

некоторых случаях указанная немонотонность может оказаться довольно слабо выраженной (например, кривая 2 на фиг. 3).

К сожалению, сравнение теоретических результатов с экспериментом в настоящее время сильно затруднено из-за недостатка экспериментальных данных. В данной работе для сравнения использовались результаты эксперимента «Хардхэт», приведенные в работе [2]. При этом выбраны значения параметров:  $d_0 = 0,5$  см,  $d_m/d_0 = 20$ ,  $K_0 = 1,75 \cdot 10^5$  Д.

График теоретической зависимости коэффициента проницаемости от расстояния совместно с указанными экспериментальными данными приведен на фиг. 4. Из приведенного сопоставления видно, что удается неплохо описать как относительную зависимость коэффициента проницаемости от расстояния, так и его абсолютное значение. Отсутствие достаточного количества экспериментальных данных не позволяет более определенно ответить на вопросы о том, существует ли немонотонность в поведении коэффициента проницаемости, предсказываемая теорией, а также, какая из двух теоретических зависимостей (15) или (16) лучше описывает поведение  $K(r)$  в зоне радиальной трещиноватости.

Авторы выражают благодарность В. М. Цветкову за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 12 X 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. McKee C. R., Hanson M. E. Explosively created permeability from single charges.— Society of Petroleum Engineers Journal, 1975, vol. 15, N 6.
2. Charles R. Boardman. Engineering effects of underground nuclear explosions.— In: Symposium on Engineering with Nuclear Explosives. Las Vegas, Nevada, 1970. Vol. 1.
3. Родионов В. П. и др. Механический эффект подземного взрыва. М., Недра, 1971.
4. Николаевский В. П. О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и об ударных волнах в мягких грунтах.— ДАН СССР, 1967, т. 177, № 3.
5. Лейбензон Л. С. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. Собр. трудов. Т. 11. М., Изд-во АН СССР, 1953.
6. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М., Мир, 1964.
7. Дунин С. Э., Сироткин В. К. Расширение газовой полости в хрупкой породе с учетом дилатационных свойств грунта.— ПМТФ, 1977, № 4.
8. Разрушение. Сборник. Т. 1. М., 1973.
9. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., Недра, 1966.
10. Родин Г. Сейсмология ядерного взрыва. М., Мир, 1974.

УДК 530.3

#### К ВОПРОСУ ОБ УЧЕТЕ МАСШТАБНОГО ФАКТОРА В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

В. М. Александров, Г. П. Александрова,

Ю. П. Степаненко

(Ростов-на-Дону)

Известно, что макроскопические свойства твердого тела зависят от его абсолютных размеров. Основанием для такого утверждения является характер взаимодействия частиц (т. е. атомов, молекул или молекулярных групп) твердого тела [1]. Частицы поверхности испытывают одностороннее воздействие со стороны других частиц тела, в то время как для глубинных слоев выполняется условие статистической симметрии силового взаимодействия частиц. В макро-

скопическом аспекте рассмотрения механических свойств изотропного твердого тела это должно привести к существованию неоднородности вблизи границы и к поверхностному натяжению.

Коэффициент поверхностного натяжения твердых тел имеет величину порядка  $10^{-3}$  кгс/см [2], т. е. в задачах, решаемых в рамках физической и геометрической линейности, эффектом поверхностного натяжения можно пренебречь за малостью. В дальнейшем исследуем только поверхностную неоднородность, полагая, что вдали от границы тело является однородным.

В связи с высказанными предположениями предпринимается экспериментальное исследование [3] тонких полимерных пленок, образцы которых в динамических испытаниях рассматриваются как трехслойные пластины. Выявляется, что динамический модуль граничных слоев пленки в 2—3 раза превышает модуль среднего слоя. Толщина граничного слоя составляет величину порядка  $10^{-3}$  мм. Погрешность измерений оценивается величиной 30%.

Использование пленок в качестве образцов для таких исследований вызывает известное сомнение в корректности идентификации рассматриваемого явления по результатам экспериментов [3]. Действительно, толщина пленки зависит от термосиловых параметров технологического процесса ее изготовления. От этих параметров существенно зависят механические свойства материала в связи с его ориентационной вытяжкой. Не исключено, что в данном случае наблюдается проявление не столько масштабного фактора, сколько технологического.

1. Для выявления эффектов поверхностной неоднородности в твердом теле рассмотрим поведение образцов, которые отличаются только геометрией. Термосиловые предыстории их, включая и технологию изготовления, практически тождественны. В этом случае все размеры образца получаются большими по сравнению с ожидаемой толщиной поверхностного слоя.

Оценка поверхностной неоднородности производится на призматических образцах полиметилметакрилата (ПММА) и алюминиевого сплава АМЦ.

Длина образцов 320 мм, а размеры поперечного сечения не меньше 10 мм. Система захватов [4] обеспечивает центральное растяжение образцов, а дифференциальная схема измерения [5] позволяет использовать в численном анализе результатов наблюдений четвертую значащую цифру сигнала датчика. Датчиками деформации являются тензорезисторы ФКПА 5-50 X, которые наклеиваются на боковую поверхность образца. Измеряются среднеинтегральные (на базе датчика) компоненты деформации  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ , где  $z$  — продольная ось образца,  $x$  и  $y$  — оси симметрии поперечного сечения образца.

Дифференциальная схема измерения [5] выделяет разность ( $\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}$ ). Как показывает опыт, для образцов квадратного поперечного сечения ( $10 \times 10$  мм<sup>2</sup>) комплекс

$$\omega = 2 \left| \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}} \right|$$

не превышает, за исключением одного образца, величины 0,001. Для образца, явившегося исключением,  $\omega = 0,01$ . Испытание образцов прямоугольного сечения ( $25 \times 10$  мм<sup>2</sup>) дало

$$\omega = 0,026 \pm 0,002 \text{ для ПММА, } \omega = 0 \pm 0,001 \text{ для АМЦ.}$$

При этом  $|\epsilon_{xx}| \leq 0,4 \cdot 10^{-3}$  и  $|\epsilon_{xx}| \geq |\epsilon_{yy}|$ , т. е. поперечная деформация широкой грани образца превышает деформацию узкой грани. Следует отметить, что поверхностное натяжение качественно дает такой же эффект: прямоугольное поперечное сечение образца при деформировании переходит в квадратное.

Численный анализ рассмотренного явления поверхностной неоднородности производится в предположении об экспоненциальном убывании

модуля при удалении от поверхности. Для случая, когда модуль на поверхности в 2 раза превышает модуль в глубине образца, зависимость  $\omega$  от толщины слоя имеет следующий вид:

$$\frac{\omega}{s, \text{ мм}} \begin{array}{|l} 0,056 \quad 0,022 \quad 0,010 \quad 0,002 \\ 0,50 \quad 0,25 \quad 0,12 \quad 0,06 \end{array}$$

$s$  — расстояние от поверхности, где модуль на 40% меньше его максимального значения). Таким образом, в наших экспериментах толщина слоя у ПММА составила величину порядка 0,1 мм; у сплава АМЦ эффект поверхностной неоднородности не обнаруживается за малостью.

Этот результат можно предвидеть, если предположить существование зависимости толщины поверхностного слоя от величины характерного размера элементов структуры твердого тела. У металлов эта величина на 1—5 порядков меньше, чем у полимеров. К тому же упругие константы металла практически не зависят от предшествующего термосилового воздействия, чего нельзя сказать о полимере.

Рассмотренный эксперимент дает слабую зависимость результатов измерения от исследуемого эффекта. Для того чтобы эту зависимость усилить, необходимы механические состояния с большим градиентом напряжения вблизи поверхности. Такие состояния дает контактное взаимодействие. В подтверждение этой мысли рассмотрим следующую задачу теории упругости.

2. Пусть в трехслойное упругое основание осесимметрично вдавлируется штамп при условии отсутствия трения в области контакта  $r \leq a$ . Основание представляет собой жесткое полупространство, на котором лежит без трения пакет двух упругих слоев общей толщины  $H^* = H + h$ . Нижний слой имеет толщину  $H$  и упругие характеристики  $G, \nu$ , а верхний слой — толщину  $h$  и упругие характеристики  $G_1, \nu$ . Между слоями осуществлено полное сцепление. Предполагается, что  $h \ll H, h \ll a$  и  $G < G_1$ .

Исследование указанной задачи позволяет оценить степень влияния поверхностной неоднородности на контактную жесткость материала, а изменение в широком диапазоне параметра  $\lambda = H/a$  дает возможность прийти к изучению масштабного фактора.

В работах [6, 7] показано, что при сделанных предположениях верхний слой может рассматриваться как упругая мембрана с жесткостью на растяжение  $k = 2hG_1(1 - \nu)^{-1}$  и нулевой изгибной жесткостью. При этом на границе между мембраной и нижним слоем имеется полное сцепление. Уравнение, характеризующее деформации мембраны в ее плоскости под действием касательных усилий, приложенных к ее границе, для осесимметричного случая имеет вид

$$(2.1) \quad k \left( \Delta u^* - \frac{u^*}{r^2} \right) = -\tau(r) \quad \left( \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right),$$

где  $u^*(r)$  — перемещения точек мембраны в радиальном направлении. С учетом (2.1) и вышесказанного поставленная контактная задача может быть сформулирована в виде следующей краевой задачи для уравнений Ламэ:

$$(2.2) \quad \tau_{rz}(r, 0) = 0, \quad W(r, 0) = 0 \quad \text{при } r \geq a;$$

$$(2.3) \quad \sigma_z(r, H) = 0, \quad W(r, H) = -[\delta - f(r)] \quad \text{при } r < a;$$

$$(2.4) \quad k \left( \Delta u - \frac{v}{r^2} \right) = \tau_{rz} \quad \text{при } z = H, \quad 0 \leq r < \infty.$$

Напряжения и перемещения исчезают при  $r \rightarrow \infty$ . Здесь  $\delta$  — поступательное перемещение штампа вдоль оси симметрии под действием при-

ложенной к нему силы  $P$ ;  $f(r)$  — функция, описывающая форму основания штампа. В (2.4) учтено, что  $u^*(r) = u(r, H)$  и  $\tau(r) = -\tau_{r,z}(r, H)$ . Используя интегральное преобразование Ханкеля по переменной  $r$ , краевую задачу (2.2) — (2.4) сведем к интегральному уравнению первого рода относительно функции распределения контактных давлений  $q(r)$ , действующих между штампом и основанием:

$$(2.5) \quad \int_0^a q(\rho) K\left(\frac{\rho}{H}, \frac{r}{H}\right) \rho d\rho = l\Theta H(\delta - f(r)), \quad r \leq a;$$

$$(2.6) \quad K(\tau, t) = \int_0^\infty L(u) J_0(u\tau) J_0(ut) du,$$

$$L(u) = \frac{u \operatorname{sh} 2u - \frac{2}{\kappa} u^2 + \frac{2l}{m} \operatorname{sh}^2 u}{2u \operatorname{ch}^2 u + \frac{1}{m} (\operatorname{sh} 2u + 2u)};$$

$$(2.7) \quad m = \frac{k}{\Theta H}, \quad \Theta = \frac{G}{1-\nu}, \quad l = \frac{(\kappa+1)^2}{4\kappa}, \quad \kappa = 3 - 4\nu.$$

Здесь  $J_0(x)$  — функция Бесселя, а функция  $L(u)$  обладает свойствами:

$$(2.8) \quad L(u) = Au + O(u^3) \quad \text{при } u \rightarrow 0, \quad A = \frac{\kappa(m+l) - m}{(m+2)\kappa};$$

$$(2.9) \quad L(u) = 1 + \frac{B}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad B = \frac{l-1}{m}.$$

Перейдем в (2.5) к безразмерным переменным по формулам

$$\rho' = \rho/a, \quad r' = r/a, \quad \delta' = \delta/a, \quad \varphi(\rho') = q(\rho), \quad \xi(r') = (1/a)f(r),$$

тогда интегральное уравнение задачи примет вид (штрихи далее опускаем)

$$(2.10) \quad \int_0^1 \rho \varphi(\rho) K\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho = l\Theta \lambda [\delta - g(r)], \quad r \leq 1.$$

Используем интегралы

$$\int_0^\infty J_0(u, \tau) J_0(ut) du = \frac{2}{\pi(\tau+t)} K(l), \quad l = \frac{2\sqrt{\tau t}}{\tau+t},$$

$$\int_0^\infty [J_0(u\tau) J_0(ut) - e^{-u/2}] \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sgn}(\tau-t) \ln \frac{\tau}{t} + \ln \tau t \right].$$

Представим ядро вида (2.6) с учетом (2.9) в форме

$$(2.11) \quad K(\tau, t) = \frac{2}{\pi(\tau+t)} K(l) - \frac{B}{2} \left[ \operatorname{sgn}(\tau-t) \ln \frac{\tau}{t} + \ln^2 \tau t \right] - F(\tau, t);$$

$$(2.12) \quad F(\tau, t) = \int_0^\infty \left\{ \left[ 1 + \frac{B}{u} - L(u) \right] J_0(u\tau) J_0(ut) - \frac{B}{u} e^{-u/2} \right\} du.$$

Здесь функция  $F(\tau, t)$ , по крайней мере, ограничена при всех  $0 \leq \tau \leq 1/\lambda$ ,  $0 \leq t \leq 1/\lambda$ .

Подставляя (2.11), (2.10) и устремляя  $\lambda$  к бесконечности, что соответствует (при фиксированном  $a$ ) случаю вырождения нижнего упругого слоя в полупространстве ( $H = \infty$ ), приходим к следующему интегральному уравнению:

$$(2.13) \quad \int_0^1 \frac{\varphi(\rho) \rho}{\rho+r} K_1\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right) d\rho = \frac{\pi}{2} l\Theta [\delta - g(r)], \quad r \leq 1.$$

Заметим, что, не зная о существовании у материала тонкого поверхностного слоя, наделенного особыми физико-механическими свойствами, можно было бы принять, что интегральное уравнение (2.13) описывает осесимметричную контактную задачу для однородного упругого полупространства, контактная жесткость которого  $\Theta^* = G^*/(1-\nu) = \Theta l$ . При  $\nu = 0,3$  величина  $\Theta^*$  больше  $\Theta$  на 9%. Таким образом, поверхностная неоднородность дает здесь незначительное увеличение контактной жесткости. Иначе, как ниже будет показано, обстоит дело при очень малых  $\lambda$ , когда относительная толщина нижнего слоя стремится к нулю, но по-прежнему  $H \rightarrow h$ .

Для исследования случая очень малых  $\lambda$  нужно найти асимптотику ядра (2.6) при больших  $\tau$  и  $t$ . Это можно сделать, если в (2.6) заменить  $L(u)$  ее асимптотическим представлением (2.8) при малых  $u$ , воспользоваться затем интегралом [8]

$$\gamma(\tau, t) = \int_0^\infty u J_0(u\tau) J_0(ut) du,$$

где равенство понимается в смысле теории обобщенных функций, а  $\gamma(\tau, t)$  представляет собой нулевую гармонику двумерной дельта-функции Дирака. Таким образом, убедимся, что «вырожденное» при очень малых  $\lambda$  решение задачи определяется интегральным уравнением

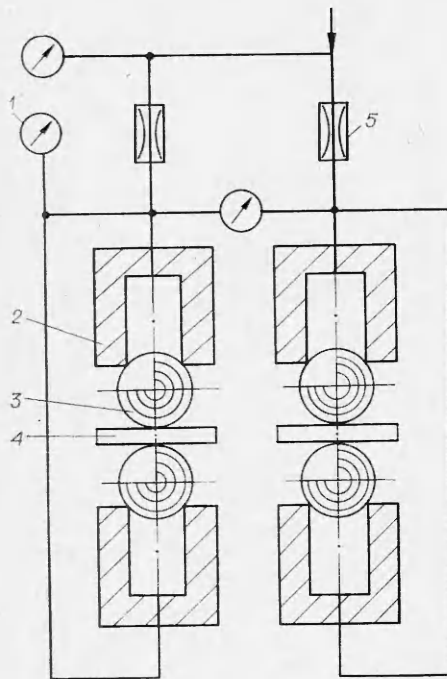
$$(2.14) \quad \int_0^1 \varphi(\rho) \gamma\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) \rho d\rho = l\Theta\lambda A^{-1} [\delta - g(r)] \quad (r \ll 1),$$

следующим из (2.10) при указанных выше преобразованиях.

Заметим, что осесимметричная контактная задача для однородного упругого слоя относительной толщины  $\lambda$  также при очень малых  $\lambda$  приводится к интегральному уравнению вида (2.14), где необходимо только положить  $l\Theta A^{-1} = 2\Theta^*$ . Здесь при  $\nu = 0,3$  величина  $\Theta^*$  больше на 9 ( $m = 1$ ), 18 ( $m = 10$ ) и 25% ( $m = \infty$ ). Таким образом, поверхностная неоднородность здесь дает более значительный вклад в увеличение контактной жесткости, в чем и проявляется масштабный фактор.

**3. Техническая реализация контактной задачи требует высокой определенности граничных условий, поскольку перемещение штампов необходимо измерить с разрешением  $10^{-5}$  мм. Эта определенность касается не только условий силового взаимодействия в зоне контакта, но и деформации штампов как конструктивных элементов установки.**

Установка, схема которой показана на фигуре, допускает техническую реализацию рассматриваемой контактной задачи. В соответствии с фигурой образцы 4 исследуемого материала сжимаются стальными шарами 3, диаметр которых 25 мм. Отличие поверхности стального шара от идеальной сферы не превышает 0,001 мм, а высота микронеровностей поверхности не превышает  $10^{-4}$  мм. Шары сопрягаются с массивными цилиндрами 2, внутренняя торцевая кромка которых притерта к поверхности шара.



Во внутреннюю полость цилиндров подается воздух, который проходит через постоянные дроссели 5. Под действием давления воздуха шары сжимают образцы, отходя при этом от кромок цилиндров.

Манометры 7 позволяют регистрировать силы сжатия образцов и нарушение симметрии всей схемы, которая, по сути дела, представляет собой пневматический мост, измеряющий разность взаимного перемещения шаров в обоих плечах моста. Разрешающая способность схемы в измерении перемещения составляет величину  $10^{-4}$  мм, разности перемещений — с разрешением  $10^{-5}$  мм, а в измерении силы —  $10^{-3}$  кгс. В конструкции установки предусмотрена автоматическая компенсация сигналов от деформации ее элементов и температурных эффектов.

Таким образом, рассматриваемая установка осуществляет сравнение деформационных характеристик двух

образцов, толщина которых может меняться от  $10^{-3}$  до 10 мм. В опытах с ПММА на образцах толщиной 1,77 и 2,37 мм эффект поверхностной неоднородности сказался следующим образом. При силе  $P = 2$  кгс комплекс

$$(3.1) \quad \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)_T / \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)_\varepsilon = 1,05 \pm 0,005,$$

где индекс 1 представляет тонкий образец; 2 — толстый; т — теоретическую оценку без учета поверхностной неоднородности; э — данные эксперимента. Если бы поверхностной неоднородности не существовало, то этот комплекс равнялся бы единице.

Следует отметить, что симметрия схемы измерения предварительно устанавливается по двум одинаковым образцам с точностью до  $\pm 0,005$ . Нарушение симметрии при неодинаковых образцах связано не только с разницей в толщинах образцов, но и влиянием поверхностной неоднородности, которое увеличивается с уменьшением толщины образца. Комплекс (3.1) сконструирован с тем расчетом, чтобы количественно оценить влияние поверхностной неоднородности при некоторой неопределенности в деформационных характеристиках образцов. Действительно, влияние на конечный результат (3.1) ошибки в модулях будет существенно ослаблено, потому что сравниваются не сами перемещения штампов, а их отношения.

Подсчитаем комплекс (3.1) теоретически, т. е. заменим  $(\delta_1/\delta_2)_\varepsilon$  на соответствующую теоретическую оценку с учетом поверхностной неоднородности. Для рассматриваемого случая радиус сжимающих шаров  $R = 1,25$  см, сжимающая сила  $P = 2$  кгс, толщины образцов  $2H_1 = 0,177$  см,  $2H_2 = 0,237$  см, упругие постоянные материала образцов  $E = 3 \cdot 10^4$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu = 0,32$ . Не зная точного значения постоянной  $m$  вида (2.7), примем ее равной 10. Выпишем формулы [8], дающие предельные решения при малых и больших значениях параметра  $\lambda = H/a$  задачи о



сжатии слоя толщины  $2H$  двумя симметрично расположенными одинаковыми параболическими штампами. При малых  $\lambda$  имеем

$$(3.2) \quad q(r) = (\Theta/HR)(a^2 - r^2), \quad \delta = a^2/2R, \\ P = \pi\Theta a^4/2HR,$$

при больших  $\lambda$

$$(3.3) \quad q(r) = (4\Theta/\pi R)\sqrt{a^2 - r^2}, \quad \delta = a^2/R, \quad P = 8\Theta a^3/3R.$$

Из формул (3.2), (3.3) соответственно при малых и больших  $\lambda$  найдем

$$(3.4) \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\pi\Theta H^3}{2RP}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{PH}{2\pi\Theta R}};$$

$$(3.5) \quad \lambda = \sqrt[3]{\frac{8\Theta H^3}{3RP}}, \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{9P^2}{64\Theta^2 R}}.$$

Формула (3.4) обеспечивает достаточную точность, если  $\lambda \leq 2$ , а формула (3.5)—если  $\lambda \geq 3$  [8]. Для случая тонкого образца по первой формуле (3.4) определим  $\lambda = 1,64$ , а для случая толстого образца по первой формуле определим  $\lambda = 3,10$ . Таким образом, для подсчета комплекса (3.1) в случае тонкого и толстого образцов можно соответственно использовать формулы (3.4), (3.5). При этом, если образец по толщине неоднороден, в (3.4) следует заменить  $\Theta$  на  $\Theta^* = l\Theta(2A)^{-1}$ , а в (3.5) —  $\Theta$  на  $\Theta^* = \Theta l$ . Подсчитывая таким образом отношение  $\delta_1/\delta_2$  для случаев однородности и неоднородности образцов, при  $m = 10$  для комплекса (3.1) получим значение 1,055. Таким же образом убедимся, что комплекс (3.1) больше 1 при всех  $1,43 \leq m < \infty$ .

Итак, существует диапазон значений  $m$ , в котором обеспечивается качественное согласие теории с экспериментом, и в диапазоне существует значение  $m$ , обеспечивающее количественное совпадение.

Полученные результаты рассматриваются авторами как весомые признаки существования поверхностной неоднородности в твердых телах.

Поступила 1 X 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киттель. Введение в физику твердого тела. М., Мир, 1963.
2. Таблицы физических величин. Справочник. М., Атомиздат, 1976.
3. Бабич В. Ф., Липатов Ю. С. Динамический метод определения механических характеристик поверхностного слоя полимера.— Механика полимеров, 1969, № 3.
4. Степаненко Ю. П. Динамометрическое захватное устройство для испытания образцов на одноосное растяжение.— В сб.: Пластмассы в машиностроении и на железнодорожном транспорте. М., Транспорт, 1967.
5. Степаненко Ю. П. Дифференциальный метод тензометрирования полимеров.— Механика полимеров, 1974, № 3.
6. Александрова Г. П. Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
7. Александрова Г. П. О влиянии сил поверхностного натяжения на контактную жесткость.— В сб.: Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону, изд. РИСИ, 1975.
8. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Наука, 1974.