УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДПОРНЫХ СТЕНОК, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ГРУНТОМ

Ф. С. Латифов, Д. С. Ганиев

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, AZ1073 Баку, Азербайджан
E-mails: flatifov@mail.ru, qanidilqem@gmail.com

Проведено исследование динамической прочностной характеристики — частоты собственных колебаний подпорной стенки, состоящей из двух ортотропных цилиндрических оболочек, усиленных дискретно распределенными кольцевыми стержнями. Для решения задачи используется вариационный принцип Гамильтона — Остроградского. Построено частотное уравнение, найдены его корни и исследована их зависимость от физических и геометрических параметров задачи.

Ключевые слова: ортотропные цилиндрические оболочки, принцип вариации, свободные колебания, потенциальная энергия, кинетическая энергия.

DOI: 10.15372/PMTF20190516

Введение. Разлив горных рек приводит к вымыванию земельных участков в лесных полосах и, следовательно, к разрушению лесных массивов. Для предотвращения этого процесса прибрежный земельный участок лесных массивов укрепляется с использованием подпорных стенок, состоящих из цилиндрических оболочек открытого профиля. Большое значение имеет расчет прочности и устойчивости подпорных стенок при воздействии на них динамических нагрузок.

В работе [1] исследовались подпорные стенки и гидротехнические установки, состоящие из трех тонкостенных пространственных оболочек, заполненных гранулированной средой и находящихся на упругом основании. В [2] получено решение задачи для подпорной стенки с треугольным сечением с учетом давления грунта и объемных сил фильтрации. В [3] решена задача о напряженно-деформированном состоянии подпорной стенки. Устойчивость заглубленных опор пространственной системы исследована в [4].

В работах [5–10] решены задачи о напряженно-деформированном состоянии вогнутых оболочек, ослабленных прямоугольным отверстием, ортогональных решетчатых ребристых оболочек и пластин, а также задачи со смешанными граничными условиями на контуре. В работе [11] изучалось напряженно-деформированное состояние пространственных конструкций, образованных цилиндрическими оболочками из изотропного материала. В [12] решена задача о плоской деформации подпорной стенки в виде цилиндрической оболочки, состоящей из трех различных изотропных материалов. Задача сведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, получено аналитическое решение. В [13] разработана методика расчета цилиндрических оболочек из изотропного материала с уче-

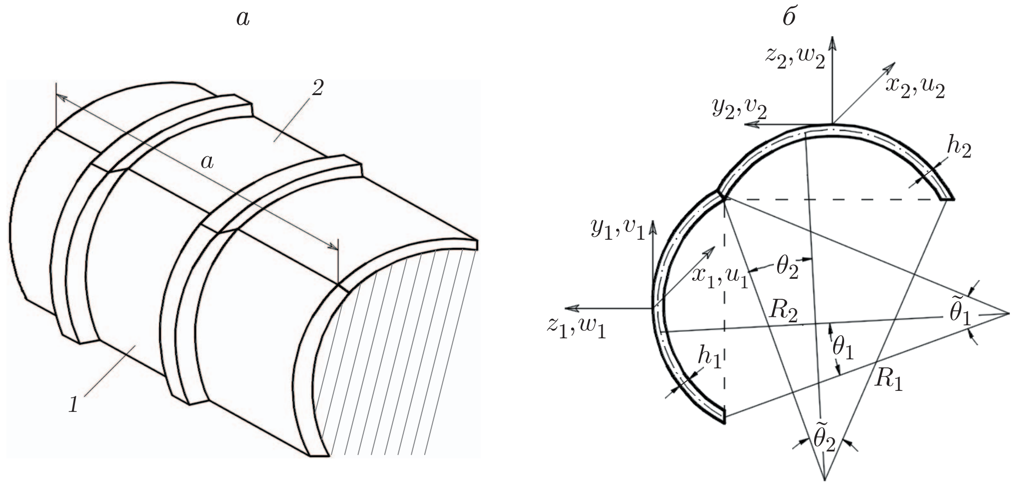

Рис. 1. Общий вид (*а*) и геометрия (*б*) усиленной подпорной стенки, состоящей из ортотропных цилиндрических оболочек:
1 — первая оболочка, *2* — вторая оболочка

том влияния грунта при сжатии и скольжении по контактной поверхности. Расчеты и исследования проведены с использованием моментной теории цилиндрических оболочек.

Целью данной работы является исследование динамической прочностной характеристики — частоты собственных колебаний подпорной стенки, состоящей из двух ортотропных цилиндрических оболочек, усиленных дискретно распределенными кольцевыми стержнями. С использованием вариационного принципа Гамильтона — Остроградского для нахождения частот колебаний подпорных стенок построено частотное уравнение, найдены его корни и изучено влияние физических и геометрических параметров, характеризующих систему, на собственные частоты колебаний стенок.

Постановка задачи. Для того чтобы записать вариационный принцип Гамильтона — Остроградского, приведем выражение для полной энергии исследуемой подпорной стенки, состоящей из двух оболочек цилиндрической формы с незамкнутым контуром, соединенных вдоль кромки под прямым углом, и подкрепляющих элементов, количество которых варьируется. Кроме того, внутренняя поверхность конструкции контактирует с грунтом (рис. 1,*а*).

Запишем выражения для потенциальной и кинетической энергий цилиндрических оболочек [14]:

$$G_i = \frac{h_i R_i}{2} \iint\limits_{s_i} \Big[b_{11i} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2 - 2(b_{11i} + b_{12i}) \frac{w_i}{R_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{w_i^2}{R_i^2} (b_{11i} + 2b_{12i} + b_{22i}) + \frac{b_{22i}}{R_i^2} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial \theta_i}\Big)^2 - {}$$
$$- 2(b_{12i} + b_{22i}) \frac{w_i}{R_i^2} \frac{\partial v_i}{\partial \theta_i} + 2b_{12i} \frac{1}{R_i^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial \theta_i} + b_{66i} \frac{1}{R_i^2} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial \theta_i}\Big)^2 + {}$$
$$+ b_{66i} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)^2 + b_{66i} \frac{1}{R} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \theta_i} \Big] \, dx_i \, d\theta_i, \qquad (1)$$
$$K_i = \frac{\rho_i h_i}{2R_i(1 - \nu_i^2)} \iint\limits_{s_i} \Big[\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_i}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w_i}{\partial t}\Big)^2 \Big] \, dx_i \, d\theta_i.$$

Здесь индекс $i = 1$ соответствует первой цилиндрической оболочке, $i = 2$ — второй цилиндрической оболочке (рис. 1,*б*); u_i, v_i, w_i — смещения точек ребер; R_i, h_i — радиусы и толщины цилиндрических оболочек; $b_{11i} = E_{1i}/(1 - \nu_{1i}\nu_{2i})$; $b_{22i} = E_{2i}/(1 - \nu_{1i}\nu_{2i})$;

$b_{12i} = \nu_{2i}E_{1i}/(1-\nu_{1i}\nu_{2i}) = \nu_{1i}E_{2i}/(1-\nu_{1i}\nu_{2i})$; E_{1i}, E_{2i} — модули упругости в направлениях осей координат x_i, θ_i соответственно; ν_{1i}, ν_{2i} — коэффициенты Пуассона; s_i — площадь поверхности цилиндрических оболочек, составляющих подпорные стенки.

Действие грунта на цилиндрические оболочки заменяется действием внешних сил q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}. Работа, выполняемая этими силами при смещении точек покрытия, равна

$$A_i = -\int\limits_0^a \int\limits_0^{\tilde{\theta}_i} (q_{xi}u_i + q_{yi}v_i + q_{zi}w_i)\, dx_i\, d\theta_i. \tag{2}$$

Запишем выражение для полной энергии колец, используемых для усиления оболочки [15]:

$$H_j = \frac{R_i}{2}\sum_{j=1}^{k_i}\int\limits_0^{\theta_i}\Big[E_{ji}F_{ji}\Big(\frac{1}{R_i}\frac{\partial v_{ji}}{\partial\theta_i} - \frac{w_j}{R_i}\Big)^2 + E_{ji}J_{xji}\Big(\frac{1}{R_i^2}\frac{\partial^2 w_j}{\partial\theta_i^2} + \frac{w_j}{R_i^2}\Big)^2 +$$

$$+ E_{ji}J_{zji}\Big(\frac{1}{R_i^2}\frac{\partial^2 u_{ji}}{\partial\theta_i^2} - \frac{\varphi_{\text{кр}ji}}{R_i}\Big)^2 + G_{ji}J_{\text{кр}ji}\frac{1}{R_i}\frac{\partial\varphi_{\text{кр}ji}}{\partial\theta_i} + \frac{1}{R_i^2}\frac{\partial u_{ji}}{\partial\theta_i}\Big]\,d\theta_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k_i}\rho_{ji}F_{ji}R_i\int\limits_0^{\theta_i}\Big[\Big(\frac{\partial u_{ji}}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{ji}}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w_{ji}}{\partial t}\Big)^2 + \frac{J_{\text{кр}ji}}{F_{ji}}\Big(\frac{\partial\varphi_{\text{кр}ji}}{\partial t}\Big)^2\Big]\,d\theta_i. \tag{3}$$

Считается, что условия жесткого контакта между оболочкой и стержнями выполнены [15]:

$$u_{ji}(\theta_i) = u_i(x_{ji},\theta_i) + h_{ji}\varphi_1(x_{ji},\theta_i), \qquad v_{ji}(\theta_i) = v_i(x_{ji},\theta_i) + h_{ji}\varphi_1(x_{ji},\theta_i), \tag{4}$$

$$w_{ji} = w(x_{ji},\theta_i), \quad \varphi_{ji}(\theta_i) = \varphi_2(x_{ji},\theta_i), \quad \varphi_{\text{кр}ji}(\theta_i) = \varphi_1(x_{ji},\theta_i), \quad h_{ji} = 0{,}5h_i + H^i_{ji}.$$

В выражениях (3), (4) индекс $i = 1$ соответствует первой цилиндрической оболочке, $i = 2$ — второй цилиндрической оболочке; u_{ji}, v_{ji}, w_{ji} — смещения точек стержней, используемых для упрочнения оболочки; F_{ji} — площади поперечных сечений j-го поперечного стержня; E_{ji} — модуль упругости при растяжении j-го поперечного стержня; J_{xji}, J_{zji} — моменты инерции поперечного сечения j-го стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения; $J_{\text{кр}ji}$ — момент инерции при кручении j-го стержня; t — время; k_i — количество стержней, используемых для подкрепления оболочки; H^i_{ji} — расстояние от оси j-го стержня до поверхности цилиндрической оболочки; ρ_{ji} — плотность материала j-го стержня; φ_{ji}, $\varphi_{\text{кр}ji}$ — углы поворота и закручивания поперечного сечения j-го стержня, которые выражаются через смещения оболочки:

$$\varphi_{\text{кр}ji}(\theta_i) = \varphi_1(x_{ji},\theta_i) = -\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\Big|_{x_i=x_{ji}}.$$

Суммируя потенциальную и кинетическую энергии системы, получаем выражение для полной энергии системы

$$\Pi = \sum_{i=1}^{2} (G_i + K_i + H_i + A_i). \tag{5}$$

Выражения для внешних сил q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}, действующие на цилиндрические оболочки, принимаются в виде

$$q_{xi} = q_{yi} = 0, \qquad q_{z1} = p_1 w_1 - k_{s1}\Big(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\Big), \qquad q_{z2} = p_2 w_2 - k_{s2}\Big(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\Big)$$

(p_1, p_2, k_{si} — коэффициенты жесткости грунта при сжатии первой и второй оболочек и скольжении соответственно). К выражениям (2), (5) добавляются условия контакта и граничные условия.

Предположим, что связь цилиндрических оболочек является упругой, т. е. на линии контакта выполнены условия

$$\begin{gathered} w_1(x)\big|_{\theta_1=\tilde\theta_1} = v_2(x)\big|_{\theta_2=0}, \qquad v_1(x)\big|_{\theta_1=\tilde\theta_1} = w_2(x)\big|_{\theta_2=0}, \\ u_1(x)\big|_{\theta_1=\tilde\theta_1} = u_2(x)\big|_{\theta_2=0}, \qquad \frac{\partial w_1(x)}{\partial x}\Big|_{\theta_1=\tilde\theta_1} = \frac{\partial v_2(x)}{\partial x}\Big|_{\theta_2=0}. \end{gathered} \tag{6}$$

Предполагается, что цилиндрические оболочки жестко закреплены на идеальных диафрагмах, т. е. при $x = 0$ и $x = a$ выполняются граничные условия

$$v_i = 0, \qquad w_i = 0, \qquad T_{i1} = 0, \qquad M_{i1} = 0. \tag{7}$$

Здесь T_{i1}, M_{i1} — силы и моменты, действующие в поперечных сечениях цилиндрических оболочек.

С использованием условия стационарности Остроградского — Гамильтона, определяющего колебания подпорных стенок, создаваемых соединением цилиндрических оболочек, можно получить уравнение для частоты

$$\delta W = 0,$$

где $W = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \Pi\, dt$ — действие по Гамильтону. Приравнивая к нулю вариацию δW и учитывая, что независимые вариации δu_1, δv_1, δw_1 произвольны, получаем уравнение для определения частот свободных колебаний подпорных стенок, создаваемых соединением цилиндрических оболочек. Таким образом, решение задачи о колебаниях подпорных стенок, полученных соединением цилиндрических оболочек, динамически контактирующих с грунтом, сводится к интегрированию выражения для энергии конструкции (5) с условиями контакта (6) и граничными условиями (7).

Решение задачи о собственных колебаниях оболочки. Компоненты вектора смещений точек цилиндрических оболочек будем искать в виде

$$\begin{gathered} u_i = u_{0i} \cos \chi\xi_i\,(\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1, \qquad v_i = v_{0i} \sin \chi\xi_i\,(\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1, \\ w_i = w_{0i} \sin \chi\xi_i\,(\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь u_{0i}, v_{0i}, w_{0i} — неизвестные константы; $\xi_i = x_i/a$; $t_1 = \omega_{01} t$; χ, n — волновые числа цилиндрической оболочки в направлении образующей и круговом направлении; $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \tilde\theta_1$; $0 \leqslant \theta_2 \leqslant \tilde\theta_2$; $\omega_1 = \sqrt{(1 - \nu_{11}^2)\rho_1 R_1^2 \omega^2 / E_{11}}$.

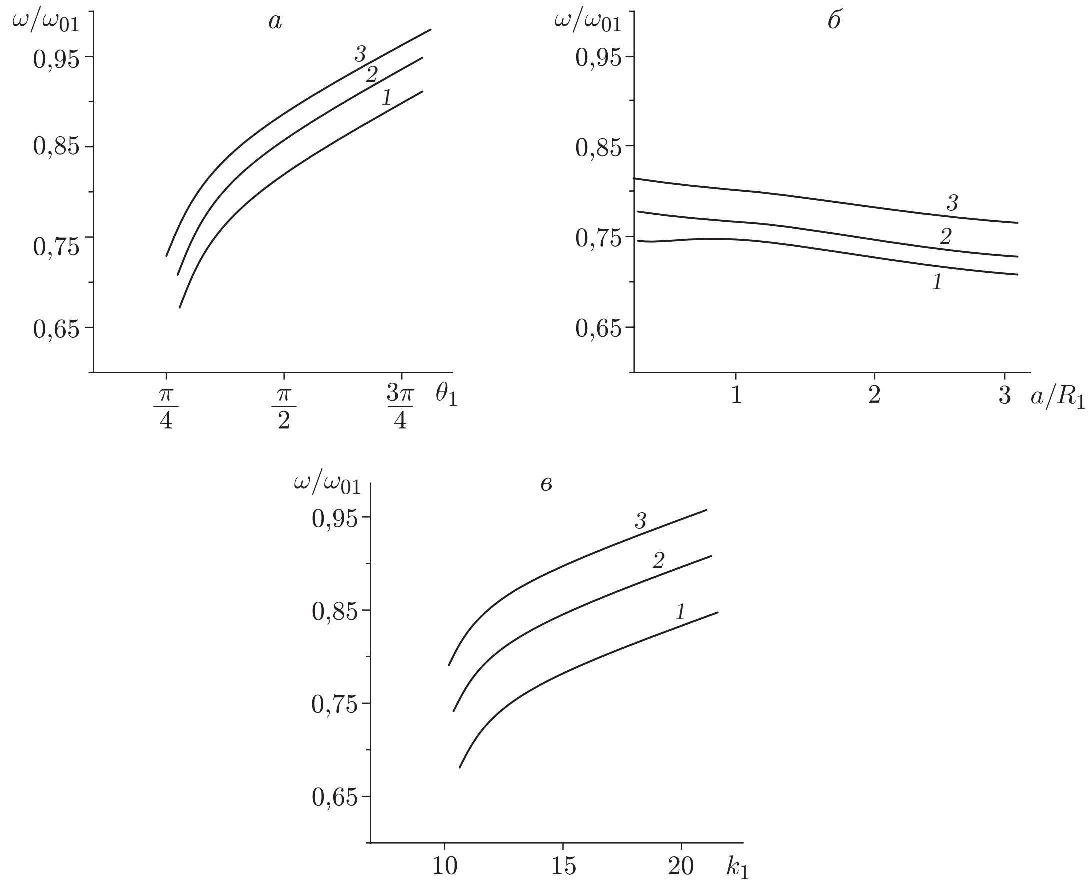

Рис. 2. Зависимости частотного параметра от параметров задачи θ_1 (*а*), a/R_1 (*б*), k_1 (*в*) при $\xi = 1$, $\theta_1 = \theta_2 = 3\pi/4$:
а — $k_1 = k_2 = 18$, $n = 5$, *б* — $k_1 = k_2 = 18$, $n = 3$, *в* — $k_2 = 15$, $n = 5$; *1* — $E_{1i}/E_{2i} = 0{,}7$, *2* — $E_{1i}/E_{2i} = 1{,}0$, *3* — $E_{1i}/E_{2i} = 1{,}7$

Используя решения (8), из условия контакта (6) константы u_{02}, v_{02}, w_{02} выражаем через константы u_{01}, v_{01}, w_{01}:

$$u_{02} = u_{01}(\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1), \quad v_{02} = w_{01}(\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1), \quad w_{02} = v_{01}(\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1).$$

Подставляя решения (8) в (5), с учетом последних соотношений получаем полином второго порядка относительно u_{01}, v_{01}, w_{01}:

$$\Pi = \varphi_{11}u_{01}^2 + \varphi_{22}v_{01}^2 + \varphi_{33}w_{01}^2 + \varphi_{44}u_{01}v_{01} + \varphi_{55}u_{01}w_{01} + \varphi_{66}v_{01}w_{01}.$$

Выражения для коэффициентов φ_{11}, φ_{22}, φ_{33}, φ_{44}, φ_{55}, φ_{66} являются громоздкими, поэтому в данной работе не приводятся.

Варьируя в выражении для Π константы u_{01}, v_{01}, w_{01} и приравнивая коэффициенты при независимых вариациях к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &2\varphi_{11}u_{01} + \varphi_{44}v_{01} + \varphi_{55}w_{01} = 0, \\ &\varphi_{44}u_{01} + 2\varphi_{22}v_{01} + \varphi_{66}w_{01} = 0, \\ &\varphi_{55}u_{01} + \varphi_{66}v_{01} + 2\varphi_{33}w_{01} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку система (9) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений, необходимым и достаточным условием существования ее ненулевого решения является равенство нулю ее главного определителя. В результате получаем следующее частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2\varphi_{11} & \varphi_{44} & \varphi_{55} \\ \varphi_{44} & 2\varphi_{22} & \varphi_{66} \\ \varphi_{55} & \varphi_{66} & 2\varphi_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Запишем уравнение (10) в виде

$$4\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \varphi_{44}\varphi_{55}\varphi_{66} - \varphi_{55}^2\varphi_{22} - \varphi_{66}^2\varphi_{11} - \varphi_{44}^2\varphi_{33} = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) решалось численным методом. Результаты численных решений получены при следующих значениях параметров задачи: $p_1 = p_2 = 7 \cdot 10^8$ Н/м^2, $k_{si} = 11 \cdot 10^6$ Н/м^2, $a/R_i = 3$, $\nu_{1i} = \nu_{2i} = 0{,}35$, $R_i = 160$ мм, $b_{11} = 18{,}3$ ГПа, $b_{12} = 2{,}77$ ГПа, $b_{22} = 25{,}2$ ГПа, $b_{66} = 3{,}5$ ГПа, $\rho_i = \rho_{ji} = 1850$ кг/м^3, $E_{ji} = 6{,}67 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\chi = 1$, $n = 8$, $h_{ji} = 1{,}39$ мм, $I_{\text{кр}ji} = 0{,}48$ мм^4, $I_{xji} = 19{,}9$ мм^4, $F_{ji} = 0{,}45$ мм^2, $h_i = 0{,}45$ мм.

На рис. 2 приведены зависимости частотного параметра от угла раствора первой оболочки θ_1, отношения a/R_1 и количества стержней на поверхности первой оболочки k_1. На рис. 2,*а* видно, что при увеличении угла θ_1 значение параметра частоты увеличивается. По мере увеличения длины цилиндрических оболочек значение частотного параметра уменьшается (см. рис. 2,*б*), а с увеличением отношения E_{1i}/E_{2i} — увеличивается. Из рис. 2,*в* следует, что частоты собственных колебаний подпорных стенок увеличиваются с увеличением количества стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Власов В. З.** Избранные статьи: В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1962–1964.
2. **Агаханов Е. К., Акаев А. И.** Анализ треугольной удерживающей стенки // Трансп. стр-во. 2010. № 4. С. 14–15.
3. **Снитко Н. М.** Статическое и динамическое давление грунтов и анализ подпорных стенок. М.: Госстройиздат, 1963.
4. **Емельянов Л. М.** Анализ параллельных связей // Гидротехника и мелиорация. 1955. № 12. С. 105–112.
5. **Сейфуллаев Х. Р.** К расчету пологих оболочек с большим прямоугольным отверстием, открытых на упругий контур // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. 1978. № 4. С. 60–66.
6. **Сейфуллаев Х. Р.** Об одном методе исследования несущей способности пологих оболочек при больших прогибах // Сб. науч. тр. по механике. 1994. № 4. С. 4–7.
7. **Сейфуллаев Х. Р.** Об одном методе решения краевых задач непологих оболочек // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. 1975. № 7. С. 56–61.
8. **Сейфуллаев Х. Р., Азимов Н. А.** К решению уравнений теории пологих оболочек переменной толщины и кривизны при произвольных граничных условиях // Прикл. механика. 1980. Вып. 16, № 10. С. 47–53.
9. **Сейфуллаев Х. Р., Гусейнли Е. А.** Расчет пологих ребристых оболочек на основе модели конструктивно-ортотропных систем // Сб. науч. тр. по механике. 1997. № 7, ч. 1. С. 112–116.
10. **Кадоли Равикиран, Ганесан Н. Ю.** Анализ устойчивости и свободных вибраций функционально-градиентных цилиндрических оболочек при воздействии температуры // Звук и вибрация. 2006. Т. 289, № 3. С. 450–480.
11. **Ганиев Д. С.** Применение и расчеты цилиндрических оболочек в подпорных стенах // Теорет. и прикл. механика. 2006. № 2. С. 7–10.

12. **Ганиев Д. С.** Исследования облегченных подпорных стен при плоской деформации // Теорет. и прикл. механика. 2013. № 1. С. 43–47.
13. **Ганиев Д. С.** Решение задачи подпорных стен, состоящих из цилиндрических оболочек, лежащих на упругом основании // Теорет. и прикл. механика. 2007. № 1. С. 103–107.
14. **Амиро И. Я.** Ребристые цилиндрические оболочки / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий, П. С. Поляков. Киев: Наук. думка, 1973.
15. **Босяков С. М., Чживэй В.** Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стекловолокна при граничных условиях Навье // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3. С. 24–27.

Поступила в редакцию 17/IV 2018 г.,
после доработки — 28/I 2019 г.
Принята к публикации 25/II 2019 г.