} \gamma_0 p^3(x_3, y_3), & x_3 \geqslant 0 \\ \gamma_1 p^2(x_2, y_2), & x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

Функция p_* не может достигать глобального положительного максимума или отрицательного минимума внутри областей эллиптичности σ_1, σ_2, так как в противном случае $p_* = \mathrm{const}$ в любой внутренней подобласти, а следовательно, $p_* = 0$. Экстремум не достигается и на линии $x_2 = x_3 = 0$. Действительно, в случаях, соответствующих фиг. 2, 3, 4, *а*, в точке положительного максимума $p_{x_3}{}^3 \leqslant 0$, а $p_{x_2}{}^2 > 0$ согласно принципу максимума Хопфа [7,8], что противоречит условию (2.2). В области σ_3 $p_* = \mathrm{const}$ вдоль характеристик одного семейства, пересекающихся с границей $x_2 = x_3 = 0$. Следовательно, экстремум не может достигаться и в замкнутой области σ_3. В случае конфигурации $В$ единственность решения доказана, так как на остальных границах функция $p_* = 0$. В случае конфигураций $А$ и $Б$ функция p_* не может достигать экстремума и в точках отрезка $x_3 = k_3$, $y_3 \neq 0$, так как из условия (1.7) и равенства $p_{y_3}{}^3 = 0$ следует, что $p_{x_3}{}^3 = 0$, а в точках экстремума $p_{x_3}{}^3 \neq 0$ согласно принципу максимума Хопфа. Предположим, что экстремум достигается в точке $x_3 = k_3$, $y_3 = 0$. Положим $p_0{}^3 = p^3(k_3, 0)$. Интегрируя по частям (2.3), получаем

$$-\frac{p_0{}^3}{k_3'} + \int\limits_0^{k_3'} \frac{p^3 - p_0{}^3}{t^2}\, dt = 0 \tag{2.5}$$

Но в случае положительного максимума или отрицательного минимума оба члена в равенстве (2.5) имеют один знак, откуда получаем, что $p_0{}^3 = 0$. В случае конфигурации $Б$ аналогично показывается, что функция p_* не может достигать экстремума при $x_2 = k_2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Для любых двух решений P_1 и P_2 однородной задачи (1.7), (2.2) из линейной зависимости векторов $\delta(P_1) = (\delta_1(P_1), \delta_2(P_1))$, $\delta(P_2) = (\delta_1(P_2), \delta_2(P_2))$ следует линейная зависимость решений P_1 и P_2.

Существование решения доказывается сведением задачи к некоторому сингулярному интегральному уравнению. Зададим на линии «склейки» $x_2 = x_3 = 0$

$$p_{y_2}{}^2 = \omega(y_2),\quad p_{y_3}{}^3 = \gamma_1\gamma_0^{-1}C_3C_2^{-1}\omega(C_3C_2^{-1}y_3) \tag{2.6}$$

Здесь $\omega(y)$ — произвольная функция ($\omega(0) = 0$). При этом будет выполнено одно из условий (2.2). Смешанная задача (2.2), (2.6) в области σ_3 может быть решена явно, в частности могут быть вычислены величины $p_{x_j}^j$ при $x_j = 0$ и p_{θ_j} при $r_j = 1$.

Уравнение (1.5) в области эллиптичности заменой переменных

$$\theta = \theta', \quad r_j = \frac{2R_j}{R_j^2 + 1} \tag{2.7}$$

сводится к уравнению Лапласа. Из (2.1), (2.7) следует, что производные $p_{r_j}^j$ обращаются в бесконечность порядка $|1 - r_j|^{-1/2}$ на линиях вырождения.

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\Phi^j(\zeta_j) = p_{\xi_j}^j - ip_{\eta_j}^j \quad (j = 2,\ 3)$$

$$\xi_j = R_j \cos\theta, \quad \eta_j = R_j \sin\theta, \quad \zeta_j = \xi_j + i\eta_j$$

Для Φ^2 и Φ^3 в силу граничных условий возникают задачи Гильберта в областях σ_1 и σ_2. Решение задачи Гильберта ищется в классе решений, органиченных в точках разрыва коэффициентов краевого условия. При этом решение в области типа квадранта (в область σ_1 на фиг. 2, *а*) определяется однозначно в явном виде, а в области типа четырехугольника (область σ_2 на фиг. 2, *а*) — с точностью до произвольной постоянной. Вычисляя по найденному решению $p_{x_j}^j$ при $x_j = 0$ и удовлетворяя второму условию (2.2) на линии $x_2 = x_3 = 0$, получаем сингулярное интегральное уравнение для определения функции $\omega(y)$.

Опуская промежуточные вычисления, выпишем интегральное уравнение для случая, соответствующего фиг. 2, *а*

$$\begin{gathered}
Ts^{-2}\sqrt{s^2y^2-1}\left[\theta\left(y-\frac{1}{s}\right)-\theta(y-1)\right]\omega(y)+\frac{1}{\pi}\left[\sqrt{1-y^2}+\right. \\
\left.+Ts^{-2}\sqrt{1-s^2y^2}\left[\theta(y)-\theta\left(y-\frac{1}{s}\right)\right]\right]\int_0^1\frac{2\tau\omega(\tau)}{\tau^2-y^2}\,d\tau+\frac{Ts^{-2}}{\pi}\sqrt{1-s^2y^2}\times \\
\times\left[\theta(y)-\theta\left(y-\frac{1}{s}\right)\right]\int_0^1\left[\frac{Y(sy)}{Y(st)}\,\frac{2sg(st)\,g'(st)}{g^2(st)-g^2(sy)}-\frac{2t}{t^2-y^2}\right]\omega(t)\,dt= \\
=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-y^2}\int_0^1\frac{2t\chi_2'(t)}{1-t^2y^2}\,dt+\frac{1}{s\pi}\sqrt{1-s^2y^2}\left[\theta(y)-\theta\left(y-\frac{1}{s}\right)\right]\int_{s^{-1}}^1\times \qquad (2.8) \\
\times\frac{\sqrt{s^2-1}}{\sqrt{s^2t^2-1}}\,\frac{2sg(st)\,g'(st)}{g^2(st)-g^2(sy)}\,\frac{Y(sy)}{Y(st)}\left[\frac{1}{\tau_+(t,s)}\chi_3'\left(\sqrt{\frac{\tau_-(t,s)}{\tau_+(t,s)}}\right)+\right. \\
\left.+\frac{1}{\tau_-(t,s)}\chi_3'\left(\sqrt{\frac{\tau_+(t,s)}{\tau_-(t,s)}}\right)\right]dt+\frac{2\sqrt{s^2-1}}{s\tau_-(y,s)}\left[\theta\left(y-\frac{1}{s}\right)-\theta(y-1)\right]\chi_3'\times \\
\times\left(\sqrt{\frac{\tau_+(x,s)}{\tau_-(y,s)}}\right)-Ds^{-1}\sqrt{1-s^2y^2}\,[\theta(y)-\theta(y-s^{-1})]\,Y(sy)
\end{gathered}$$

Здесь

$$s = C_2C_3^{-1}, \quad T = \gamma_0\gamma_1^{-1}, \quad q = (1 - k_3)(1 + k_3)^{-1}$$

$$d = (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^{-1}, \quad b = (\beta - 1)(\beta + 1)^{-1}$$

D — произвольная постоянная, $\theta(y)$ — функция Хэвисайда, $\vartheta_2(z, q)$, $\vartheta_3(z, q)$ — эллиптические тэта-функции, а постоянные ε и β удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{1}{\varepsilon+\beta} = L_3 - N_3\frac{k_3}{1-k_3^2}, \qquad \frac{\varepsilon\beta}{\varepsilon+\beta} = \frac{N_3k_3}{1-k_3^2}$$

Кроме того

$$\tau_{\pm}(t, s) = s^2t + 1 \pm \sqrt{s^2t^2-1}\,\sqrt{s^2-1}$$

$$g(t) = -2g^{1/4}\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\,i\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})^2+4q^{2n}t^2}{(1-q^{2n-1})^2+4q^{2n-1}t^2}$$

$$Y(t) = 2q^{1/4}\frac{\vartheta_2^2(0, q)}{\vartheta_2^2(0, q)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{[(1+q^{2n-1})^2-4q^{2n-1}t^2]\,[(1+q^{2n})^2-4q^{2n}t^2]}{[(1+dq^{2n-1})^2-4dq^{2n-1}t^2]\,[(1+bq^{2n-1})^2-4bq^{2n-1}t^2]}$$

В общем случае сингулярное интегральное уравнение имеет вид

$$L\omega(y) = G(y) + D_1H_1(y) + D_2H_2(y) \tag{2.9}$$

где L — сингулярный оператор с непрерывными на отрезке $[0, 1]$ коэффициентами, $G(y)$ — линейный оператор над известными граничными данными, $H_1(y)$ и $H_2(y)$ — непрерывные по Гельдеру функции, не зависящие от граничных данных, D_1 и D_2 — произвольные постоянные. В случае конфигурации A $H_1(y) \not\equiv 0$, $H_2(y) \equiv 0$, в случае конфигурации $Б$ $H_1(y) \not\equiv 0$, $H_2(y) \not\equiv 0$, а в случае конфигурации B $H_1(y) \equiv 0$, $H_2(y) \equiv 0$. Индекс интегрального уравнения (2.9) в классе решений, ограниченных в точке $y = 0$, равен нулю.

Доказательство существования решения исходной задачи сводится к доказательству существования решения интегрального уравнения (2.9) и определения таких постоянных D_1 и D_2, чтобы решение соответствующей задачи Гильберта удовлетворяло условиям (2.3), (2.4). Произвольные постоянные D_1 и D_2 возникают при решении задачи Гильберта, как указывалось выше. Пусть $P = \Psi(\omega)$ — оператор, ставящий в соответствие решению уравнения (2.9) при фиксированных D_1 и D_2 решение задачи Гильберта с теми же постоянными D_1, D_2.

Теорема 2. Решение задачи (1.7), (2.2) — (2.4) при сделанных выше предположениях существует.

Конфигурация В. Однородной задаче (2.2) соответствует однородное интегральное уравнение (2.9). В силу теоремы 1 и равенства $\varkappa = 0$ (2.9) разрешимо при любой правой части. В этом случае существование решения доказано.

Конфигурация А. Пусть однородное уравнение (2.9) имеет лишь тривиальное решение. Тогда неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части. Однородной задаче (1.7), (2.2) соответствует (2.9) с правой частью $D_1H_1(y)$. Пусть $\omega_1(y) = L^{-1}H_1(y)$, $P_1 = \Psi(\omega_1)$. Здесь L^{-1} — линейный оператор, ставящий в соответствие правой части уравнения (2.9) его решение. Из теоремы 1 следует, что

$$\delta_1(P_1) \neq 0 \tag{2.10}$$

Положим

$$\omega(y) = D_1\omega_1(y) + L^{-1}G(y), \quad P = \Psi(\omega) = D_1P_1 + P_2$$

Удовлетворяя условию (2.3), получаем линейное уравнение относительно постоянной D_1

$$\delta_1(P) = D_1\delta_1(P_1) + \delta_1(P_2) = T_1$$

которое однозначно разрешимо в силу (2.10).

Пусть $\omega_0(y)$ — нетривиальное решение однородного интегрального уравнения. Согласно следствию 1 любое другое решение этого уравнения линейно зависимо с $\omega_0(y)$. Тогда размерность пространства решений сопряженного однородного уравнения в союзном классе решений [9] тоже равна единице. Пусть $\omega_*(y)$ — нетривиальное решение сопряженного однородного уравнения. Для разрешимости уравнения (2.9) с правой частью $F(y)$ необходимо и достаточно выполнения условия разрешимости

$$(\omega_*, F) = \int_0^1 F(t)\,\omega_*(t)\,dt = 0 \tag{2.11}$$

Утверждается, что $(\omega_*, H_1) \neq 0$. Если это не так, то уравнение (2.9) с правой частью $H_1(y)$ разрешимо. Но в силу следствия 1 функции $\omega(y) = L^{-1}H_1(y)$ и $\omega_0(y)$ линейно зависимы, что невозможно. Условию разрешимости интегрального уравнения можно удовлетворить выбором постоянной D_1. Общее решение уравнения (2.9) имеет вид

$$\omega(y) = L^{-1}(D_1 H_1(y) + G(y)) + D_0\omega_0(y)$$

где D_0 — произвольная постоянная. В силу (2.9) выбором D_0 можно удовлетворить условию (2.3).

Конфигурация Б. Пусть однородное уравнение (2.9) имеет лишь тривиальное решение. Положим

$$\omega_1(y) = L^{-1}H_1(y),\quad \omega_2(y) = L^{-1}H_2(y),\quad P_1 = \Psi(\omega_1),\quad P_2 = \Psi(\omega_2)$$

Из линейной независимости функций H_1 и H_2 и следствия 1 получаем

$$\det(\delta_k(P_l)) \neq 0 \quad (k = 1, 2;\ l = 1, 2) \tag{2.12}$$

Общее решение (2.9) имеет вид

$$\omega(y) = D_1\omega_1(y) + D_2\omega_2(y) + L^{-1}G(y)$$

Пусть $P = \Psi(\omega)$. Удовлетворяя условиям (2.3), (2.4), получаем систему двух линейных уравнений, разрешимую в силу (2.12). В этом случае решение существует.

Пусть размерность пространства решений однородного уравнения равна единице, $\omega_*(y)$, как и в предыдущем случае,— решение сопряженного однородного уравнения. Можно показать, что либо $(H_1, \omega_*) \neq 0$, либо $(H_2, \omega_*) \neq 0$. Пусть для определенности

$$(H_1, \omega_*) = a_1 \neq 0,\quad (H_2, \omega_*) = b_1$$

Положим

$$H_3(y) = b_1H_1(y) + a_1H_2(y),\ H_4(y) = b_1H_1(y) - a_1H_2(y) \text{ при } b_1 \neq 0;$$
$$H_3(y) = H_1(y),\ H_4(y) = H_2(y) \text{ при } b_1 = 0.$$

Уравнение (2.9) можно записать в эквивалентном виде

$$L\omega(y) = D_3H_3(y) + D_4H_4(y) + G(y). \tag{2.13}$$

Условию разрешимости (2.13)

$$D_3(H_3, \omega_*) + (G, \omega_*) = 0$$

можно удовлетворить выбором D_3. Общее решение уравнения (2.13) имеет вид

$$\omega(y) = L^{-1}(D_3 H_3(y) + G(y)) + D_4 L^{-1} H_4(y) + D_5 \omega_0(y)$$

где D_4 и D_5 — произвольные постоянные.

Пусть

$$P_0 = \Psi(\omega_0), \quad P_1 = \Psi(L^{-1}H_4)$$

Согласно следствию 1

$$\det(\delta_k(P_l)) \neq 0 \quad (k = 1, 2;\ l = 0, 1)$$

Следовательно, и в этом случае условиям (2.3), (2.4) можно удовлетворить.

Аналогичными рассуждениями показывается, что решение задачи существует и в том случае, когда размерность пространства решений сопряженного однородного уравнения равна двум. Больше двух она быть не может в силу следствия 1. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит Л. В. Овсянникова за интерес к работе и полезные советы.

Поступила 28 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. Diffraction of blast. Pros. Roy. Soc., 1950, Ser. A, vol. 200, pp. 554—565.
2. Smyrl J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speed. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt 2.
3. Ter-Minassiants S. M. The diffraction accompanying the regular reflexion of a plane obliquely impining shock from the walls of an obtuse wedge. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt 2.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
6. Тешуков В. М. К задаче об угловом поршне. ПМТФ, 1969, № 3.
7. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука» 1968.