

ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ, ГИДРОСФЕРЫ И ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

УДК 539.534.539.194

Совместное восстановление комплексного показателя преломления и функции распределения частиц по размерам по лидарным измерениям: тестирование разработанных алгоритмов

С.В. Самойлова*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 24.01.2019 г.

Предлагается метод совместного определения микрофизических аэрозольных характеристик – комплексного показателя преломления $m = m_{\text{real}} + i \cdot m_{\text{image}}$ и функции распределения сферических частиц по размерам $U(r)$ – по данным ночного лидарного зондирования на длинах волн 355–1064 нм. При их совместном оценивании целесообразно проводить прямую минимизацию функционала невязки $\Phi(m)$ в области физически обоснованных значений m . Основные проблемы, обусловленные близостью локальных минимумов $\Phi(m)$ для $m_{\text{image}}^{\text{true}} \in [0,01; 0,04]$, приводят к значимым ошибкам определяемых $m_{\text{real}}^{\text{est}}$ и $m_{\text{image}}^{\text{est}}$. Совместное использование функционалов, различных по набору оптических коэффициентов, сужает область возможных значений m и обеспечивает более точную оценку его обеих составляющих. Особенности восстановления функции распределения связаны с информационной недостаточностью лидарных измерений для грубодисперсной фракции. Метод статистической регуляризации позволяет корректно определять $U(r)$ для крупных частиц со средним радиусом до 3 мкм и с допустимой погрешностью – больше 3 мкм. Алгоритмы протестированы на восьми величинах поглощения, когда одной величине, соответствующей одному значению $m_{\text{image}}^{\text{true}}$, приписываются 50 эмпирических моделей функции распределения.

Ключевые слова: аэрозоль, лидар, функция распределения частиц по размерам, комплексный показатель преломления; aerosol, lidar, particle size distribution function, complex refractive index.

Введение

Изучение особенностей изменения атмосферного аэрозоля – значимая часть исследований комплекса физических и химических процессов, формирующих климат Земли. Разработаны различные методики определения состава аэрозоля, форм и размеров его частиц. Спутниковые системы позволяют проводить глобальный мониторинг аэрозоля: MODIS [1], POLDER/PARASOL [2], CALIOP [3]. Наблюдения с помощью наземных инструментов обеспечивают более детальную и точную информацию о характеристиках аэрозоля в конкретных географических точках. Исследование и сопоставление микрофизических характеристик – комплексного показателя преломления (ПП или $m = m_{\text{real}} + i \cdot m_{\text{image}}$) и функции распределения частиц по размерам (ФР или $U(r)$) – стало возможным с развитием сетей измерения аэрозоля в толще атмосферы, в частности AERONET (Aerosol Robotic Network) [4], и разработкой методов интерпретации наблюдений [5, 6]. Региональные лидарные сети – EARLINET [7], ADNET [8], CIS-LiNet [9] – и глобальная сеть GALION [10] пред-

назначены дополнить пассивные измерения активными, в первую очередь дающими информацию о вертикальном распределении аэрозоля в тропосфере.

С марта 2006 г. в рамках проекта CIS-LiNet [9] ведутся измерения в Томске (56° с.ш., 85° в.д.). В дневное время система регистрирует сигналы, обусловленные упругим рассеянием, на трех длинах волн $\lambda_{0i} = 355, 532$ (поляризационные измерения), 1064 нм. В ночное время дополнительно принимаются сигналы комбинационного рассеяния на двух смещенных длинах волн в УФ- и видимом диапазонах, $\lambda_{Ri} = 387, 607$ нм. Такой набор данных позволяет оценивать три коэффициента обратного рассеяния $\beta_a(\lambda_{0i}, z)$ на $\lambda_{0i} = 355, 532, 1064$ нм и два коэффициента ослабления $\sigma(\lambda_{0i}, z)$ на $\lambda_{0i} = 355, 532$ нм. Система ($3\beta + 2\sigma$) признана стандартной для мировой сети GALION [10]. В ближайшем будущем планируется запуск подобной системы в космос [11].

Погрешности определения оптических коэффициентов для лидарных систем типа ($3\beta + 2\sigma$) максимальны в УФ-области и составляют ~20% (σ) и ~10% (β) в пограничном слое атмосферы [12]. Используемый нами алгоритм численного дифференцирования позволяет снизить их до ~10% (σ) и ~5% (β), в том числе и для свободной тропосферы [13].

* Светлана Викторовна Самойлова (ssv@seversk.tomsknet.ru).

Спектральный набор оптических коэффициентов и уровень погрешностей их оценивания дают возможность перейти к восстановлению высотного распределения микрофизических характеристик аэрозоля.

Специалисты в области решения обратных задач аэрозольного светорассеяния давно начали изучать возможности восстановления микроструктуры аэрозоля [14–18]; разнообразие основных направлений исследований и полученные результаты представлены в [19–24]. В частности, параметры бимодальной ФР корректно оцениваются для среднегеометрического радиуса мелких R_{fine} и крупных R_{coarse} частиц в диапазоне $0,1 \leq R_i \leq 6$ мкм при AERONET измерениях, подробнее в [24].

С математической точки зрения оптические коэффициенты аэрозольного слоя, находящегося на расстоянии z от лидара, связаны с микрофизическими характеристиками системой линейных интегральных уравнений

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} K_j(m, r, z)U(r, z)dr + \varepsilon_j^{\text{meas}}(z) = g_j^{\text{meas}}(z),$$

$$j = \{\beta(355), \beta(532), \beta(1064), \sigma(355), \sigma(532)\} = 1, \dots, 5,$$

где $g_j^{\text{meas}}(z)$ задают набор измеряемых коэффициентов для соответствующей длины волны; $\varepsilon_j^{\text{meas}}(z)$ – погрешности измерений; $U(r, z)$ – объемная, бимодальная функция распределения частиц по размерам; $K_j(m, r, z)$ – ядра уравнений, зависящие от показателя преломления и от формы частиц. Переменная z , не существенная при описании методов, ниже опущена для упрощения формул. При лидарном зондировании первые исследования методов обращения (1) основаны на теории Ми [25], в которой аэрозоль моделируется как полидисперсная система однородных сферических частиц [26–32]. В [33–40] рассматриваются особенности ПП + ФР для различных типов аэрозоля, в том числе и для сфероидов согласно [41–43].

Теоретические аспекты определения микрофизических характеристик аэрозоля по данным зондирования рассматривались в [28, 30, 31, 37, 38, 44–46]. Анализ показывает наличие двух серьезных проблем их восстановления: 1) смещенная оценка функции распределения для грубодисперсной фракции даже при известном показателе преломления; 2) неоднозначность определения m даже при известной $U(r)$. ФР линейно связана с оптическими коэффициентами, и при известном (или предварительно оцененном) ПП ее восстановление сводится к обращению системы линейных алгебраических уравнений. Смещенность получаемого решения обусловлена информационной недостаточностью лидарных измерений при $r > 1$ мкм и проявляется в выраженном влиянии априорного выбора стабилизатора для оценки $U_{\text{coarse}}(r)$ [28, 30, 44].

Восстановление показателя преломления – более сложная задача, поскольку единого, общепри-

знанного метода, пригодного для любого набора измеряемых величин, не существует. В общем виде оценка ПП сводится к прямой минимизации функционала невязки $\Phi(m)$ по всему физически обоснованному набору значений m . Функционал показывает различие между оптическими коэффициентами, *измеряемыми* и *рассчитанными* согласно (1). Если погрешности (и экспериментальные, и математические, обусловленные особенностями оценивания $U(r)$) отсутствуют, для любого показателя существует единственный минимум $\Phi(m) \equiv 0$ [45]. Наличие шумов искажает поверхность функционала, и ложный минимум может оказаться глобальным. Неоднозначные величины ПП приводят к неверному заданию ядер уравнений (1), что проявляется, в частности, в деформации ФР ([38, табл. 2] или [46, рис. 4]). Для поляризационного нефелометра серьезное исследование возможностей оценивания $m + U(r)$ представлено в [47, 48].

Альтернативой разработанным алгоритмам интерпретации ночных лидарных сеансов являются GARRLiC (Generalized Aerosol Retrieval from Radiometer and Lidar Combined data) [49] и упрощенная версия LiRIC (Lidar/Radiometer Inversion Code) [50] (создан автоматизированный пакет). Алгоритмы основаны на совместном использовании данных AERONET и EARLINET (только 3β) в светлое время суток. Совместное использование лидарных и фотометрических измерений приводит к лучшим результатам для пылевого или вулканического аэрозоля, характеризующегося большим вкладом грубодисперсной фракции. Для моделей с доминирующим вкладом мелкодисперсной фракции качественного улучшения ПП не происходит. Ночные измерения позволяют определять вертикальные профили ПП + ФР при оптической толщине тропосферного аэрозоля $\leq 0,1$ на длине волны 532 нм, подробнее см. [46, разд. 5 и рис. 5].

В настоящей работе оптические коэффициенты рассчитываются по значениям искомым величин $m^{\text{true}} + U^{\text{true}}(r)$ согласно (1); на каждый коэффициент g_j^{meas} накладывается случайный шум, равномерно распределенный в диапазоне $-5\% \leq \varepsilon_j^{\text{meas}} \leq 5\%$ (прямая задача). Затем проводится восстановление $m^{\text{est}} + U^{\text{est}}(r)$ с учетом возможностей оценивания обеих характеристик (обратная задача). Для обеих задач используются следующие приближения: 1) сферические частицы; 2) среднее по спектру значение показателя преломления; 3) единое для различных фракций ФР значение ПП. В разд. 1 приводится обоснование метода восстановления функции распределения при известном показателе преломления. В параграфе 1.2 изложены особенности выбранного метода статистической регуляризации. Преимущества его использования представлены полностью в [44]. Разд. 2 и 3 дают подробное описание алгоритма совместного оценивания обеих микрофизических характеристик, что является целью настоящей работы. Параграфы 2.1 и 2.2 показывают изменение погрешностей оценивания ПП с ростом поглощения. Разд. 3 иллюстрирует возможности корректного определения ПП + ФР.

1. Восстановление функции распределения

Восстановление $U(r)$ основано на преобразовании (1) в систему линейных алгебраических уравнений. При известном или уже определенном показателе преломления m^{true} искомая функция распределения определяется разложением по заданной системе базисных функций $B_k(r)$ с неизвестными весовыми коэффициентами u_k :

$$U(r) = \sum_k B_k(r)u_k + \varepsilon^{\text{base}}(r). \quad (2)$$

Согласно [26–29] используется набор треугольных базисных функций с плавающими границами r_{\min} , r_{\max} . Конкретный вид $B_k(r)$ слабо влияет на качество восстановления функции распределения, а их количество может варьироваться [28]. С учетом (2) система (1) сводится к системе уравнений относительно вектора весовых коэффициентов $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{fine}} + \mathbf{u}_{\text{coarse}}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}. \quad (3)$$

где $\varepsilon_j = \varepsilon_j^{\text{meas}} + \varepsilon_j^{\text{math}}$ – сумма экспериментальных и математических погрешностей, $\varepsilon_j^{\text{math}} = \int K_j(m, r) \times \varepsilon^{\text{base}}(r) dr$, элементы матрицы \mathbf{A} представимы в виде $A_{jk}(m) = \int K_j(m, r) B_k(r) dr$. В первом приближении целесообразно использовать логарифмическую шкалу r_k , так как это позволяет рассматривать результаты оценивания для мелких и для крупных частиц в одном масштабе. Если фиксировать $r_{\min} = 0,04$ мкм и задавать шесть величин $r_{\max} = 7,5–10$ мкм (с шагом 0,5 мкм), средние значения по абсциссе $U(r)$ составляют $r_{\text{fine}, k} = 0,067; 0,10; 0,16; 0,24; 0,36; 0,56$ для $k=1–6$ и мелкодисперсной фракции (МДФ); $r_{\text{coarse}, k} = 0,72; 1,08; 1,62; 2,42; 3,36; 5,42$ для $k=7–12$ и грубодисперсной фракции (ГДФ). Также при обращении (3) обеспечивается положительная определенность искомым коэффициентам разложения u_k [13], что является необходимым условием для оценки показателя преломления [5].

В первой серии численных экспериментов исследуются погрешности оценивания ФР при известном ПП. В качестве искомым функций распределения берутся представленные на сайте AERONET (<http://aeronet.gsfc.nasa.gov>) результаты для ст. «Звенигород» за 2011–2012 гг., всего 462 эмпирические модели. Моделям приписывается одно из четырех значений $m_{\text{real}}^{\text{true}} = 1,5; 1,55; 1,6; 1,65$; мнимая часть не меняется, $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0$.

1.1. Метод регуляризации Тихонова

Устойчивое к погрешностям измерения g_j решение (3), основанное на регуляризации Тихонова [51], можно записать в явном виде [52]:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{g}, \quad (4)$$

где \mathbf{T} – операция транспонирования; α – параметр регуляризации; \mathbf{Q} – некоторая квадратная матрица. Квадратичная форма $\mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u}$ является аппроксимацией стабилизатора Тихонова

$$\Omega[u] = \int \left\{ q_0 u^2 + q_1 \left[\frac{du}{dr} \right]^2 + q_2 \left[\frac{d^2u}{dr^2} \right]^2 + \dots \right\} dr,$$

где q_i – заданные неотрицательные величины. В частности, если $q_0 \neq 0$ (остальные $q_i = 0$), используется регуляризация нулевого порядка $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичная матрица. При $q_0 \neq 0$, $q_1 \neq 0$ из (4) может быть получено решение со стабилизатором первого порядка, матрица $\mathbf{Q} = q_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T + q_0 \mathbf{I}$ имеет ленточный вид и отличные от нуля главную и две соседние с ней диагонали. Аналогичным образом могут быть получены матрицы и для старших производных. В рассматриваемой нами задаче базисные функции в (2) выбираются таким образом, чтобы обеспечить равномерное разложение $U(r)$ на оси $\ln r$. Необходимо учитывать, что в (4) элементы матрицы \mathbf{Q} зависят от r . В противном случае значение α может быть завышено в области малых значений радиуса (что приведет к заглаживанию $U_{\text{fine}}(r)$) и/или занижено в области больших значений (возможны осцилляции $U_{\text{coarse}}(r)$).

Результаты решения методом регуляризации Тихонова представлены на рис. 1. Реконструкция объемной ФР проводилась для стабилизаторов нулевого (ТМ0), первого (ТМ1) и второго (ТМ2) порядков, обеспечивающих гладкость искомой функции и ее производных. В верхней части рисунка разрешающие возможности (4) показаны на примере оценивания концентрации мелких $V_{\text{fine}} = \int U_{\text{fine}}(r) dr$ ($0,04 < r < 0,6$ мкм, левая часть) и крупных $V_{\text{coarse}} = \int U_{\text{coarse}}(r) dr$ ($0,6 < r < 10$ мкм, правая часть) частиц; при расчетах использовались восстановленные $U^{\text{est}}(r)$, всего 462 модели. Столбец гистограммы показывает, в скольких реализациях (в процентах от 462) погрешность оценивания параметра попадает в указанный диапазон. Поскольку точность определения мелкодисперсной фракции выше, шаг для гистограмм составляет 1 и 5% для V_{fine} и V_{coarse} соответственно. Нижняя часть рисунка иллюстрирует изменение 2 из 462 профилей $U^{\text{est}}(r)$, полученных согласно (4) и (2).

Анализ результатов показывает, что, во-первых, лучшее качество восстановления U_{fine} обеспечивает использование логарифмической производной, при этом порядок стабилизатора на погрешности определения U_{fine} практически не влияет [44, рис. 1]. Во-вторых, точность оценивания U_{coarse} , напротив, обуславливает заданный порядок стабилизатора. Для всех восстановленных $U_{\text{coarse}}^{\text{est}}(r)$ проявляются величины: 1) $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} < 2,5$ мкм при стабилизаторе нулевого порядка ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$), 2) $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} \in [2,5; 4,0]$ мкм ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1$) или 3) $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} > 4,0$ мкм ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2$). Эта особенность приводит к искажению V_{coarse} , и $U_{\text{coarse}}(r)$. Для мелких частиц среднее (дисперсия) относительной погрешности ΔV_{fine} составляют 1,86% (3,39),

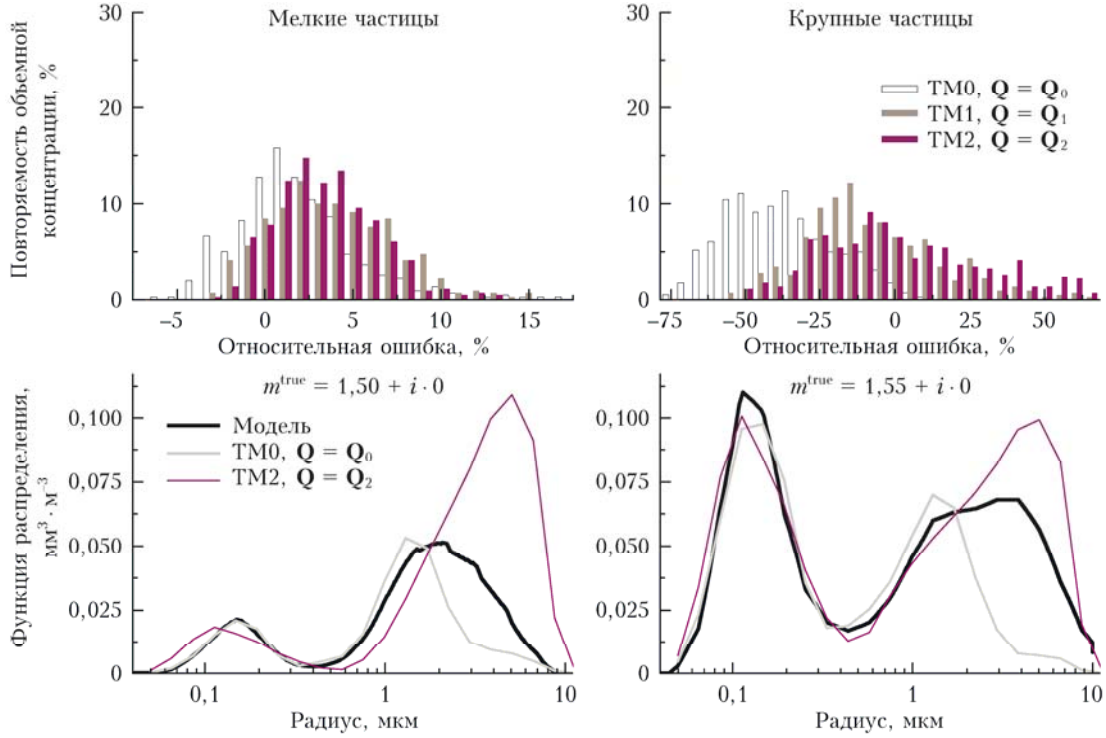


Рис. 1. Определение функции распределения методом регуляризации Тихонова при известном показателе преломления. Вверху – погрешности оценивания концентрации частиц для полного набора моделей; внизу – примеры восстановления $U(r)$ с различным порядком стабилизатора (4) для двух эмпирических моделей из 462

$Q = Q_0$ либо 3,33% (2,92), $Q = Q_2$; для крупных частиц они меняются на -38,15% (17,77), $Q = Q_0$ либо 5,63% (37,62), $Q = Q_2$. Столь выраженная смещенность R_{coarse} и высокие значения ΔV_{coarse} обусловлены информационной недостаточностью лидарных измерений. Даже при известном показателе преломления для корректного восстановления $U_{\text{coarse}}(r)$ использование (4) неоптимально. При построении стабилизатора требуется дополнительная априорная информация, которая может быть получена из предварительной оценки R_{coarse} .

1.2. Метод статистической регуляризации

В предположении нормального распределения и независимости векторов \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varepsilon}$ решение (3), полученное по методу статистической регуляризации, может быть записано в явном виде [52]:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{W}_u^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{W}_\varepsilon^{-1} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_\varepsilon^{-1} \mathbf{g} + \mathbf{W}_u^{-1} \boldsymbol{\mu}_u). \quad (5)$$

Математические ожидания $\boldsymbol{\mu}_u$, $\boldsymbol{\mu}_g$ векторов \mathbf{u} , \mathbf{g} (в предположении $\boldsymbol{\mu}_\varepsilon = 0$) и ковариационные (ненормированные корреляционные) матрицы \mathbf{W}_u , \mathbf{W}_ε , \mathbf{W}_g должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_u &= \boldsymbol{\mu}_g, \\ \mathbf{A} \mathbf{W}_u \mathbf{A}^T + \mathbf{W}_\varepsilon &= \mathbf{W}_g. \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что помеха является белым шумом; после подстановки $\mathbf{W}_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}$ решение (5) преобразуется:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{W}_u^{-1})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{g} + \alpha \mathbf{W}_u^{-1} \boldsymbol{\mu}_u), \quad (7)$$

где $\alpha = \alpha(\sigma_\varepsilon)$ – параметр регуляризации. Соотношение (7) близко к оптимальной линейной фильтрации, однако предпочтительнее, поскольку дополнительный член во втором сомножителе обеспечивает асимптотическое значение $u = \mu_u$ при $\alpha \mathbf{W}_u^{-1} \rightarrow \infty$.

Решение по методу Тихонова также будет иметь вид (7), если использовать стабилизатор $\Omega[u - \mu_u]$. В случае плохой обусловленности системы (1) обращение (6) относительно $\boldsymbol{\mu}_u$ и \mathbf{W}_u является некорректной задачей, однако требования к точности их оценивания заметно ниже, чем к точности восстановления u . В связи с этим можно использовать упрощенные аппроксимации априорных моментов, и чем меньше число «свободных» параметров, тем устойчивее получаемое решение.

На основании (7) можно строить алгоритмы, инвариантные при восстановлении как случайных, так и детерминированных величин. Для единственного набора оптических коэффициентов \mathbf{g} формально (значения несуществующего статистического ансамбля заменяются нулями) справедливо

$$\boldsymbol{\mu}_g = \mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\mu}_u = \mathbf{u}, \quad W_{u,ij} = u_i u_j \approx \delta_i \delta_j, \quad (8)$$

где $\delta = \delta_{\text{fine}} + \delta_{\text{coarse}}$ – некоторая оценка искомого \mathbf{u} . Соотношение (8) дает возможность определения \mathbf{W}_u по текущему набору, без каких-либо дополнительных предположений, что позволяет проанализировать стабилизатор (7) и выделить его ключевые параметры. Определитель $\det(\mathbf{W}_u) \equiv 0$, однако при вычислении обратной матрицы в (7) допустимо использование

$\mathbf{W}_u(\gamma) = \mathbf{W}_u + \gamma \mathbf{I}$, $\gamma \approx 10^{-10}$. Анализ показывает, что, во-первых, оценка \mathbf{W}_u позволяет учесть информацию о наличии двух фракций (фактически информацию о наличии нескольких экстремумов). Во-вторых, к изменению параметров МДФ чувствительны элементы, расположенные на главной диагонали $\mathbf{W}_u^{-1}(\gamma)$ или соседних с ней. Для ГДФ (прежде всего, значения R_{coarse}) чувствительность проявляется на противоположных элементах, во 2 и 4 квадрантах изображения $\mathbf{W}_u^{-1}(\gamma)$ [44, рис. 4]. Пренебрежение ими вновь приведет к результатам, показанным в нижней части рис. 1, даже при точно заданных значениях на главной диагонали и двух соседних с ней. Полученный результат является идеализацией, поскольку матрица \mathbf{W}_u рассчитывается по известному \mathbf{u} . Для реальных измерений, при априорной неопределенности по \mathbf{W}_u , целесообразно предварительно оценивать вектор весовых коэффициентов δ , несмещенность значений которого для крупных частиц определяется величиной R_{coarse} .

Представим искомую δ как сумму двух наборов, с коэффициентами для мелких δ_{fine} и крупных δ_{coarse} частиц раздельно. Величины δ_{fine} можно определять методом регуляризации Тихонова (4), поскольку порядок стабилизатора на погрешности восстановления $U_{\text{fine}}(r)$ практически не влияет (см. рис. 1). Для оценки δ_{coarse} аппроксимируем $U_{\text{coarse}}(r)$ полиномом $b_0 + b_1 \ln r + b_2 (\ln r)^2$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$b_0 \mathbf{l}_0 + b_1 \mathbf{l}_1 + b_2 \mathbf{l}_2 = \mathbf{g}_{\text{coarse}}, \quad (9)$$

где $\mathbf{l}_0 = \mathbf{A}_{\text{coarse}} \mathbf{e}$; $\mathbf{l}_1 = \mathbf{A}_{\text{coarse}} (\ln \mathbf{r})$; $\mathbf{l}_2 = \mathbf{A}_{\text{coarse}} (\ln \mathbf{r})^2$; $\mathbf{g}_{\text{coarse}} = \mathbf{g} - \mathbf{g}_{\text{fine}} = \mathbf{g} - \mathbf{A}_{\text{fine}} \delta_{\text{fine}}$; \mathbf{e} — единичный вектор, \mathbf{r} составлен из отсчетов разложения (2) для крупных частиц. Решение (9) относительно коэффициентов b_i сводится к решению системы трех линейных уравнений, $\mathbf{Bb} = \mathbf{d}$, где элементы матрицы \mathbf{B} и вектора \mathbf{d} представимы в виде $B_{ik} = \sum_{j=1}^5 \mathbf{l}_i \mathbf{l}_k$,

$d_k = \sum_{j=1}^5 \mathbf{g}_{\text{coarse}} \mathbf{l}_k$. При известных коэффициентах b_i оценка среднего радиуса определяется по формуле

$$R_{\text{coarse}}^{\text{est}} \approx \exp(-0,5b_1/b_2). \quad (10)$$

До $R^* = 3$ мкм оценка (10) корректна (область I, $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} \cong R_{\text{coarse}}^{\text{true}}$). Однако с возрастанием радиуса появляется ее смещение в сторону больших значений, неконтролируемый рост (область II, $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} > 3$ мкм, $3 \leq R_{\text{coarse}}^{\text{true}} \leq 4,2$ мкм). При $R^{**} = 4,2$ мкм происходит срыв значений (10) и последующее смещение в сторону меньших значений (область III, $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} < 0,6$ мкм, $R_{\text{coarse}}^{\text{true}} > 4,2$ мкм) [44, рис. 5]. Неустойчивость оценивания $R_{\text{coarse}}^{\text{true}} > 3$ мкм обусловлена особенностями поведения факторов эффективности (элементов матрицы $\mathbf{A}_{\text{coarse}}$) и близостью значений коэффициентов b_1 и b_2 . Но границы областей R^* и R^{**} устойчивы и практически не зависят от вариаций показателя преломления или других параметров ФР. Таким

образом, $R^* = 3$ мкм можно считать верхним пределом корректного определения R_{coarse} (и самой $U(r)$) по лидарным измерениям. Ниже R^* (область I) величины μ_u и \mathbf{W}_u в (7) могут быть предварительно определены по текущему набору \mathbf{g} согласно (8). Выполняется $\delta \cong \mathbf{u}$, поскольку δ_{fine} однозначно восстанавливается, а параболическая аппроксимация $U_{\text{coarse}}(r)$ дает корректные оценки R_{coarse} и δ_{coarse} . Выше R^* (области II и III) соотношение (10) позволяет определить только диапазон изменения среднегеометрического радиуса. Однако для применения (7) допустимо использование первых моментов ансамбля эмпирических моделей, разделенных по значениям R_{coarse} : 146 моделей из 462 при 3,36 мкм (область II) или 104 модели при 5,42 мкм (область III). Искомая функция $U(r) = U_{\text{fine}}(r) + U_{\text{coarse}}(r)$ может быть получена из соотношений (7) и (2).

Результаты решения (3) методом статистической регуляризации представлены на рис. 2. Рисунок аналогичен рис. 1; восстановление $U(r)$ проводилось для того же набора моделей с различными матрицами \mathbf{W}_u : *a priori* заданной (метод СРМ0, ансамбль моделей с учетом (10)), известной (СРМ1, текущий сеанс) и *a posteriori* оцениваемой (СРМ2, текущий сеанс/ансамбль моделей с учетом (10)). Применение СРМ0 частично помогает уменьшить смещение параметров ГДФ. Однако разный диапазон ΔV при различных фракциях сохраняется: для мелких частиц среднее (дисперсия) составляют 0,16% (2,39), а для крупных — 1,81% (27,20). В СРМ1 матрица \mathbf{W}_u предполагается известной и рассчитывается по известному вектору весовых коэффициентов; для нее точности оценивания V_{fine} и V_{coarse} сопоставимы со значениями -0,16% (1,37) и -5,77% (2,20) соответственно. Небольшое смещение профилей $U_{\text{coarse}}(r)$ обусловлено вариациями r_{max} в диапазоне 7,5–10,0 мкм. Таким образом, «идеальный» стабилизатор существует; далее он позволит исследовать погрешности оценивания комплексного показателя преломления. СРМ2 является результатом использования приближенного алгоритма: проводится предварительная реконструкция \mathbf{W}_u для крупных частиц, что обеспечивает корректное восстановление $U_{\text{coarse}}(r)$; среднее (дисперсия) ΔV_{coarse} уменьшаются до 2,75% (14,47). Два «правдоподобных» набора μ_u и \mathbf{W}_u представляют собой всю используемую количественную априорную информацию. В результате получена несмещенная оценка концентрации крупных частиц, из-за параболической аппроксимации до $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} < 3$ мкм лучшая, чем при использовании СРМ0. Метод СРМ2 будет применяться в качестве основного в следующих разделах.

Ниже мы покажем, что даже при точно определяемой функции распределения проявляются ошибки оценивания показателя преломления, а также — что значения ПП всегда локализованы внутри области M низких значений функционала: $\forall m \Phi(m) \leq E(\epsilon^{\text{meas}} + \epsilon^{\text{math}}) < \epsilon^{\text{meas}}$. Их расположение связано с поглощением.

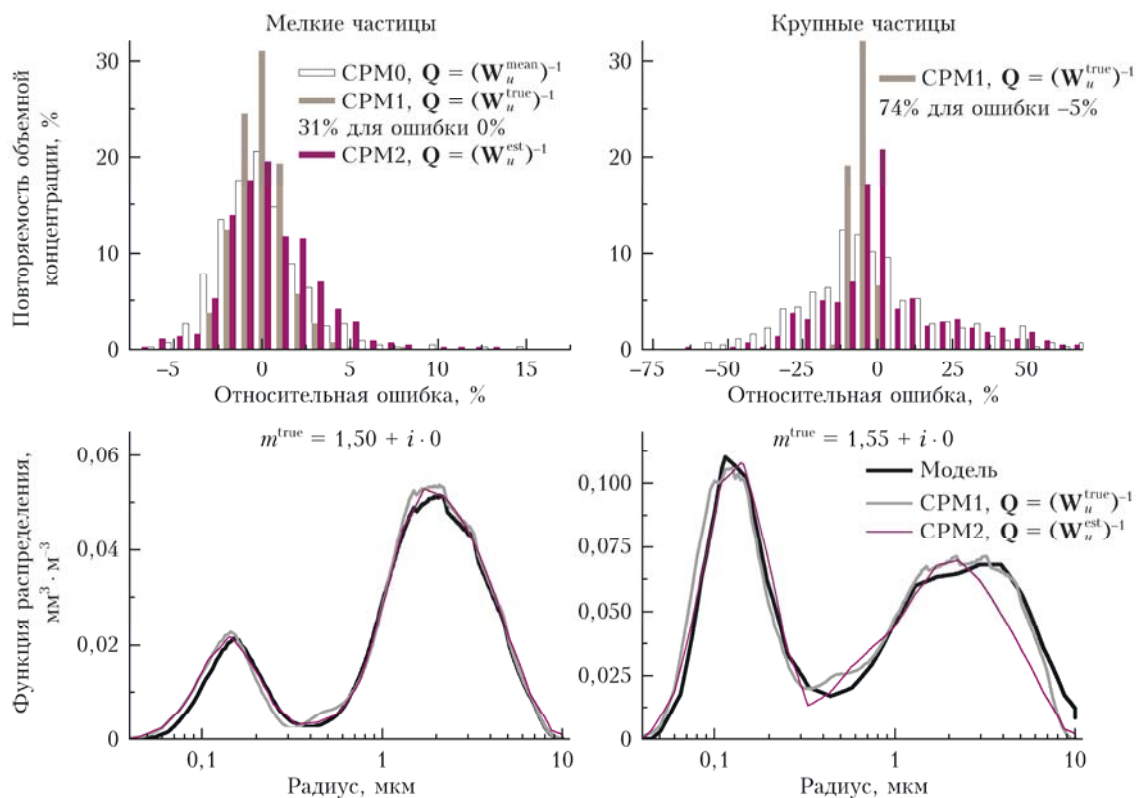


Рис. 2. Определение функции распределения методом статистической регуляризации при известном показателе преломления. Вверху – погрешности оценивания концентрации частиц для полного набора моделей; внизу – примеры восстановления $U(r)$ с различными ковариационными матрицами искомого решения для двух эмпирических моделей из 462

2. Определение показателя преломления

Задача восстановления комплексного показателя преломления сводится к прямой минимизации функционала невязки [29, 33, 37, 38, 45, 46]:

$$\Phi_1(m) = \left\| g_j^{\text{meas}} - g_j^{\text{calc}}(m) \right\| = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \left| \frac{g_j^{\text{meas}} - g_j^{\text{calc}}(m)}{g_j^{\text{meas}}} \right| \cdot 100\%. \quad (11)$$

Функционал, с одной стороны, зависит от измеряемых ($3\beta + 2\sigma$) оптических коэффициентов g_j^{meas} , а с другой – от тех же коэффициентов, рассчитанных по восстановленным микрофизическим характеристикам, $g_j^{\text{calc}}(m)$. Целесообразно использовать относительную ошибку в (11), поскольку коэффициенты σ и β имеют разную размерность.

Информативность оптических коэффициентов предопределена особенностями факторов их эффективности [29, рис. 1]. Коэффициенты ослабления, зависящие от рассеяния и поглощения, обеспечивают корректное оценивание функции распределения в области < 1 мкм, коэффициенты обратного рассеяния позволяют определить ее выше 1 мкм. Кроме того, при фиксированных m_{real} и $U(r)$ увеличение m_{image} приводит к заметному уменьшению β , но почти не влияет на σ . К показателю преломления чув-

ствителен спектральный ход лидарного отношения σ/β . Совместное использование оптических характеристик дает возможность одновременного оценивания m и $U(r)$.

Основа прямой минимизации функционала (название этого метода в английской литературе look up table) – поиск минимальных значений $\Phi(m)$ по всему физически обоснованному набору значений составляющих показателя преломления и без каких-либо дополнительных априорных предположений. Если погрешности отсутствуют, для любого значения ПП существует единственный минимум $\Phi(m) \equiv 0$. Наличие шумов искажает поверхность значений функционала и приводит к появлению дополнительных так называемых «ложных» минимумов. Их расположение на плоскости $(m_{\text{real}}, m_{\text{image}})$ неслучайно: минимумы всегда локализованы внутри области M , и при близких значениях $\Phi(m)$ любой из них может оказаться глобальным. Именно тогда для обеих составляющих ПП проявляются значимые ошибки и в задаче оценки m отсутствует единственность решения.

Во второй серии численных экспериментов исследуются погрешности оценивания показателя преломления для известной (CPM1) или определяемой (CPM2) функции распределения. При совместном восстановлении m и $U(r)$ требуются затраты машинного времени, большие примерно в $N_{\text{real}} \cdot N_{\text{image}}$ раз, где $N_{\text{real}} = N(m_{\text{real}})$, $N_{\text{image}} = N(m_{\text{image}})$ – количество точек по ординате и абсциссе ПП. Поэтому для

каждой из восьми величин $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0; 0,001; 0,006; 0,01; 0,02; 0,04; 0,06; 0,1$ проводится расчет g_j^{meas} только для первых 50 эмпирических моделей $U^{\text{true}}(r)$ из 462 с теми же изменяющимися значениями $m_{\text{real}}^{\text{true}} = 1,50$ (13 моделей), 1,55 (13), 1,60 (12), 1,65 (12). Разрешающие возможности определения микрофизических характеристик рассматриваются на 400 моделях, $400 = 8(m_{\text{image}}^{\text{true}}) \cdot 50(U^{\text{true}}(r) + m_{\text{real}}^{\text{true}})$.

2.1. Оценивание показателя преломления при отсутствии поглощения

Используемый алгоритм включает несколько этапов. В каждой точке на плоскости $(m_{\text{real}}, m_{\text{image}})$ по одному набору $m^{\text{est}} = m_{\text{real}}^{\text{est}} + i \cdot m_{\text{image}}^{\text{est}}$ рассчитываются ядра уравнений (1), оценивается $U^{\text{est}}(r)$ согласно (7) или (4), по (11) определяются значения функционала невязки. На всей плоскости верен только один набор $m^{\text{est}} + U^{\text{est}}(r)$ из $N = N_{\text{real}} \cdot N_{\text{image}}$, всегда расположенный в области низких значений $\Phi_1(m)$. Но задача решена, когда данный набор соответствует глобальному минимуму функционала. С другой стороны, одному значению первой составляющей — или m_{real} , или m_{image} — соответствует единственный локальный минимум $\Phi_1(m)$ во всем диапазоне изменения второй составляющей — или m_{image} , или m_{real} . Если минимум расположен на границе $(m_{\text{real}}, m_{\text{image}})$, относительно высокое значение функционала подсказывает, что реальный минимум находится вне рассматриваемой плоскости. Когда одна из компонент ПП определяется однозначно, погрешность оценивания второй невелика и использование глобального минимума $\Phi_1(m)$ вполне допустимо. К счастью, при слабом поглощении действительная часть восстанавливается корректно. Кроме того, анализ результатов численного моделирования

целесообразно проводить для абсолютных погрешностей $\delta m = m^{\text{est}} - m^{\text{true}}$. Критерий относительных ошибок мало эффективен, так как диапазон изменения m_{real} составляет единицы процентов, а мнимая часть может быть сколь угодно близка к 0.

Восстановление составляющих показателя преломления для $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0$ представлено на рис. 3. ПП рассчитывается по двум сеткам при логарифмической шкале m_{image} .

Сетка 1a, подробная действительная часть, верхняя часть рис. 3 и левая панель рис. 4: $m_{\text{real}} \in [1,35; 1,65]$ с шагом 0,01, $N_{\text{real}} = 30$ для фиксированного значения m_{image} ; $m_{\text{image}} = 0,0001; 0,0005; 0,001; 0,005; 0,01; 0,05; 0,1$; $N_{\text{image}} = 7$ для фиксированного значения m_{real} ; $N = N_{\text{real}} \cdot N_{\text{image}} = 210$ точек всего.

Сетка 1б, подробная мнимая часть, нижняя часть рис. 3 и правая панель рис. 4: $m_{\text{real}} \in [1,35; 1,65]$ с шагом 0,05, $N_{\text{real}} = 7$ для фиксированного значения m_{image} ; $m_{\text{image}} = 0,0001; 0,0002; \dots, 0,001; 0,002; \dots, 0,01; 0,02; \dots, 0,1$; $N_{\text{image}} = 30$ для фиксированного значения m_{real} ; $N = N_{\text{real}} \cdot N_{\text{image}} = 210$ точек всего.

Каждый столбец гистограммы на рис. 3–5 показывает, для скольких реализаций (в процентах от 50 моделей) ошибка оценивания искомого параметра попадает в указанный диапазон.

При $m_{\text{image}}^{\text{true}} \equiv 0$ локальные минимумы функционала расположены вдоль оси m_{image} , и правая панель рис. 3 иллюстрирует диапазон изменения самой мнимой части $\delta m_{\text{image}} = m_{\text{image}}^{\text{est}} - m_{\text{image}}^{\text{true}} \equiv m_{\text{image}}^{\text{est}}$. На левой панели рис. 3 показаны погрешности оценивания действительной части $\delta m_{\text{real}} = m_{\text{real}}^{\text{est}} - m_{\text{real}}^{\text{true}}$. В глобальном минимуме $m_{\text{real}}^{\text{est}} \cong m_{\text{real}}^{\text{true}}$, действительная часть восстанавливается корректно. Среднее отклонение δm по 50 моделям (и средняя относительная погрешность Δm)

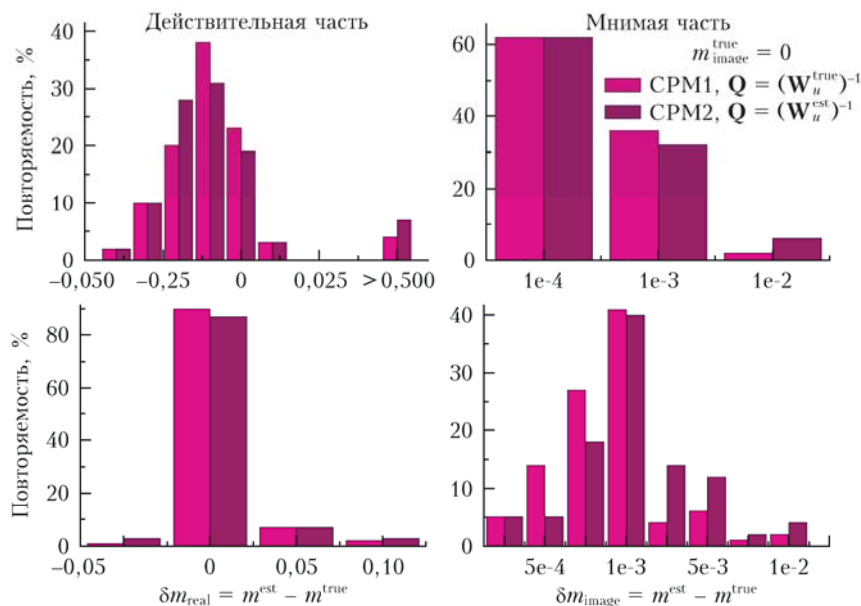


Рис. 3. Погрешности оценивания показателя преломления при отсутствии поглощения и при одновременном определении ПП + ФР. Для минимизации функционала (11) используются *сетки 1a* (вверху) или *1б* (внизу), в каждой точке сетки проводится восстановление $U(r)$ методом статистической регуляризации с различными ковариационными матрицами искомого решения

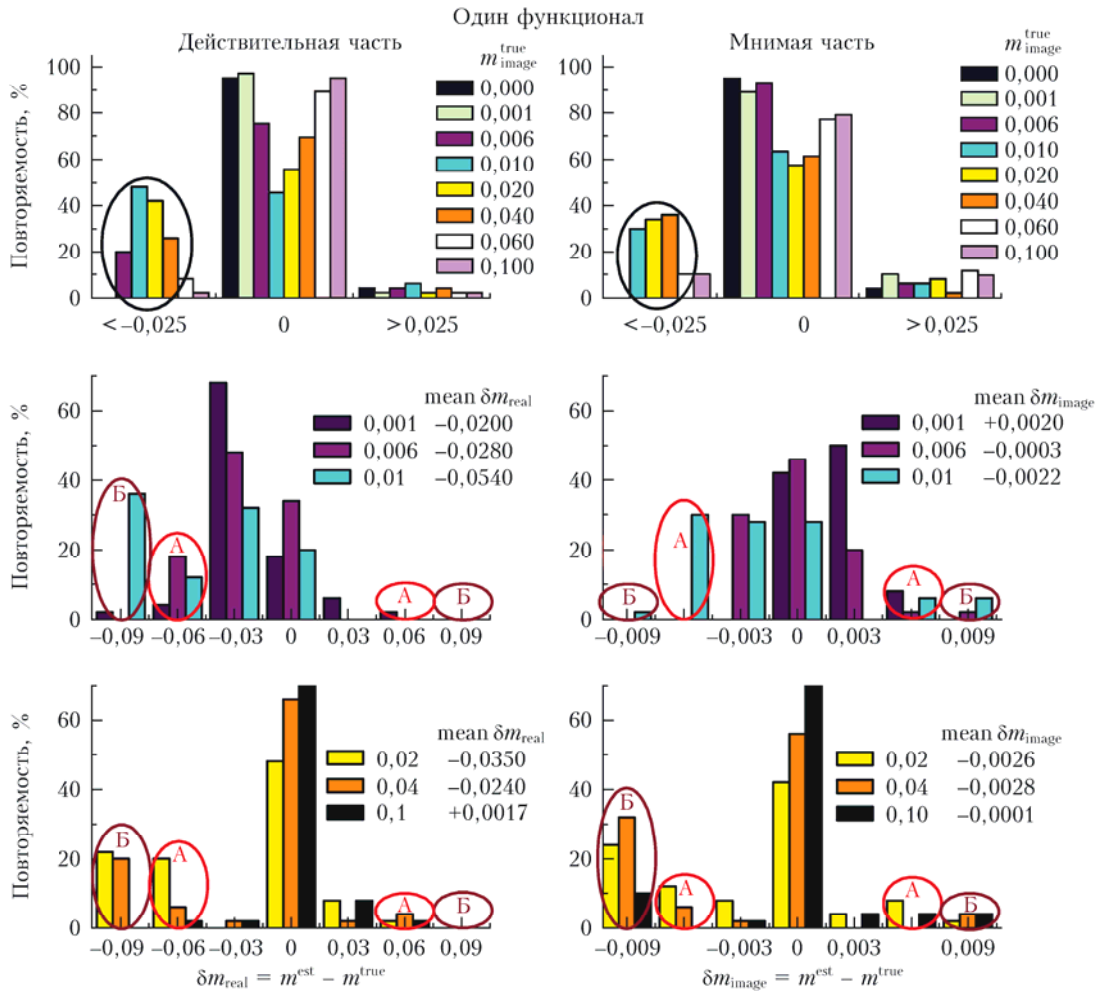


Рис. 4. Изменение погрешностей оценивания показателя преломления с возрастанием поглощения, одновременно ПП + ФР, при одном функционале: различия *модельного* и *восстановленного* m ; для каждой величины поглощения $m_{\text{image}}^{\text{true}}$ используются 50 моделей ($U^{\text{true}}(r) + m_{\text{real}}^{\text{true}}$) (вверху); подробные изменения δm при *слабом* (в центре) или *сильном* поглощении (внизу)

составляют $-0,0002$ ($-0,024\%$) для действительной компоненты и $+0,0015$ ($\infty\%$, т.е. невозможно определить) для мнимой компоненты. Отклонение δm_{real} вполне допустимо при идентификации «истинного» типа высотного, рассеивающего аэрозоля [26, 28, 29].

Совместное определение микрофизических характеристик проводится с помощью двух алгоритмов восстановления ФР. Сравнение результатов точного СРМ1 ($\epsilon^{\text{math}} = 0$, $\epsilon^{\text{meas}} \neq 0$) и приближенного СРМ2 ($\epsilon^{\text{math}} \neq 0$, $\epsilon^{\text{meas}} \neq 0$) показывает влияние математических ошибок на значения функционала невязки. Поскольку погрешности оценивания составляющих ПП близки для обоих методов, можно утверждать, что проявляются они в первую очередь из-за неоднозначности определения m . Далее будет использоваться только алгоритм SRM2. В следующем разделе исследуется влияние поглощающих свойств аэрозоля на корректную оценку показателя преломления. Возможные ошибки восстановления $U(r)$ будут представлены в конце разд. 3.

2.2. Оценивание показателя преломления при наличии поглощения

Согласно [45] при выполнении $\epsilon^{\text{math}} = 0$, $\epsilon^{\text{meas}} \neq 0$ (фактически метод СРМ1 для ФР) лидарные измерения позволяют удовлетворительно оценивать m в интервале поглощения от 0,0001 до 0,1. Близкие значения функционала в локальных минимумах могут проявляться и для среднего поглощения. В частности, в [38, с. 191] показано, что локальные минимумы $m^{\text{est}} = m^{\text{true}} = 1,5 + i \cdot 0,015$ (В), $m^{\text{est}} = 1,472 + i \cdot 0,008$ (В.1) и $m^{\text{est}} = 1,639 + i \cdot 0,041$ (В.2) соответствуют единым величинам оптических коэффициентов и области M со значениями функционала $< 0,1$, если использовать $\epsilon^{\text{math}} \neq 0$, $\epsilon^{\text{meas}} = 0$. Но оба указанных варианта шума являются идеализацией. Ниже поведение локальных минимумов будет рассмотрено в условиях, близких к условиям реальных измерений, при $\epsilon^{\text{meas}} \neq 0$, $\epsilon^{\text{math}} \neq 0$. Дополнительно отметим, что для $m_{\text{image}}^{\text{true}} > 0,1$ рассчитанные

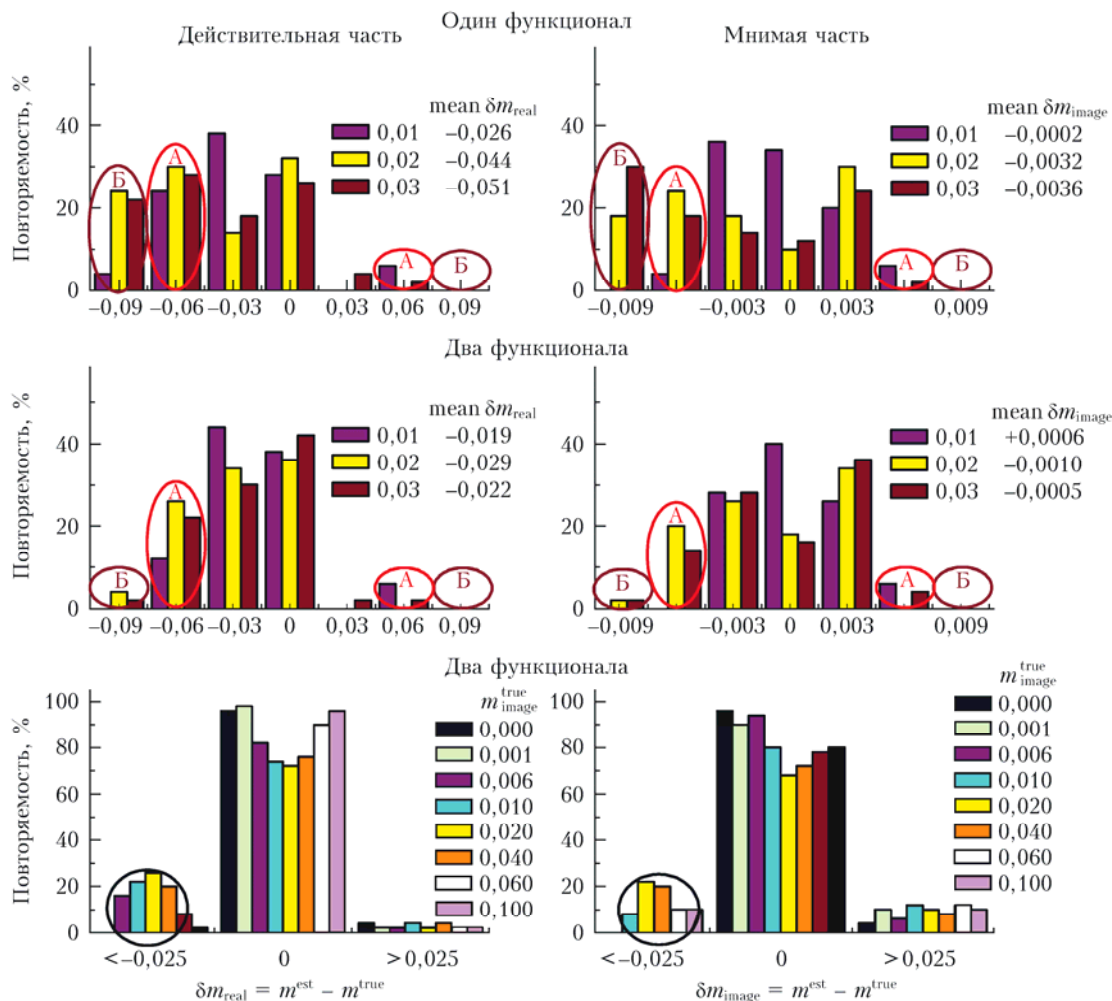


Рис. 5. Влияние используемых функционалов на погрешности оценивания показателя преломления, одновременно ПП + ФР. Подробное изменение δm для одного (вверху) или двух функционалов (в центре), *среднее* поглощение; различия *модельного* и *восстановленного* m при совмещении $\Phi_1(m)$ и $\Phi_2(m)$, для каждой величины поглощения m^{true} используются 50 моделей ($U^{\text{true}}(r) + m^{\text{true}}_{\text{real}}$) (внизу)

значения ядер (1) приводят к некорректному восстановлению $U^{\text{est}}(r)$, поскольку пропадает информация о крупных частицах и даже разделение на фракции. Именно поэтому значения $m_{\text{image}} > 0,1$ не рассматриваются. Подробнее особенности изменения ядер системы (1) с ростом поглощения для сферических частиц представлены в [28, разд. 2, 3].

Верхняя часть рис. 4 показывает особенности восстановления ПП для восьми величин $m^{\text{true}}_{\text{image}}$, т.е. для всех 400 численных моделей. Левая панель рис. 4 иллюстрирует погрешности оценивания действительной части, а правая – мнимой части. Расхождение модельного и восстановленного значений соответствует «хорошим» оценкам, если $|\delta m_{\text{real}}| < 0,025$ и $|\delta m_{\text{image}}| < 0,0025$. Столбцы с $|\delta m_{\text{real}}| \geq 0,025$ и $|\delta m_{\text{image}}| \geq 0,0025$ демонстрируют «плохие» оценки m^{est} .

Анализ позволяет выделить некие особенности восстановления показателя преломления. Поглощение (из-за разнообразия ошибок определения ПП) условно можно разделить на три области: $m^{\text{true}}_{\text{image}} < 0,01$

(слабое поглощение), $m^{\text{true}}_{\text{image}} \in [0,01; 0,04]$ (среднее поглощение) и $0,04 < m^{\text{true}}_{\text{image}} \leq 0,1$ (сильное поглощение). В первой области правомочность использования глобального минимума (11) оправдана, $m^{\text{est}}_{\text{real}} \cong m^{\text{true}}_{\text{real}}$, подобно слабо поглощающим частицам разд. 2.1. С увеличением поглощения некорректность оценивания ПП растет и проявляется во второй области. Однако особенности изменения ядер $K_j(m, r)$ во второй области не проявляются. Дальнейшее возрастание поглощения приводит к уменьшению разницы между m^{true} и m^{est} , и в третьей области вновь допускается использование глобального минимума $\Phi_1(m)$, поскольку $m^{\text{est}}_{\text{image}} \cong m^{\text{true}}_{\text{image}}$.

Можно понять, чем обусловлены «плохие» оценки ПП во второй области, интерпретируя результаты, иллюстрируемые средней и нижней частями рис. 4; $m^{\text{true}}_{\text{image}} = 0,001; 0,006; 0,01$ и $m^{\text{true}}_{\text{image}} = 0,02; 0,04; 0,1$ соответственно. Краевые столбцы со значениями $\pm 0,06; \pm 0,09$ (m_{real}) либо $\pm 0,006; \pm 0,009$ (m_{image}) по абсциссе демонстрируют «плохие» оценки, с ошибками $0,045 \leq |\delta m_{\text{real}}| < 0,075$;

$0,0045 \leq |\delta m_{\text{image}}| < 0,0075$ (зоны А) или очень «плохие», $|\delta m_{\text{real}}| > 0,075$; $|\delta m_{\text{image}}| > 0,0075$ (зоны Б). При малом поглощении $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0$ (см. рис. 3) или 0,001 (центральная часть рис. 4) локальные минимумы $\Phi_1(m)$ находятся около искомого m^{true} . Ошибки оценивания ПП сопоставимы по расположению компонентов (отрицательные δm_{real} , положительные δm_{image}) и по их величинам. С ростом поглощения область M изменяется: для $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,006$ расхождение величин m^{true} и m^{est} возрастает, поскольку для некоторых моделей с $m_{\text{real}}^{\text{true}} = 1,50$ проявляются ложные глобальные минимумы, им соответствуют зоны А в средней части рис. 4. Когда $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,02$, ложные минимумы для моделей с $m_{\text{real}}^{\text{true}} = 1,50$ исчезают, но сохраняются для оставшихся трех величин и приводят к максимальным ошибкам $m_{\text{image}}^{\text{est}}$ (нижняя часть рис. 4). Ложные минимумы $\Phi_1(m)$ исчезают за границы рассматриваемой плоскости ПП (см. описание сеток 1а и 1б в разд. 2.1). Это также объясняет, почему далее составляющие δm улучшаются, хотя область M продолжает расширяться. Если $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,04$, ложный минимум может стать глобальным только для $m_{\text{real}}^{\text{true}} = 1,65$, результаты соответствуют в основном зоны Б. Поглощения при $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,006$ или 0,04 – в определенном смысле синонимы, поскольку совпадают средние $\delta m_{\text{real}} = -0,028$ или $-0,024$. Значительное (почти на порядок) отличие проявляется для мнимой компоненты, $\delta m_{\text{image}} = -0,0003$ или $-0,0028$. Поскольку и сами значения поглощения отличаются почти на порядок, ошибки могут быть обусловлены выбранным разложением ПП по логарифмической шкале m_{image} .

Оценивание составляющих показателя преломления приведено также на рис. 5. ПП рассчитывается по линейной шкале m_{image} , остальные параметры сеток 1а, 1б и 2а, 2б сопоставимы.

Сетка 2а: $m_{\text{real}} \in [1,35; 1,65]$ с шагом 0,02; $N_{\text{real}} = 16$ для фиксированного значения m_{image} ; $m_{\text{image}} \in [0; 0,05]$ с шагом 0,005; $N_{\text{image}} = 11$ для фиксированного значения m_{real} ; $N = N_{\text{real}} \cdot N_{\text{image}} = 176$ точек всего;

Сетка 2б: $m_{\text{real}} \in [1,35; 1,65]$ с шагом 0,05, $N_{\text{real}} = 7$ для фиксированного значения m_{image} ; $m_{\text{image}} \in [0; 0,05]$ с шагом 0,002; $N_{\text{image}} = 26$ для фиксированного значения m_{real} ; $N = N_{\text{real}} \cdot N_{\text{image}} = 182$ точки всего.

Центральные и краевые столбцы в верхней части рис. 5 демонстрируют «хорошие» и «плохие» оценки с ошибками $|\delta m_{\text{real}}| < 0,045$; $|\delta m_{\text{image}}| < 0,0045$ или $|\delta m_{\text{real}}| \geq 0,045$; $|\delta m_{\text{image}}| \geq 0,0045$. В области поглощения $m_{\text{image}}^{\text{true}} \leq 0,015$ применение линейной шкалы оправдано, поскольку для логарифмической шкалы величины $0,01 < m_{\text{image}}^{\text{est}} < 0,02$ не рассматриваются. В частности, при $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,01$ средние по 50 моделям δm уменьшаются на порядок для мнимой части и в 2 раза для действительной. Однако если $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,02$ или 0,03, выбор шкалы не играет роли, и смещение обеих составляющих m^{est} сохраняется. В диапазоне $0,15 < m_{\text{image}}^{\text{true}} < 0,04$ (так называемое среднее поглощение) локальные минимумы

$\Phi_1(m)$ слабо различимы, что приводит к максимальным ошибкам оценивания ПП по ночным лидарным измерениям.

Можно варьировать границы изменения искомого показателя преломления или подбирать шаг для его мнимой части в сетках типа 1а, 1б или 2а, 2б. Но более эффективным оказывается сужение области допустимых значений (ОДЗ) искомого m за счет увеличения количества используемых функционалов.

3. Корректное оценивание обеих микрофизических характеристик

Целесообразно сопоставлять различные функционалы невязки, например, зависящие от всех оптических коэффициентов (11) (или от спектрального хода σ/β [45]) либо только от параметров Ангстрема (A) для коэффициентов обратного рассеяния:

$$\Phi_2(m) = 0,5 \sum_{j=1}^2 \left| \frac{A_j^{\text{meas}} - A_j^{\text{calc}}(m)}{A_j^{\text{meas}}} \right| \cdot 100\%. \quad (12)$$

В глобальном минимуме функционалы дают близкие значения одной из компонент ПП: $m_{\text{real}}^{\text{est}}(\Phi_1) \approx m_{\text{real}}^{\text{est}}(\Phi_2)$ (слабое поглощение) и $m_{\text{image}}^{\text{est}}(\Phi_1) \approx m_{\text{image}}^{\text{est}}(\Phi_2)$ (сильное поглощение). Несовпадение $\Phi_i(m)$ выражено для среднего поглощения: область минимумов (11) проявляется при одновременном возрастании составляющих показателя преломления, а (12) – при убывании m_{real} с возрастанием m_{image} . Подробнее области локализации низких значений обоих функционалов для реальных лидарных измерений представлены в [53, рис. 2].

Алгоритм восстановления ПП + ФР, согласно (11), описан в разд. 2.1; для минимизации $\Phi_2(m)$ схема аналогична, только соотношение (11) меняется на (12). Для сопоставления определяемых по одной сетке функционалов достаточно рассмотреть только локальные минимумы, различные на плоскости значений ПП. Пренебрежение абсолютными величинами $\Phi_i(m)$ – фактически равноправие всех минимумов – дает возможность выделить зону их пересечения на $(m_{\text{real}}, m_{\text{image}})$ и сузить область допустимых значений показателя преломления.

Подробнее особенности определения ПП представлены в верхней и средней частях рис. 5. Различие методов $\Phi_1(m)$ и $\Phi_1(m) + \Phi_2(m)$ приводит к несовпадению участков некорректного оценивания m^{est} . Для $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,02$ и 0,03 один функционал дает примерно равный объем «плохих» ($0,045 \leq |\delta m_{\text{real}}| < 0,075$; $0,0045 \leq |\delta m_{\text{image}}| < 0,0075$) и очень «плохих» ($|\delta m_{\text{real}}| > 0,075$; $|\delta m_{\text{image}}| > 0,0075$) ошибок. Для двух функционалов вклад зон А снижается, а зон Б – почти полностью уничтожается. В итоге средние по 50 моделям значения δm_{image} уменьшаются в 3 раза, с $-0,0032$ до $-0,0010$, для $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,02$ и в 7 раз, с $-0,0036$ до $-0,0006$, для $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,03$.

На нижней части рис. 5 показаны возможности использования (11) + (12) для восьми величин $m_{\text{image}}^{\text{true}}$, т.е. для всех 400 численных моделей; результат сопоставим с верхней частью рис. 4. Обращаем внимание, что вероятность «попадания» в ложный минимум уменьшается с 40 до 20%. Более того, расхождение модельного и восстановленного значений соответствует «плохим» оценкам только для второй области поглощения и удовлетворяет соотношениям $0,025 \leq |\delta m_{\text{real}}| < 0,075$ и $0,0025 \leq |\delta m_{\text{image}}| < 0,0075$. Для единственного функционала в зоне «плохих» оценок справедливо $0,025 \leq |\delta m_{\text{real}}| < 0,150$ и $0,0025 \leq |\delta m_{\text{image}}| < 0,0150$.

Особенности восстановления функции распределения в условиях априорной неопределенности по показателю преломления зависят от возможных ошибок m , что приводит к неверному заданию ядер (1) и деформации обеих фракций $U(r)$. Верхняя часть рис. 6 иллюстрирует погрешности определения объемной концентрации ФР методом СРМ2. Его структура аналогична [44, рис. 6], но при одновременной оценке показателя преломления для $8(m_{\text{image}}^{\text{true}}) \cdot 50(U^{\text{true}}(r) + m_{\text{real}}^{\text{true}}) = 400$ моделей. Поскольку точность реконструкции мелкодисперсной фракции выше, шаг для гистограмм составляет 2 (V_{fine}) и 5% (V_{coarse}). Влияние «плохих» ошибок m проявляется при восстановлении параметров МДФ в области среднего поглощения. Для $m_{\text{image}}^{\text{true}} = 0,02$

и 50 моделей $U^{\text{true}}(r) + m_{\text{real}}^{\text{true}}$ среднее (дисперсия) ΔV_{fine} составляют $-1,06\%$ (2,86), если ПП известен и используется только (7) + (2). Когда же он оценивается, значения ΔV_{fine} увеличиваются до $11,26\%$ (10,60), (11) + (7) + (2) либо до $9,18\%$ (3,43), (11) + (12) + (7) + (2). Совместное использование $\Phi_1(m)$ и $\Phi_2(m)$ уменьшает разницу между модельным и определяемым m , что приводит к меньшей деформации $U(r)$. Для ГДФ величины ΔV_{coarse} меняются слабо и составляют либо $-4,09\%$ (22,1), (7) + (2), либо $-6,68\%$ (26,7), (11) + (7) + (2), либо $-6,80\%$ (24,3), (11) + (12) + (7) + (2). Данная особенность подтверждает, что для лидара корректность оценки $U_{\text{coarse}}(r)$ в большей степени определяется выбором стабилизатора при использовании (7) + (2) или (4) + (2).

Результаты в нижней части рис. 6 демонстрируют, как погрешность оценивания показателя влияет на внешний облик функции распределения; при известном ПП изменение самой ФР представлено в нижней части рис. 1 и 2. Левая панель рис. 6 иллюстрирует «простой случай», когда глобальный минимум (11) совпадает с одним из локальных минимумов, окружающих область пересечения (11) и (12). Правая панель рис. 6 показывает «сложный случай», когда значения обеих составляющих m^{true} и m^{est} заметно различаются при использовании только (11). Совмещение функционалов (11) и (12)

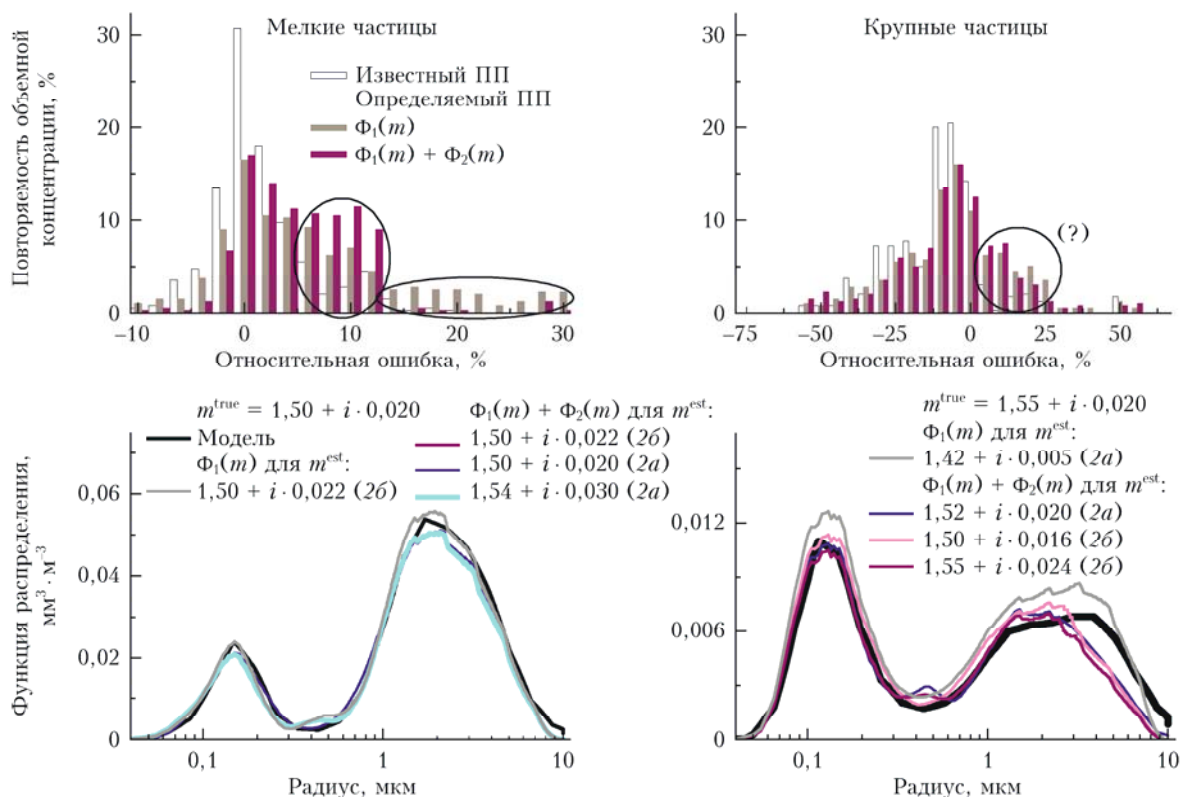


Рис. 6. Влияние используемых функционалов на определение функции распределения, одновременно ПП + ФР. Вверху – погрешности оценивания концентрации частиц, для каждой величины поглощения $m_{\text{real}}^{\text{true}}$ используются 50 моделей ($U^{\text{true}}(r) + m_{\text{real}}^{\text{true}}$); внизу – примеры восстановления $U(r)$ в локальных минимумах различных функционалов для двух эмпирических моделей из 50

дает лучшее восстановление $U(r)$, поскольку уменьшение ОДЗ показателя преломления сужает класс возможных решений (3). Корректные значения ядер (1) обеспечивают физически обоснованную область изменения u , что приводит к искомой функции распределения. Это заключение справедливо для произвольной $U(r)$, если не забывать об особенностях значений $R_{\text{coarse}}^{\text{est}} \notin [0,6; 3,0 \text{ мкм}]$ (см. разд. 1.2). Таким образом, совместное определение ПП + ФР обеспечит правдоподобное восстановление функции распределения по лидарным измерениям в темное время суток. Для показателя преломления обратная задача сложнее и пока полностью не решена.

Теоретические аспекты интерпретации измерений AERONET представлены в [24, 54]. Исследовались особенности определения ПП по коэффициентам направленного светорассеяния в диапазоне от 2 до 140° с учетом ореольной части индикатрисы рассеяния до 10°. Погрешности оценивания составляющих показателя преломления различны. Действительная часть обладает высокой точностью восстановления, и допустимо пренебрежение ее спектральным ходом. Но мнимая часть оценивается корректно, если: 1) имеет слабую спектральную селективность и 2) не попадает в область слабого поглощения, при $m_{\text{image}}^{\text{true}} < 0,005$. Условие 2, вероятно, обусловлено отсутствием информации, содержащейся в задней полусфере индикатрисы рассеяния, 140–180°. Применение лидарных измерений дает на порядок меньшую нижнюю границу корректного оценивания мнимой части, что показано в разделе 2.1. И специалистам по обратным задачам лидарного зондирования мы настоятельно рекомендуем сопоставлять различные функционалы невязки.

Заключение

Рассмотрены методические особенности совместного определения микрофизических характеристик по лидарным измерениям коэффициентов ослабления (355 и 532 нм) и обратного рассеяния (355, 532 и 1064 нм). Результаты показывают, что существуют две серьезные проблемы восстановления ПП + ФР: 1) смещенная оценка параметров функции распределения для грубодисперсной фракции; 2) неоднозначность определения m . Обе проблемы обусловлены информационной недостаточностью лидарных измерений. Решение первой проблемы приводит к адекватному выбору метода регуляризации для восстановления ФР. Решение второй не позволяет определять спектральный ход ПП, но допускает приближенную оценку его среднего значения.

Лидар обеспечивает определение обеих составляющих показателя преломления, связанного с ядрами уравнений Фредгольма, в ограниченной области $m_{\text{real}} \in [1,35; 1,65]$ и $m_{\text{image}} \in [0,0001; 0,1]$. Область изменения поглощения (или мнимой части m) условно можно разделить на три части: $m_{\text{image}} < 0,01$, $m_{\text{image}} \in [0,01; 0,04]$ и $0,04 < m_{\text{image}} \leq 0,1$. С увеличением поглощения происходит сближение значений

локальных минимумов функционала невязки и одновременно расширение их расположения на плоскости ПП. Это приводит к тому, что ложный минимум может оказаться глобальным. В первой области использование глобального минимума оправдано, поскольку минимумы находятся вблизи искомого m . В третьей области, напротив, они выходят за границы физически обоснованных значений показателя преломления, и задача решается однозначно. Проблема проявляется в середине: ложность глобального минимума приведет к смещению составляющих показателя преломления. Подчеркнем, применения одного функционала для второй области поглощения не хватает. Требуется еще один $\Phi(m)$, основанный на другом наборе оптических коэффициентов и обеспечивающий различное расположение локальных минимумов на плоскости ($m_{\text{real}}, m_{\text{image}}$). Совмещение двух $\Phi(m)$ приводит к сужению области допустимых значений ПП и, соответственно, — к более точной оценке m . Разнонаправленные возможности определения комплексного показателя преломления призывают к дальнейшим размышлениям.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Томской обл. в рамках научного проекта № 19-48-700014 в части теоретических исследований. Эмпирический материал получен при финансовой поддержке проекта № АААА-А17-117021310142-5.

Автор склоняет голову в память о Михаиле Алексеевиче Свириденкове; разд. 1 и 2.1 — результат совместной работы.

1. *Remer L.A., Kaufman Y.J., Tanré D., Mattoo S., Chu D.A., Martins J.V., Li R.-R., Ichoku C., Levi R.C., Kleidman R.G., Eck T.F., Vermote E., Holben B.N.* The MODIS aerosol algorithm, products, and validation // *J. Atmos. Sci.* 2005. V. 62. P. 947–973.
2. *Tanré D., Bréon F.M., Deuze J.L., Dubovik O., Ducos F., Francois P., Goloub P., Herman M., Lifermann A., Waquet F.* Remote sensing of aerosol by using polarized, directional and spectral measurements within the A-Train: The PARASOL mission // *Atmos. Meas. Tech. Discuss.* 2011. V. 4. P. 2037–2069. DOI: 10.5194/amtd-4-2037-2011.
3. *Winker D.M., Vaughan M.A., Omar A., Hu Y., Powell K.A., Liu Z., Hunt W.H., Young S.A.* Overview of the CALIPSO mission and CALIOP data processing algorithms // *J. Atmos. Ocean. Technol.* 2009. V. 26. P. 2310–2323. DOI: 10.1175/2009JTECHA1281.1.
4. *Holben B.N., Eck T.F., Slutsker I., Tanré D., Buis J.P., Setzer A., Vermote E., Reagan J.A., Kaufman Y., Nakajima T., Lavenu F., Jankowiak I., Smirnov A.* AERONET — A federated instrument network and data archive for aerosol characterization // *Remote Sens. Environ.* 1998. V. 66. P. 1–16.
5. *Dubovik O.V., Lapyonok T.V., Oshchepkov S.L.* Improved technique for data inversion: Optical sizing of multicomponent aerosols // *Appl. Opt.* 1995. V. 34. P. 8422–8436.
6. *Dubovik O.V., King M.D.* A flexible inversion algorithm for retrieval of aerosol optical properties from Sun and sky radiance measurements // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 105. P. 20673–20696.
7. *Bösenberg J., Ansmann A., Baldasano J.M., Balis D., Böckmann C., Calpini B., Chaikovsky A., Flamant P., Hegerd A., Mitev V., Papayannis A., Pelon J., Resen-*

- des D., Schneider J., Spinelli N., Trickl T., Vaughan G., Visconti G., Wiegner M.* EARLINET: a European aerosol research lidar network // *Advances in Laser Remote Sensing / A. Dabas, C. Loth, J. Pelon (eds.)*. Editions de L'École Polytechnique, 2000. P. 155–158.
8. *Murayama T., Sugimoto N., Uno I., Kinoshita K., Aoki K., Hagiwara N., Liu Z., Matsui I., Sakai T., Shibata T., Arao K., Sohn B.-J., Won J.-G., Yoon S.-C., Li T., Zhou J., Hu H., Abo M., Tokibe K., Koga R., Terasaka Y.* Ground-based network observation of Asian dust events of April 1998 in east Asia // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106. P. 18345–18359.
 9. *Chaikovskiy A.P., Ivanov A.P., Balin Yu.S., Elnikov A.V., Tulinov G.F., Plusnin I.I., Bukin O.A., Chen B.B.* CIS-LiNet – Lidar Network for Monitoring Aerosol and Ozone in CIS Regions // *Reviewed and Revised Papers Presented at the 23d ILRC / C. Nagasawa, N. Sugimoto (eds.)*. Nara, Japan, 2006. P. 671–672.
 10. *Bösenberg J., Hoff R.M.* Plan for the implementation of the GAW Aerosol Lidar Observation Network GALION // *WMO*. 2007. N 1443. 45 p.
 11. *Burton S.P., Chemyakin E., Liu X., Knobelspiess K., Stammes S., Sawamura P., Moore R.H., Hostetler C.A., Ferrare R.A.* Information content and sensitivity of the $3\beta + 2\alpha$ lidar measurement system for aerosol microphysical retrievals // *Atmos. Meas. Tech.* 2016. V. 9. P. 5555–5574. DOI: 10.5194/amt-9-5555-2016.
 12. *Pappalardo G., Amodeo A., Apituley A., Comeron A., Freudenthaler V., Linné H., A. Ansmann A., Bösenberg J., D'Amico G., Mattis I., Mona L., Wandinger U., Amiridis V., Alados-Arboledas L., Nicolae D., Wiegner M.* EARLINET: Towards an advanced sustainable European aerosol lidar network // *Atmos. Meas. Tech.* 2014. V. 7. P. 2389–2409. DOI: 10.5194/amt-7-2389-2014.
 13. *Samoilova S.V., Balin Yu.S.* Reconstruction of the aerosol optical parameters from the data of sensing with a multifrequency Raman lidar // *Appl. Opt.* 2008. V. 47. P. 6816–6831.
 14. *Willeke K., Whitby K.T.* Atmospheric aerosol: size distribution interpretation // *J. Air Poll. Control Assoc.* 1975. V. 25. P. 529–534.
 15. *Twitty J.T.* The inversion of aureole measurements to derive aerosol size distributions // *J. Atmos. Sci.* 1975. V. 32. P. 584–591.
 16. *Горчаков Г.И., Горчакова И.А., Лысков Е.А., Толстобров В.Г., Туровцева Л.С.* Определение коэффициента преломления и микроструктуры туманной дымки // *Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана*. 1976. Т. 12, № 6. С. 612–619.
 17. *Веретенников В.В., Наац И.Э., Панченко М.В., Фадеев В.Я.* К определению микроструктуры и показателя преломления атмосферных дымок из поляризационных характеристик светорассеяния // *Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана*. 1978. Т. 14, № 12. С. 1313–1317.
 18. *Veretennikov V.V., Kozlov V.S., Naats I.E., Fadeev V.Ya.* Optical studies of smoke aerosol: An inversion method and its applications // *Opt. Lett.* 1979. V. 4. P. 411–413.
 19. *Зуев В.Е., Наац И.Э.* Обратные задачи лазерного зондирования. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
 20. *Рахимов Р.Ф., Козлов В.С., Панченко М.В., Тумаков А.Г., Шмаргунов В.П.* Свойства атмосферного аэрозоля в дымовых шлейфах лесных пожаров по данным спектрофотометрических измерений // *Оптика атмосфер. и океана*. 2014. Т. 27, № 2. С. 126–133.
 21. *Макленко Э.В., Рахимов Р.Ф., Пхалагов Ю.А., Ужegov В.Н.* Микрофизическая интерпретация аномальной спектральной зависимости аэрозольного ослабления излучения на приземной трассе // *Оптика атмосфер. и океана*. 2003. Т. 16, № 12. С. 1102–1106.
 22. *Веретенников В.В.* Совместное определение микроструктуры и показателя преломления аэрозоля по данным солнечной фотометрии // *Оптика атмосфер. и океана*. 2007. Т. 20, № 3. С. 214–221.
 23. *Веретенников В.В.* Восстановление микроструктурных параметров грубодисперсного аэрозоля с использованием их регрессионных связей со спектральным ослаблением света в ИК-диапазоне // *Оптика атмосфер. и океана*. 2017. Т. 30, № 8. С. 696–704.
 24. *Бедарева Т.В., Свириденков М.А., Журавлева Т.Б.* Восстановление оптических и микрофизических характеристик аэрозоля по данным наземных спектральных измерений прямой и рассеянной солнечной радиации. Часть 1. Тестирование алгоритма // *Оптика атмосфер. и океана*. 2012. Т. 25, № 7. С. 602–612. DOI: 10.1134/S1024856013010041.
 25. *Bohren F.C., Huffman D.R.* Absorption and scattering of light by small particles. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983. 530 p.
 26. *Müller D., Wandinger U., Ansmann A.* Microphysical particle parameters from extinction and backscatter lidar data by inversion with regularization: Theory // *Appl. Opt.* 1999. V. 38. P. 2346–2357.
 27. *Böckmann C.* Hybrid regularization method for the ill-posed inversion of multiwavelength lidar data in the retrieval of aerosol size distribution // *Appl. Opt.* 2001. V. 40. P. 1329–1342.
 28. *Böckmann C., Mironova I., Müller D., Schneidenbach L., Nessler R.* Microphysical aerosol parameters from multiwavelength lidar // *J. Opt. Soc. Am.* 2005. V. A22(3). P. 518–528.
 29. *Veselovskii I., Kolgotin A., Griaznov V., Müller D., Franke K., Whiteman D.M.* Inversion of multiwavelength Raman lidar data for retrieval of bimodal aerosol size distribution // *Appl. Opt.* 2004. V. 43. P. 1180–1195.
 30. *Veselovski I., Kolgotin A., Müller D., Whiteman D.M.* Information content of multiwavelength lidar data with respect to microphysical particle properties derived from eigenvalue analysis // *Appl. Opt.* 2005. V. 44. P. 5292–5303.
 31. *Kolgotin A., Müller D.* Theory of inversion with two-dimensional regularization: profiles of microphysical particle properties derived from multiwavelength lidar measurements // *Appl. Opt.* 2008. V. 47. P. 4472–4490.
 32. *Omar A.H., Winker D.M., Vaughan M.A., Hu Y., Trepte Ch.H., Ferrare R.A., Lee K.-P., Hostetler Ch.A., Kittaka Ch., Rogers R.R., Kuehn R.E., Lie Zh.* The CALIPSO automated aerosol classification and lidar ratio selection algorithm // *J. Atmos. Ocean. Technol.* 2009. V. 26, N 10. P. 1994–2014.
 33. *Veselovskii I., Dubovik O., Kolgotin A., Lapyonok T., Di Girolamo P., Summa D., Whiteman D.M., Mishchenko M., Tanre D.* Application of randomly oriented spheroids for retrieval of dust particle parameters from multiwavelength lidar measurements // *J. Geophys. Res.* 2010. V. 115. P. D21203. DOI: 10.1029/2010D014139.
 34. *Veselovskii I., Dubovik O., Kolgotin A., Korenskiy M., Whiteman D.N., Allakhverdiev K., Huseyinoglu F.* Linear estimation of particle bulk parameters from multiwavelength lidar measurements // *Atmos. Meas. Tech.* 2012. V. 5. P. 1135–1145. DOI: 10.5194/amt-5-1135-2012.
 35. *Müller D., Veselovskii I., Kolgotin A., Tesche M., Ansmann A., Dubovik O.* Vertical profiles of pure dust and mixed smoke-dust plumes inferred from inversion of multiwavelength Raman/polarization lidar data and com-

- parison to AERONET retrievals and *in situ* observations // Appl. Opt. 2013. V. 52. P. 3178–3202.
36. Wagner J., Ansmann A., Wandinger U., Seifert P., Chwarz A., Tesche M., Chaikovsky A., Dubovik O. Evaluation of the Lidar/Radiometer Inversion Code (LIRIC) to determinate microphysical properties of volcanic and desert dust // Atmos. Meas. Tech. 2013. V. 6. P. 1707–1724. DOI: 10.5194/amt-6-1707-2013.
 37. Chemyakin E., Müller D., Burton Sh., Kolgotin A., Hostetler Ch., Ferrare R. Arrange and average algorithm for the retrieval of aerosol parameters from multiwavelength high-spectral-resolution lidar/Raman lidar data // Appl. Opt. 2014. V. 53. P. 7252–7266.
 38. Chemyakin E., Burton S., Kolgotin A., Müller D., Hostetler C., Ferrare R. Retrieval of aerosol parameters from multiwavelength lidar: Investigation of the underlying inverse mathematical problem // Appl. Opt. 2016. V. 5. P. 2188–2202.
 39. Kahnert M., Andersson E. How much information do extinction and backscattering measurements contain about the chemical composition of atmospheric aerosol? // Atmos. Chem. Phys. 2017. V. 17. P. 3423–3444. DOI: 10.5194/acp-17-3423-2017.
 40. Alexandrov M.D., Mishchenko M.I. Information content of bistatic lidar observations of aerosols from space // Opt. Express. 2017. V. 25, N 4. P. A134–A150.
 41. Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D. Light Scattering by Nonspherical Particles. San Diego, CA, USA: Academic Press, 2000. 690 pp.
 42. Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A. Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2002. 450 pp.
 43. Dubovik O., Sinyuk A., Lapyonok T., Holben B.N., Mishchenko M., Yang P., Eck T.F., Volten H., Munoz O., Veihelmann B., van der Zande W.J., Leon J.-F., Sorokin M., Slutsker I. Application of spheroid models to account for aerosol particle nonsphericity in remote sensing of desert dust // J. Geophys. Res. 2006. V. 111. P. D11208. DOI: 10.1029/2005D006619.
 44. Samoilova S.V., Sviridenkov M.A., Penner I.E. Retrieval of the particle size distribution function from the data of lidar sensing under the assumption of known refractive index // Appl. Opt. 2016. V. 55. P. 8022–8029. <https://doi.org/10.1364/AO.55.008022>.
 45. Самойлова С.В. Восстановление комплексного показателя преломления по лидарным измерениям: возможности и ограничения // Оптика атмосф. и океана. 2014. Т. 27, № 3. С. 197–206.
 46. Samoilova S.V., Penner I.E., Kokhanenko G.P., Balin Yu.S. Simultaneous reconstruction of two microphysical aerosol characteristics from the lidar data // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2019. V. 222–223. P. 35–44. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2018.10.014>.
 47. Verhaege Ch., Shcherbakov V., Personne P. Limitations on retrieval of complex refractive index of spherical particles from scattering measurements // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2008. V. 109. P. 2338–2348. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2008.05.009.
 48. Verhaege Ch., Shcherbakov V., Personne P. Retrieval of complex refractive index and size distribution of spherical particles from Dual-Polarization Polar Nephelometer data // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2009. V. 110, P. 1690–1697. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2009.01.004.
 49. Lopatin A., Dubovik O., Chaikovsky A., Goloub P., Lapyonok T., Tanré D., Litvinov P. Enhancement of aerosol characterization using synergy of lidar and sun-photometer coincident observations: The GARRLiC algorithm // Atmos. Meas. Tech. 2013. V. 6. P. 2065–2088. DOI: 10.5194/amt-6-2065-2013.
 50. Chaikovsky A., Dubovik O., Holben B., Bril A., Goloub Ph., Tanré D., Pappalardo G., Wandinger U., Chaikovskaya L., Denisov S., Grudo J., Lopatin A., Karol Ya., Lapyonok T., Amiridis V., Ansmann A., Apituley A., Alados-Arboledas L., Bimietoglou I., Boselli A., D'Amico G., Freudenthaler V., Giles D., Granados-Mucoz M.J., Kokkalis P., Nicolae D., Oshchepkov S., Papayannis A., Perrone M.R., Pietruczuk A., Rocadenbosch F., Sicard M., Slutsker I., Talianu C., De Tomasi F., Tsekeri A., Wagner J., Wang X. Lidar-Radiometer Inversion Code (LIRIC) for the retrieval of vertical aerosol properties from combined lidar/radiometer data: Development and distribution in EARLINET // Atmos. Meas. Tech. 2016. V. 9. P. 1181–1205. DOI: 10.5194/amt-9-1181-2016.
 51. Тухонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 285 с.
 52. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. М.: Советское радио, 1979. 272 с.
 53. Samoilova S., Sviridenkov M., Penner I., Kokhanenko G., Balin Yu. Retrieval of the tropospheric aerosol microphysical characteristics from the data of multifrequency lidar sensing // EPJ Web Conf. 2018. 28th Laser Radar Conf. V. 176. URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201817605055> (last access: 28.06.2019).
 54. Бедарева Т.В., Свириденков М.А., Журавлева Т.Б. Восстановление оптических и микрофизических характеристик аэрозоля по данным наземных спектральных измерений прямой и рассеянной солнечной радиации. Часть 2. Апробация алгоритма // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 9. С. 768–777. DOI: 10.1134/S102485601302005X.

S.V. Samoilova. Simultaneous reconstruction of the complex refractive index and the particle size distribution function from the lidar data: examination of the algorithms.

A method is suggested for joint determination of two aerosol microphysical characteristics: the complex refractive index $m = m_{\text{real}} + i \cdot m_{\text{image}}$ and the spherical-particle size distribution function $U(r)$ from the data of the nighttime vertical lidar sensing at the wavelengths 355–1064 nm. During their simultaneous estimation, it is useful to minimize the discrepancy functional $\Phi(m)$ in the range of the physically justified m . The principal limitations due to a wider region of the global minima of $\Phi(m)$ appear at $m_{\text{image}}^{\text{true}} \in [0.01; 0.04]$ and give rise to a potential shift of the resulting values of $m_{\text{real}}^{\text{est}}$ and $m_{\text{image}}^{\text{est}}$. A simultaneous use of several functionals gives a better estimate of m due to different sets of the respective optical characteristics. The problem in retrieving the distribution function is caused by the information content of the coarse particle measurements. The statistical regularization method offers an unambiguous estimation of $U(r)$ for the mean radius up to 3 μm , and gives an admissible estimate for larger radii. The algorithms have been tested using 8 values of absorption, when 50 empirical models of the size distribution function are assigned to one $m_{\text{image}}^{\text{true}}$ value.