ЛИТЕРАТУРА

1. **Веригин Н. Н., Дзекцер Е. С., Тынчерова Э.** Одномерная фильтрация при наличии зон полного и частичного насыщения грунта водой.— В сб.: Инженерные изыскания в строительстве, № 2(20). М., Изд. ЦИНИС Госстроя СССР, 1973.
2. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М., ГИТТЛ, 1952.
3. **Асланов Г. К.** Нестационарная фильтрация воды в грунтах при оросительных поливах и промывании засоленных почв без дренажа.— «Изв. высш. учеб. заведений. Геология и разведка», 1970, № 4.
4. **Чжао Пей-ю.** Особенности проектирования и возведения плотин из лесса и лессовидных грунтов. Дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1955.

УДК 624.131.6 : 532.72

РАССОЛЕНИЕ «ВЛАЖНЫХ» ГРУНТОВ

В. И. Пеньковский

(*Новосибирск*)

В зоне аэрации грунтов, обладающих большой водоудерживающей способностью, подавляющая часть солей находится в норовом растворе, связанном со скелетом грунта. Как известно [1], вода в почве становится неподвижной при влажностях, не превышающих так называемую «наименьшую полевую влагоемкость», или «влажность разрыва капилляров», при которой нарушается связность пространства, занятого жидкой фазой. В этих условиях конвективно-диффузионный солеобмен между отдельными слоями почвы пренебрежимо мал либо отсутствует вовсе, благодаря чему кривые распределения солей могут (как это часто наблюдается на практике) в течение длительного времени сохранять свою форму.

С началом промывки связность пространства, занятого жидкостью, в зоне промачивания восстанавливается, и под воздействием конвекции и фильтрационной диффузии происходит процесс перераспределения солей.

Пусть m_2 — объемная «влажность разрыва капилляров», m_1 — количество влаги, способной передвигаться под действием силы тяжести. При промывке почвы дождеванием с интенсивностью $v < k$, где k — коэффициент фильтрации грунта, величину m_1 можно оценить, например, применяя формулу для расхода воды при движении с неполным насыщением пор [2],

$$m_1 = (m - m_2)(v/k)^{1/n},$$

где m — пористость грунта; $n \approx 3, 5$ — эмпирическая константа. В условиях промывки с затоплением поверхности почвы $v \geqslant k$, а величина $m_1 = m - m_2$ по физическому смыслу идентична коэффициенту недостатка насыщения (или коэффициенту водоотдачи).

Ниже рассматривается вопрос о перераспределении солей в зоне промачивания почвы на начальной стадии промывки (с момента подачи промывной воды и образования подвижного фронта промачивания $x = x_0(t)$) и заключительной стадии (когда с прекращением подачи воды образуется погружающаяся в глубь почвы свободная поверхность $x = x_1(t)$ грунтовых вод с заданной начальной минерализацией). В последнем случае окончательная засоленность грунта в заданной точке определится концентрацией порового раствора, удерживаемого скелетом грунта.

1. Начальная стадия промывки. Пусть ось x берет начало на дневной поверхности и направлена в глубь почвы.

Из закона Фика для потока массы солей сквозь фиксированную единичную площадку, перпендикулярную оси x,

$$q = -Dc_x + vc,$$

где D — коэффициент диффузии соли в среде с заданным насыщением пор; c — концентрация; v — скорость фильтрации, и закона сохранения массы солей в каждом элементарном объеме

$$-q_x = [(m_1 + m_2)c]_t$$

следует, что в области движения раствора $0 < x < x_0(t) = \int\limits_0^t \frac{v}{m_1}\,dt$ функция $c(x, t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$(Dc_x - vc)_x = [(m_1 + m_2)c]_t\ .$$

Поток массы солей q_0 сквозь площадку, движущуюся в зоне промачивания $0 < x < x_0(t)$ вдоль оси x с некоторой скоростью v_n, вычисляется по формуле

$$q_0 = q - v_n(m_1 + m_2)c.$$

В частности, при $v_n = dx_0/dt = v/m_1$ получим

$$q_0 = -Dc_x - m_2vc/m_1.$$

Пусть $N(x)$ — начальная концентрация связанного с почвой раствора. Тогда сквозь площадку, движущуюся в области $x_0 < x < \infty$ со скоростью v_n, будет проходить поток массы солей $-v_nm_2N(x)$. Полагая $v_n = v/m_1$ и приравнивая это потоку q_0, получим граничное условие на подвижном фронте промачивания при $x = x_0(t)$

$$Dc_x + m_2vc/m_1 = m_2vN(x_0(t))/m_1.$$

В дальнейшем величины m_1, m_2, v, D предполагаются постоянными. Вводя новые независимые переменные формулами

$$\xi = vx/D,\ \tau = v^2t/(m_1D),$$

в случае промывки путем затопления дневной поверхности почвы пресной водой приходим к задаче

$$\begin{cases} c_{\xi\xi} - c_\xi = \lambda^{-1}c_\tau,\ 0<\xi<\tau; \\ c = 0 \qquad \text{при } \xi = 0,\ \tau > 0; \\ c_\xi + m_2c/m_1 = \varphi(\tau) \ \text{при } \xi = \tau > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$\lambda = m_1/(m_1 + m_2);\ \varphi(\tau) = m_2N(D\tau/v)m_1.$$

Представим искомую функцию в виде

$$c(\xi, \tau) = u(\xi, \tau)\exp(\xi/2 - \lambda\tau/4),$$

тогда задача (1.1) приводится к виду

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u_{\xi\xi} = \lambda^{-1} u_\tau, \ 0 < \xi < \tau, \ \tau > 0; \\ u = 0 \qquad \text{при } \xi = 0, \ \tau > 0; \\ u_\xi + \delta u = \varphi(\tau) \exp[\tau(\lambda - 2)/4] \ \text{при } \xi = \tau > 0 \end{cases}$$

$$(\delta = 1/2 + m_2/m_1).$$

Функцию $u(\xi, \tau)$ будем искать среди решений начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в области $\xi > 0$, $\tau > 0$

$$(1.3)\qquad u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}} \int\limits_0^\infty \rho(s) \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi - s)^2}{4\lambda\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi + s)^2}{4\lambda\tau}\right]\right\} ds,$$

где $\rho(s)$ подлежит определению.

Удовлетворяя условию при $\xi = \tau$, для функции $\rho(s)$ получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$(1.4)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda\tau}} \int\limits_0^\infty F(s, \lambda) \exp\left(-\frac{s^2}{4\lambda\tau}\right) ds = \varphi(\tau) e^{\gamma\tau}$$

$$\left(F(s, \lambda) = \frac{d\rho}{ds} \operatorname{ch} \frac{s}{2\lambda} + \delta\rho \operatorname{sh} \frac{s}{2\lambda}; \ \gamma = \frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda}\right)$$

при начальном значении

$$(1.5)\qquad \rho(0) = 0,$$

вытекающем из согласования пределов в точке $\xi = \tau = 0$. Обозначим через

$$L_p(\varphi) = \int\limits_0^\infty \varphi(t) e^{-pt} dt = \Phi(p),$$

$$L_s^{-1}(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d - i\infty}^{d + i\infty} \Phi(p) e^{ps} dp = \varphi(s).$$

прямое и обратное преобразование Лапласа соответственно. Тогда, обращая интегральный оператор в (1.4), найдем [3]

$$F(s, \lambda) = L_s^{-1}[\lambda p L_{\lambda p^2 - \gamma}(\varphi)].$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия (1.5), получаем

$$(1.6)\qquad \rho(s) = \left(\operatorname{ch} \frac{s}{2\lambda}\right)^{\lambda - 2} \int\limits_0^s F(z, \lambda) \left(\operatorname{ch} \frac{z}{2\lambda}\right)^{1-\lambda} dz.$$

Таким образом, подстановка формулы (1.6) в (1.3) дает функцию $u(\xi, \tau)$, удовлетворяющую всем условиям задачи (1.2).

2. Перераспределение солей в грунте при стекании гравитационной влаги. Пусть $x = x_1(t) = v(t - t_0)/m_1$ — положение опускающегося уровня грунтовых вод, момент его отрыва от дневной поверхности почвы примем за начальный ($t_0 = 0$).

Сквозь площадку, движущуюся вдоль оси x в зоне $0 < x < x_1(t)$ со скоростью v/m_1, поток массы солей составит величину — $vm_2c_1(x)/m_1$, где $c_1(x)$ — распределение солей в поровом растворе после стекания гравитационной влаги. Приравнивая эту величину потоку q_0 в зоне $x_1 < x < \infty$ и учитывая, что при $x = x_1(t)$ $c = c_1(x)$, на подвижной границе получим условие

$$Dc_x + m_2vc/m_1 = m_2vc/m_1.$$

Таким образом, рассматриваемую стадию промывки моделирует задача

$$(2.1)\qquad \begin{cases} c_{\xi\xi} - c_\xi = \lambda^{-1}c_\tau, \ 0 < \tau < \xi < \infty, \\ c_\xi = 0 \qquad \text{при } \xi = \tau > 0 \\ c = c_0(\xi) \ \text{при } \xi > 0, \ \tau = 0, \end{cases}$$

где $c_0(\xi)$ — распределение концентрации в начальный момент времени, образовавшееся к концу первой стадии промывки. Предположим, что функция $c_0(\xi)$ дифференцируемая (это ограничение несущественно и может быть ослаблено). В терминах функции $u(\xi, \tau) = c(\xi, \tau) \exp(-\xi/2 + \lambda\tau/4)$ задача (2.1) принимает вид

$$(2.2)\qquad \begin{gathered} u_{\xi\xi} = \lambda^{-1}u_\tau, \qquad 0 < \tau < \xi < \infty; \\ u_\xi + u/2 = 0 \qquad \text{при } \xi = \tau > 0; \\ u = f(\xi) = c_0(\xi)\exp(-\xi/2) \ \text{при } \xi > 0, \ \tau = 0. \end{gathered}$$

Решение ее представим в виде интеграла Пуассона

$$(2.3)\qquad u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0} \rho_0(s)\exp\left[-\frac{(\xi - s)^2}{4\lambda\tau}\right] + \int\limits_0^\infty f(s)\exp\left[-\frac{(\xi - s)^2}{4\lambda\tau}\right]ds\right\},$$

где $\rho_0(s)$ — некоторое непрерывное продолжение функции $f(s)$ для $s < 0$, причем

$$(2.4)\qquad \rho_0(0) = f(0).$$

Функция (2.3) удовлетворяет уравнению и условию при $\tau = 0$ задачи (2.2). Обозначив $\rho(s) = \rho_0(-s)$, перепишем формулу (2.3) в виде

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}\int\limits_0^\infty\left\{\rho(s)\exp\left[-\frac{(\xi + s)^2}{4\lambda\tau}\right] + f(s)\exp\left[-\frac{(\xi - s)^2}{4\lambda\tau}\right]\right\}ds.$$

Проинтегрировав по частям с учетом (2.4) и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\exp\left[-\frac{(\xi \pm s)^2}{4\lambda\tau}\right] = \pm\frac{\partial}{\partial s}\exp\left[-\frac{(\xi \pm s)^2}{4\lambda\tau}\right],$$

условие при $\xi = \tau$ для функции $u(\xi, \tau)$ задачи (2.2) запишем в виде

$$[u_\xi + u/2]_{\xi=\tau} = \frac{\exp(-\tau/4\lambda)}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{df}{ds} + \frac{1}{2}f\right)e^{\frac{s}{2\lambda}} - \left(\frac{d\rho}{ds} - \frac{1}{2}\rho\right)e^{-\frac{s}{2\lambda}}\right] \times$$

$$\times\, e^{-\frac{s^2}{4\lambda\tau}}ds = 0.$$

Оно должно быть выполнено при любом $\tau > 0$. Для этого достаточно, чтобы функция $\rho(s)$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{d\rho}{ds} - \frac{1}{2}\rho = e^{s/\lambda}\left(\frac{df}{ds} + \frac{1}{2}f\right).$$

Отсюда, учитывая условие (2.4), интегрированием получим

$$\rho(s) = c_0(s)\exp\left[s\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1-\lambda}{\lambda}e^{\frac{s}{2}}\int_0^s c_0(z)\,e^{\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)z}dz.$$

Распределение солей в почве стекания гравитационной воды определится формулой

$$c_1(\xi) = c(\xi,\xi) = \frac{e^{-\gamma\xi}}{\sqrt{\pi\lambda\xi}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4\lambda\xi}}\left[c_0(s)\,e^{\varkappa s} - \varkappa e^{-\varkappa s}\int_0^s c_0(z)\,e^{2\varkappa z}dz\right]ds$$

$$(2\varkappa = 1/\lambda - 1;\ \gamma = (1-\lambda)^2/(4\lambda)).$$

Примеры: 1. При $c_0(\xi) = \exp(-a\xi)$ получим

$$c_1(\xi) = \frac{\varkappa - a}{2\varkappa - a}\exp\left[a\lambda(a - 2\varkappa)\xi\right]\left\{1 + \operatorname{erf}\left[(\varkappa - a)\sqrt{\lambda\xi}\right]\right\} + \\ + \frac{\varkappa}{2\varkappa - a}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\varkappa\sqrt{\lambda\xi}\right)\right];$$

2. При $c_0(\xi) = \begin{cases} a, & 0 < \xi < \xi_0; \\ b, & \xi_0 < \xi < \infty \end{cases}$

$$c_1(\xi) = \frac{a}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{2\sqrt{\lambda\xi}} - \varkappa\sqrt{\lambda\xi}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{2\sqrt{\lambda\xi}} + \varkappa\sqrt{\lambda\xi}\right)\right] + \\ + \frac{b}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{2\sqrt{\lambda\xi}} - \varkappa\sqrt{\lambda\xi}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[(a-b)\,e^{2\varkappa\xi_0} - a\right] \times \\ \times\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{2\sqrt{\lambda\xi}} + \varkappa\sqrt{\lambda\xi}\right)\right].$$

Поступила 22 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Роде А. А.** О наименьшей влагоемкости.— «Почвоведение», 1965, № 12.
2. **Аверьянов С. Ф.** Зависимость водопроницаемости почвогрунтов от содержания в них воздуха.— «Докл. АН СССР», 1949, т. 69, № 2.
3. **Пеньковский В. И.** К вопросу о математическом моделировании процесса рассоления грунтов.— ПМТФ, 1975, № 5, с. 186—191.