ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Ударная волна на больших расстояниях от места взрыва. ПММ, 1956, № 6.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Ханукаев А. Н., Ванягин И. Ф., Гоголев В. М., Маркин В. Г. О распространении волн напряжений при взрыве в твердых породах. Зап. Ленингр. горн. ин-та им. Г. В. Плеханова, 1961, т. XIV, вып. 1.
4. Медведева Н. С., Шемякин Е. И. Волны нагрузки при подземном взрыве в горных породах. ПМТФ, 1961, № 6.
5. Рахматуллин Х. А., Ю. А. Демьянов. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. 1961.
6. Бидерман В. Л. Расчеты на ударную нагрузку. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Сб. под ред. С. Д. Пономарева. Машгиз, 1952.
7. Григорьян С. С., Гриб А. А., Зволинский Н. В., Качанов Л. М., Петрашень Г. И. О работах Е. И. Шемякина «Расширение газовой полости в несжимаемой упруго-пластической среде (к изучению действия взрыва на грунт)» и Н. С. Медведевой и Е. И. Шемякина «Волны нагрузки при подземном взрыве в горных породах». Изв. АН СССР, сер. Механика и машиностроение, 1962, № 5.
8. Glanvill W. The creep or flow of reinforced concrete, London, 1930.

ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. М. Гоголев, В. Г. Мыркин, Г. И. Яблокова

(*Ленинград*)

В ряде задач, связанных с изучением сильных ударных волн в твердых телах, необходимы сведения об их термодинамических свойствах при высоких нагрузках. В настоящее время для изучения указанных свойств широкое распространение получил так называемый метод ударного сжатия [1–10]. Этот метод позволяет получить ударную адиабату для исследуемого материала. Используя ударную адиабату и теоретическую модель твердого тела в приближении Дебая или в более точном приближении, можно получить уравнение состояния и другие термодинамические соотношения.

Большое разнообразие твердых материалов и недостаточная изученность их свойств при ударном сжатии ставят вопрос о рассмотрении возможности обобщения экспериментальных данных и получения унифицированных соотношений, описывающих термодинамические свойства определенного класса твердых материалов, которые позволили бы произвести экстраполяцию этих свойств на другие материалы. Такое обобщение в точном смысле едва ли возможно. Однако для задач прикладного характера во многих случаях оказывается достаточным наличие приближенных сведений по этому вопросу.

Ниже приводятся результаты обобщения экспериментальных данных [1–10] по ударному сжатию металлов, горных пород и ряда других твердых материалов. Предлагается единая ударная адиабата для указанных материалов. На основе теоретической модели твердого тела в приближении Дебая и ударной адиабаты дается обобщенное уравнение состояния, выражение для внутренней энергии и ряд других термодинамических соотношений для твердых тел. Эти результаты носят приближенный характер.

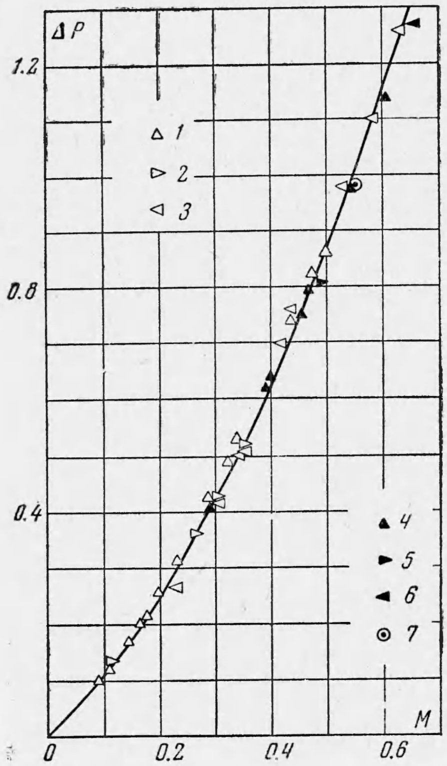
§ 1. **Обобщенная ударная адиабата.** В настоящее время достаточно подробно изучена ударная сжимаемость металлов [1–5, 8–10]. Кроме того, в опубликованной литературе имеются экспериментальные данные по ударному сжатию ряда горных пород [6, 11] и некоторых других твердых материалов [6, 7]. Рассмотрим возможность их обобщения и получения единой ударной адиабаты. Для сопоставления указанных данных необходимо их привести к безразмерному виду. В качестве размерных параметров, которые характеризовали бы вид твердого материала, представляется рациональным выбрать скорость звука c_0 в невозмущенной среде и плотность ρ_0.

На фиг. 1 приведены экспериментальные точки по ударному сжатию твердых пород и родственных им материалов в системе координат

$$\Delta P = \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0^2}, \qquad M = \frac{u}{c_0}$$

где $p - p_0$ — скачок давления на фронте ударной волны, распространяющейся по невозмущенной среде, u — скорость частиц на фронте ударной волны. Из рассмотрения фигуры видно, что для различных материалов опытные точки достаточно хорошо согласуются между собой без каких-либо заметных систематических отклонений.

На фиг. 2 в той же системе координат приведены экспериментальные точки для безразмерных давлений до величин $\sim$ 35. Так как для больших давлений сведения об ударной сжимаемости твердых пород отсутствуют, то на фигуре приведены точки для металлов; в данном случае опытные точки для различных материалов хорошо согласуются.



Ниже на основании приведенных данных сделана попытка получить единую ударную адиабату для твердых пород, металлов и ряда других материалов.

При аппроксимации опытных данных по сжимаемости жидкостей и тведых тел часто используют аналитическую зависимость вида

$$\Delta P = \frac{p - p_0}{\rho c_0^2} = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right] \qquad (1.1)$$

где A и n — постоянные, определяемые по опытным данным. Используя условия динамической совместности, перейдем в (1.1) к переменным ΔP, M

$$M^2 = \Delta P\,[1 - (A\Delta P + 1)^{-1/n}] \qquad (1.2)$$

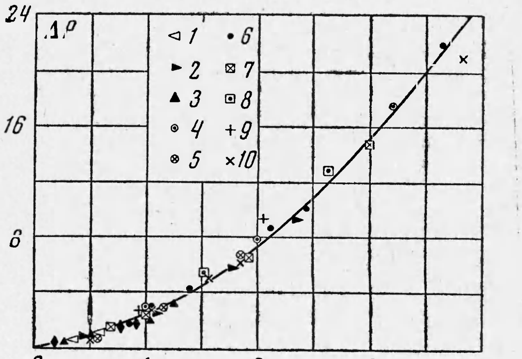
В результате аппроксимации данных фиг. 1 и 2 получаем

$$A = 5.5, \qquad n = 5 \quad \text{при } 0.1 \leqslant \Delta P \leqslant 35 \qquad (1.3)$$

$$A = 3, \qquad n = 3 \quad \text{при } 0 \leqslant \Delta P \leqslant 0.1 \qquad (1.4)$$

Фиг. 1. Кривая-расчет по формуле (1.2); точки:
1 — мрамор ($\rho_0 = 275$, $c_0 = 3810$)
2 — кварц ($\rho_0 = 270$, $c_0 = 3700$)
3 — парафин ($\rho_0 = 92.8$, $c_0 = 3000$)
4 — NaCl монокристалл ($\rho_0 = 220$, $c_0 = 3318$)
5 — CO_2 твердая ($\rho_0 = 157$, $c_0 = 2050$)
6 — туф розовый ($\rho_0 = 194$, $c_0 = 1950$)
7 — туф белый ($\rho_0 = 163$, $c_0 = 1300$)
$[\rho_0] = сек^2/м^4$, $[c_0] = м/сек$

На фиг. 1 и 2 график зависимости (1.2) с учетом (1.3) и (1.4) показан сплошными линиями. Этот график достаточно хорошо согласуется с экспериментальными точками. Относительное отклонение опытных точек от кривой лежит в пределах десяти процентов.



Фиг. 2. Кривая-расчет по формуле (1.2): точки:
1 — парафин
2 — CO_2 твердая
3 — NaCl монокристалл
4 — Cd ($\rho_0 = 891$, $c_0 = 2410$)
5 — Cu ($\rho_0 = 908$, $c_0 = 3980$)
6 — Pb ($\rho_0 = 1154$, $c_0 = 2020$)
7 — Sn ($\rho_0 = 743$, $c_0 = 2760$)
8 — Zn ($\rho_0 = 728$, $c_0 = 3030$)
9 — туф белый
10 — туф розовый

Следует отметить, что формула (1.2) при условии (1.4) носит интерполяционный характер, так как в этом диапазоне давлений опытные данные отсутствуют.

Подробное сопоставление аппроксимации (1.2) при условиях (1.3) и (1.4) с опытными данными для различных металлов дано на фиг. 3. Это сопоставление еще раз показывает хорошее совпадение опытных данных с аппроксимацией (1.2) — (1.4).

В плоскости переменных ΔP и ρ/ρ_0 имеет место несколько больший разброс экспериментальных точек. В связи с этим отклонение опытных точек от кривой (1.2) достигает 20%.

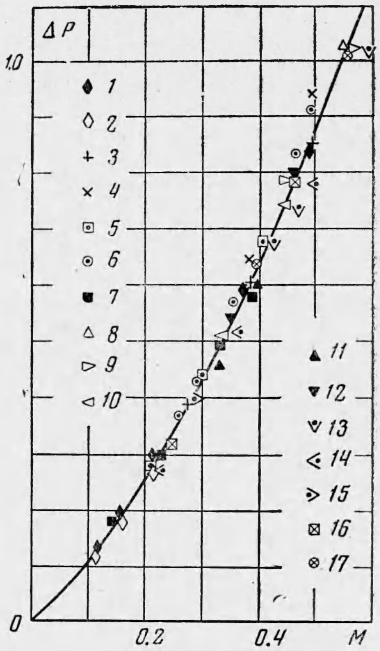
Таким образом, проведенное сопоставление опытных данных для различных твердых пород, металлов и ряда других материалов показывает, что для приближенного описания ударной сжимаемости этих материалов можно использовать обобщенную ударную адиабату (1.1).

§ 2. **Уравнение состояния для твердых тел.** Знание ударной адиабаты твердого тела позволяет получить уравнение состояния и другие термодинамические характеристики, если использовать теоретическую модель твердого тела в приближении Дебая. Известно [12], что в этом приближении внутренняя энергия и уравнение состояния могут быть представлены в виде

$$E = E_x(v) + E_m(v, T) \tag{2.1}$$

$$p = \frac{\partial E_x}{\partial v} + \gamma(v)\frac{E_m}{v} \tag{2.2}$$

Здесь p—давление, T—температура, v — удельный объем, E_x — энергия холодного сжатия, E_m— энергия, связанная с тепловыми



Фиг. 3. Кривая-расчет по формуле (1.2); точки:
1 — Co ($\rho_0 = 900$, $c_0 = 4630$)
2 — Be ($\rho_0 = 188$, $c_0 = 7800$)
3 — Th ($\rho_0 = 1190$, $c_0 = 2050$)
4 — Tl ($\rho_0 = 1210$, $c_0 = 1830$)
5 — Zn
6 — Cd
7 — Zr ($\rho_0 = 662$, $c_0 = 3330$)
8 — Ag ($\rho_0 = 1070$, $c_0 = 3190$)
9 — Au ($\rho_0 = 1960$, $c_0 = 3050$)
10 — Cr ($\rho_0 = 725$, $c_0 = 5150$)
11 — Mo ($\rho_0 = 1040$, $c_0 = 5190$)
12 — Ni ($\rho_0 = 905$, $c_0 = 4630$)
13 — Ti ($\rho_0 = 460$, $c_0 = 4840$)
14 — V ($\rho_0 = 622$, $c_0 = 5180$)
15 — W ($\rho_0 = 1955$, $c_0 = 4050$)
16 — Sn ($\rho_0 = 743$, $c_0 = 2760$)
17 — Cu ($\rho_0 = 908$, $c_0 = 3980$)

движениями частиц, γ — коэффициент Грюнейзена. В этих выражениях E_m, E_x и γ являются неизвестными функциями. Если они будут определены, то будет получено полное термодинамическое описание твердого тела. Рассмотрим их определение. Тепловая энергия в этом случае может быть вычислена следующим образом [12]:

$$E_m = c_v T \tag{2.3}$$

Если предположить, что температура тела с одной стороны заметно выше комнатной, а с другой стороны не превосходит десятков тысяч градусов, то согласно закону Дюлонга и Пти [12] будем иметь

$$c_v \approx c_p = \text{const} \tag{2.4}$$

т. е. теплоемкости при постоянном объеме и давлении одинаковы и постоянны. Таким образом, тепловая энергия полностью определяется (2.2) и (2.3) в упомянутом выше интервале температур. Для определения энергии холодного сжатия используется ударная адиабата [1, 8]. Для этого из условия динамической совместности

$$E - E_0 = {}^1/_2 (p + p_0)(v - v_0)$$

где E_0, p_0, v_0 — значения параметров перед фронтом ударной волны, исключается тепловая часть энергии при помощи (2.1) и (2.2). В результате получается уравнение для определения энергии холодного сжатия по ударной адиабате

$$\frac{d\Delta E_x}{dv} + \frac{\gamma}{v}\Delta E_x = -\frac{\gamma}{2}\left(h - \frac{v_0}{v}\right)(p - p_0) + \gamma p_0\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) - p_0 + \frac{\tilde{\gamma}}{v}E_{m_0} \tag{2.5}$$

Здесь индекс 0 обозначает величины параметров среды в невозмущенном состоянии, значение давлений берется на ударной адиабате (1.1)

$$\Delta E_x = E_x - E_{x0}, \qquad h = (2+\gamma)/\gamma$$

Это уравнение определяет энергию холодного сжатия с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

Для определения коэффициента Грюнейзена Л. Д. Ландау и Слетером [1–4] была предложена зависимость

$$\gamma = -\frac{2}{3} - \frac{v}{2}\frac{d^2 p_x / dv^2}{dp_x / dv} \qquad \left(p_x = -\frac{\partial E_x}{\partial v}\right) \tag{2.6}$$

Здесь $p_x(v)$ давление холодного сжатия, E_x — энергия холодного сжатия.

Несколько позже Макдональдом и Дугдейлом была предложена более точная, однако более громоздкая формула [1–4, 8]. Для целей настоящей работы удобнее использовать зависимость (2.6). Совокупность соотношений (2.5) и (2.6) дает дифференциальное уравнение для определения энергии холодного сжатия. Однако точное решение этого уравнения возможно лишь численными методами и сопряжено с большими трудностями. Поэтому проведем приближенное решение указанного уравнения. Расчеты показывают, что коэффициент Грюнейзена является медленно изменяющейся функцией по сравнению с остальными переменными величинами в (2.5). В связи с этим, проинтегрируем (2.5), считая, что γ постоянно. Затем при помощи (2.6) определим зависимость γ от v. Прежде чем выполнить это, перейдем к безразмерным переменным

$$P = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta E_x}{c_0^2}, \quad \varepsilon_m = \frac{c_v T}{c_0^2} \tag{2.7}$$

Делая замену в (2.5) согласно (2.7) и выполняя интегрирование, получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(1)}(v) + \frac{P_0}{2}\left[1 - \frac{\gamma+2}{\gamma+1}V\right] + V^{-\gamma}\left[\frac{P_0}{2(\gamma+1)} - \varepsilon_{m0}\right] + \varepsilon_{m0} \tag{2.8}$$

где

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\gamma}{2A}\left\{\frac{1}{\gamma}\left[1 - \frac{(\gamma+2)}{(\gamma+1)}V\right] + \frac{1}{(n-\gamma)}\left[1 - \frac{(\gamma+2)(n-\gamma)}{\gamma(n-\gamma-1)}V\right]V^{-n} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n+1)}{\gamma(\gamma+1)(n-\gamma)(n-\gamma-1)}V^{-\gamma}\right\} \tag{2.9}$$

Величины A и n определяются согласно (1.3) — (1.4).

Таким образом, соотношения (2.1), (2.3) и (2.8) позволяют получить выражение для внутренней энергии. Из (2.2), (2.7) и (2.3) получаем уравнение состояния

$$P = P_x(V) + \frac{\gamma}{V}\varepsilon_m \tag{2.10}$$

где

$$P_x = P_x^{(1)}(V) + \frac{P_0}{2}\frac{\gamma+2}{\gamma+1} + \frac{\gamma}{V^{\gamma+1}}\left[\frac{P_0}{2(\gamma+1)} - \varepsilon_{m0}\right] \tag{2.11}$$

$$P_x^{(1)}(V) = \frac{\gamma}{2A}\left\{\frac{n}{n-\gamma}\left[\frac{(\gamma+2)(n-\gamma)(n-1)}{\gamma(n-\gamma-1)n}V - 1\right]V^{-(n+1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{n(n+1)}{(\gamma+1)(n-\gamma)(n-\gamma-1)}V^{-(\gamma+1)} - \frac{1}{\gamma}\frac{(\gamma+2)}{(\gamma+1)}\right\} \tag{2.12}$$

Величина γ определяется из (2.6) и (2.11). Пренебрегая начальными значениями параметров в (2.11), получаем

$$\gamma = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{B_1(n+1) - B_2(n+2)V^{-1} - B_3(\gamma+2)V^{n-\gamma-1}}{B_1 - B_2V^{-1} - B_3V^{n-\gamma-1}} \tag{2.13}$$

где

$$B_1 = \frac{(\gamma+2)(n-1)n}{n-\gamma-1}, \quad B_2 = \frac{n(n+1)}{n-\gamma}, \quad B_3 = \frac{\gamma n(n+1)}{(n-\gamma)(n-\gamma-1)}$$

График функции $\gamma(V)$ приведен на фиг. 4. Аналитическая зависимость

$$\gamma = 2.3V^{1.23} \tag{2.14}$$

дает достаточно хорошую аппроксимацию графика фиг. 4.

Таким образом, соотношения (2.1), (2.3), (2.8), (2.10) и (2.14) дают выражение для внутренней энергии и уравнение состояния для металлов, твердых пород и ряда других материалов.

На фиг. 5 даны для сопоставления ударная адиабата и изотерма холодного сжатия (2.11) с учетом (2.14). При сравнительно небольших давлениях эти кривые мало отличаются одна от другой. Представляет интерес аналитическая оценка разности этих величин. Введем для этого величину

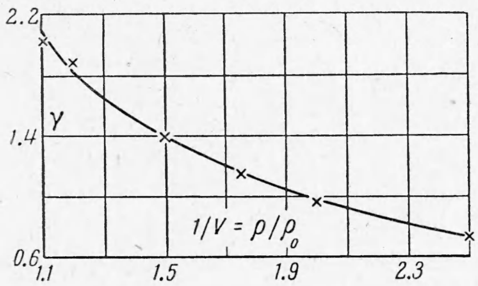
$$\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

Считая ее малой по сравнению с единицей и разлагая выражения (1.1) и (2.11) в ряд по δ, получим

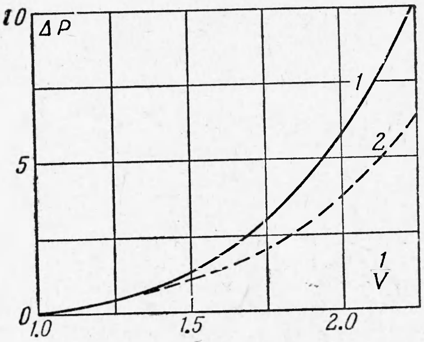
$$\Delta P - P_x^{(1)} = \frac{1}{A}\left\{\frac{n\gamma(n+1)[(n-1)(n-2\gamma)+\gamma(\gamma-1)]}{12(n-\gamma)(n-\gamma-1)}\delta^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma n(n+1)[(n-1)(n-2)(2n-3\gamma)+\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)]}{2\cdot 4!\,(n-\gamma)(n-\gamma-1)}\delta^4 + \ldots\right\} \qquad (2.15)$$

Так как V при этом изменяется мало, считаем γ постоянной. Из (2.15) следует,



Фиг. 4. Кривая-расчет по формуле (2.13); точки — расчет по формуле (2.14)



Фиг. 5. Сопоставление ударной адиабаты 1 с изотермой холодного сжатия 2

что разность между ударной адиабатой и изотермой холодного сжатия при относительно малых давлениях пропорциональна δ^3.

§ 3. **Выражение для энтропии твердого тела.** Согласно определению дифференциал энтропии имеет вид

$$ds = \frac{dE}{T} + \frac{p\,dv}{T} \qquad (3.1)$$

В соответствии с принятыми выше допущениями имеем

$$dE = \frac{\partial E_x}{\partial v}dv + c_v\,dT \qquad (3.2)$$

Подставив (3.2) в (3.1), получим

$$ds = \frac{1}{T}\left[\frac{dE_x}{dv} + p\right]dv + c_v\frac{dT}{T} \qquad (3.3)$$

Перейдем в (3.3) к безразмерным величинам

$$S = \frac{s}{c_v}, \quad P = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta E_x}{c_0^2}, \quad \varepsilon_m = \frac{c_x T}{c_0^2}$$

Используя уравнение состояния (2.10), получим

$$dS = \frac{\gamma\,dV}{V} + \frac{d\varepsilon_m}{\varepsilon_m} \qquad (3.4)$$

Интегрируя это равенство от точки начального состояния ($S = S_0$, $V = 1$, $\varepsilon_m = \varepsilon_{m0}$) до произвольного состояния, получим

$$S - S_0 = \ln\frac{\varepsilon_m V^\gamma}{\varepsilon_{m0}} \qquad (3.5)$$

Это соотношение представляет собой обобщенное выражение энтропии S твердого тела через параметры его состояния. Следует отметить внешнее сходство выражения (3.5) с выражением для энтропии идеального газа. В последнем случае роль коэффициента Грюнейзена играет разность

$$\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)$$

Если в твердом теле имеет место изоэнтропический процесс, то из (3.5) и (2.10) получается следующее выражение для адиабаты Пуассона

$$V^{\gamma+1}[P - P_x(V)] = \mathrm{const} \qquad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что произведение теплового давления на удельный объем в степени $(\gamma + 1)$ есть величина постоянная, т. е. и в данном случае имеет место отмеченная выше аналогия с идеальным газом. Эта аналогия связана с допущением (2.3).

Чтобы получить оценку скачка энтропии на фронте ударной волны в зависимости от ее интенсивности, исключим из (3.5) тепловую энергию при помощи уравнения состояния (2.10)

$$S - S_0 = \ln\left\{1 + \frac{[P - P_x]\, V^{\gamma+1} - \gamma\varepsilon_{m0}}{\gamma\varepsilon_{m0}}\right\} \qquad (3.7)$$

При сравнительно небольшой интенсивности ударной волны дробь в выражении (3.7) мала. Поэтому представим логарифм в виде ряда

$$S - S_0 = \frac{[P - P_x]\, V^{\gamma+1} - \gamma\varepsilon_m}{\gamma\varepsilon_{m0}} + \ldots$$

Воспользовавшись (2.15) и разложив $V^{\gamma+1}$ в ряд по δ, получим

$$S - S_0 = \frac{1}{\gamma\varepsilon_{m0}} \{A_1\delta^3 + [A_2 - A_1(\gamma + 1)]\delta^4 + \ldots\} \qquad (3.8)$$

где A_1— коэффициент из (2.15) при δ^3, A_2 — коэффициент из (2.15) при δ^4. Из этого выражения следует, что скачок энтропии на фронте ударной волны пропорционален скачку плотности в степени не ниже 3.

Таким образом, на основании обобщения экспериментальных данных по ударному сжатию металлов, твердых пород и ряда других непористых материалов удалось получить единую для этих материалов ударную адиабату. В результате использования теоретической модели твердого тела и единой ударной адиабаты получено обобщенное уравнение состояния, выражение для внутренней энергии и энтропии, которые могут быть использованы для приближенного описания термодинамических свойств металлов, твердых пород и ряда других твердых непористых материалов.

Поступила 25 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшулер Л. В., Крупников К. К., Бражник М. И. Динамическая сжимаемость металлов при давлениях от четырехсот тысяч до четырех миллионов атмосфер. Журн. эксперим. и теорет. физ., 1958, т. 34, № 4.
2. Альтшулер Л. В., Крупников К. К., Леднев Б. Н., Жучихин В. И., Бражник М. И. Динамическая сжимаемость и уравнение состояния железа при высоких давлениях. Журн. эксперим. и теорет. физ., 1958, т. 34, № 4.
3. Альтшулер Л. В., Кулешова Л. В., Павловский М. Н. Динамическая сжимаемость, уравнение состояния и электропроводность хлористого натрия при высоких давлениях. Журн. эксперим. и теорет. физ., 1960, т. 39, № 1.
4. Альтшулер Л. В., Баканова А. А., Трунин Р. Ф. Ударные адиабаты и нулевые изотермы семи металлов при высоких давлениях. Журн. эксперим. и теорет. физ., 1962, т. 42, № 1.
5. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнение состояния железа до давлений в несколько миллионов атмосфер. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 4.
6. Дремин А. Н. Исследование ударного сжатия мрамора и кварца. Ученый совет по народнохозяйственному использованию взрыва СО АН СССР, 1960, № 16.
7. Зубарев В. Н., Телегин Г. С. Ударная сжимаемость жидкого азота и твердой углекислоты. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 2.
8. Walsh J. M., Rice M. H., McQueen R. G. Shock-Wave Compressions of Twenty-seven Metalls. Equations of state of Metalls. Phys. Rev., 1957, 108, 2.
9. Bancroft D., Peterson E., Minshall S. Polymorphism of Iron at High Pressure. J. Appl. Phys., 1956, vol. 27, No. 3.
10. McQueen R. G. and Marsh S. P. Equation of state for Nineteen Metallic Elements from Shock-Wave Measurements to Two Megabars. J. Appl. Phys., 1960, 31, 7.
11. Jonson G. W., Higgins G. H., Violet C. E. Underground Nuclear Detonations. J. Geophys. Res., 1959, 64, 10.
12. Ландау Л., Лифшиц Е. Статистическая физика, 1951., М.—Л.