

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгофф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора.—В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М., Мир, 1964.
2. Inogamov N. A. Turbulent phase of the Rayleigh—Taylor instability. Препринт Ин-та теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Черногловка, 1978.
3. Lord Rayleigh. Theory of sound. Vol. 2. N. Y., Dover Publications Inc., 1894. Рус. пер. Д. Стретт (Рэлей). Теория звука. Т. 2. М., Гостехиздат, 1955.
4. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I.— Proc. Roy. Soc. London, 1950, vol. A 201, N 1065.
5. Lewis D. J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II.— Proc. Roy. Soc. London, 1950, vol. A 202, N 1068.
6. Birkhoff G. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA—1862, 1955.
7. Birkhoff G.— In: Proceedings XIII Applied Mathematics Symposium, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1960.
8. Garabedian P. R. On steady state bubbles generated by Taylor instability.— Proc. Roy. Soc. London, 1957, vol. A 241, N 1226.
9. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания.— Труды ФИАН, 1965, т. 29.
10. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical study of large amplitude free-surface motion.— Phys. Fluids, 1966, vol. 9, N 5.
11. Daly B. J. Numerical study of two fluid Rayleigh—Taylor instability.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, N 2.
12. Давыдов Ю. М. Численное исследование тейлоровской неустойчивости в нелинейном приближении.— Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 3.
13. Волкова Р. А., Головизнин В. М., Улинич Ф. Р., Фаворский А. П. Численное моделирование обжата магнитного поля кумулирующим лайнером. Препринт ИПМ АН СССР № 111, 1976.
14. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов.— ЖВММФ, 1971, т. 11, № 1.
15. Давыдов Ю. М. Численный эксперимент в газовой динамике.— В сб.: Вычислительная математика и математическая физика. Вып. 2, 1975.
16. Давыдова И. М., Давыдов Ю. М. Элементы организации больших программ. М., изд. МФТИ, 1977.
17. Иногамов Н. А. Модельный анализ тейлоровской неустойчивости оболочек.— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, вып. 7.
18. Биркгофф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., Мир, 1964.

УДК 532.593 : 539.3

**ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ
НА РАЗВИТИЕ ВОЛНОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПОТОКА
ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ
С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ СКОРОСТИ**

А. Е. Букатов, В. И. Мордашев

(Севастополь)

Влияние упругой пластинки на волновое возмущение потока с постоянной глубиной скоростью изучалось без учета сжимающих усилий в работах [1, 2], а в случае продольного растяжения при отсутствии потока — в работе [3].

1. Пусть на поверхности потока однородной идеальной несжимаемой жидкости с вертикальным сдвигом скорости плавает тонкая упругая изотропная пластинка. В начальный момент времени поток не возмущен, а поверхность пластинки — жидкость горизонтальна. Начиная с момента $t = 0$, к поверхности пластинки прикладывается давление

$$(1.1) \quad p = p_0 f(x).$$

Изучим процесс развития волнового движения, генерируемого в условиях продольного сжатия.

В предположениях линейной теории с учетом продольных сжимающих усилий [1, 4—6] задача сводится к решению системы уравнений

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U(z) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U(z) \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

с граничными

$$(1.3) \quad \begin{aligned} D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa_1 F \zeta + \zeta &= \frac{1}{\rho g} (p_1 - p) \text{ при } z = 0, \\ w = 0 \text{ при } z &= -H \end{aligned}$$

и начальными

$$(1.4) \quad \zeta = u = w = p_1 = 0 \text{ при } t = 0$$

условиями, где

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad \bar{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \bar{D}_1 = \frac{D}{\rho g}; \\ \kappa_1 &= \frac{\rho_1 h}{\rho g}; \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}; \end{aligned}$$

$U(z)$ — скорость невозмущенного потока; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; u, w — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости волнового возмущения потока; p_1 — возмущение давления; ζ — прогиб пластинки или возвышение поверхности пластинка — жидкость; H — глубина бассейна; ρ_1, h, E, μ — плотность, толщина, модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона пластинки; Q — усилие сжатия, приходящееся на единицу ширины пластинки; ось z направлена вертикально вверх; начало координат выбрано на невозмущенной поверхности пластинка — жидкость. При этом w и ζ связаны между собой кинематическим условием

$$w = \partial \zeta / \partial t + u_0 \partial \zeta / \partial x, \quad u_0 = U(0).$$

Решим задачу (1.2)—(1.4) для

$$(1.5) \quad U(z) = u^* + a(z + H),$$

используя интегральные преобразования Фурье по x и Лапласа по t . В результате после вычисления интеграла Меллина и применения формулы обращения получим

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{P_0}{\rho \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{-1} r f^*(r) \text{th } rHK(r, t) e^{irx} dr, \\ K &= \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} + \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2) \Delta_1} e^{i\Delta_1 t} - \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2) \Delta_2} e^{i\Delta_2 t}, \quad \Delta_{1,2} = \gamma_{1,2} - u_0 r, \\ \gamma_{1,2} &= \frac{a}{2l_1} \text{th } rH \pm \tau, \\ \tau &= \left[\left(\frac{1}{4} a^2 \text{th}^2 rH + rg l_1 l \text{th } rH \right) l_1^{-2} \right]^{1/2}, \\ l_1 &= 1 + \kappa_1 gr \text{th } rH, \quad l = 1 + D_1 r^4 - Q_1 r^2, \quad u_0 = u^* + aH, \end{aligned}$$

$f^*(r)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Вычислим (1.6) при условии $Q_1 < Q^*$, необходимом для устойчивости ледяной пластины. Здесь

$$Q^* = \tau_1(r_0), \quad \tau_1(r) = \frac{a^2 \operatorname{th} rH}{4gl_1 r^3} + \frac{1}{r^2} + D_1 r^2,$$

r_0 — положительный корень уравнения $\tau_1'(r) = 0$. Величина Q^* определяется вертикальным сдвигом скорости течения, цилиндрической жесткостью и плотностью пластинки, глубиной и плотностью жидкости. Большшему сдвигу скорости отвечает и большая величина Q^* . При значениях параметров

$$(1.7) \quad E = 3,12 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 0,34, \quad h = 1 \text{ м}, \\ \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad H = 100 \text{ м},$$

соответствующих ледяной пластине [1, 7], она равна, в частности, 346,2; 346,4; 346,6 м², если $a = 0; 0,05; 0,1 \text{ м}^{-1}$. Таким Q^* отвечают сжимающие усилия $33,93 \cdot 10^5; 33,95 \cdot 10^5; 33,97 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$. При отсутствии потока w в случае потока с постоянной по глубине скоростью $Q^* = 2\sqrt{D_1}$.

Следуя работе [8], перепишем (1.6) в виде

$$(1.8) \quad \xi = -\frac{p_0}{\rho \sqrt{2\pi}} (\eta + \eta_1 - \eta_2), \quad \eta = \int_L \frac{r \operatorname{th} rH}{\Delta_1 \Delta_2} f^*(r) \exp(irx) dr,$$

$$\eta_k = \int_L \frac{r \operatorname{th} rH}{(\gamma_1 - \gamma_2) \Delta_k} f^*(r) \exp(i|x| M_k) dr, \quad k = 1, 2,$$

$$M_k = (\gamma_k - u_0 r) v + r \operatorname{sgn} x, \quad v = t/|x|,$$

где контуры интегрирования L, L_1, L_2 совпадают с действительной осью всюду, кроме окрестностей полюсов подынтегральных функций, представляющих собой вещественные корни уравнений

$$\gamma_1 - u_0 r = 0, \quad \gamma_2 - u_0 r = 0.$$

Корни уравнения $\gamma_1 - u_0 r = 0$ обходятся по полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни уравнения $\gamma_2 - u_0 r = 0$ — по полуокружностям, где $\operatorname{Re}(i\Delta_2) > 0$, причем L_1 обходит только точки, где $\gamma_1 = u_0 r$, а путь L_2 — точки, где $\gamma_2 = u_0 r$. При условии $Q_1 < Q^*$ такой обход полюсов обеспечивает затухание интегралов $\eta_{1,2}$ с течением времени для любого фиксированного x .

Уравнение $\gamma_1 - u_0 r = 0$ при рассматриваемом условии $Q_1 < Q^*$ имеет только один вещественный корень $r = \alpha_2$, если $u_0 > u_1$, или два корня $r = \alpha_1, r = \alpha_2$ при $u_2 < u_0 < u_1$. Если же $u_0 < u_2$, то указанное уравнение не имеет действительных корней. Здесь

$$u_1 = \frac{1}{2} (aH + \sqrt{a^2 H^2 + 4gH}), \quad u_2 = \gamma_1(r_1)/r_1, \quad u_1 > u_2,$$

r_1 — положительный корень уравнения $r\gamma_1' - \gamma_1 = 0$.

Что касается уравнения $\gamma_2 - u_0(r) = 0$, то при $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ его корни в силу равенств $\gamma_1(r) = -\gamma_2(-r), \gamma_1(-r) = -\gamma_2(r)$ при соответствующих величинах u_0 отличаются от корней уравнения $\gamma_1 - u_0 r = 0$ только знаками. При условии $2\sqrt{D_1} < Q_1 < Q^*$ уравнение $\gamma_2 - u_0(r) = 0$ других корней, кроме $-\alpha_1, -\alpha_2$, не имеет, несмотря на то, что $\gamma_2(r)$ в области $r > 0$ имеет положительный максимум. В самом деле, $\gamma_2 \leq (a/2)\operatorname{th} rH$ при $0 < r < \infty$. Кроме того, $u_0 \geq aH$. Подстановка этих оценок приводит исходное уравнение к уравнению $2rH = \operatorname{th} rH$, не имеющему действительных корней. Следовательно, и $\gamma_2 \neq u_0(r)$ при $r > 0$.

2. Проведем вычисление интегралов (1.8) для четной функции $f(x)$ методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек (корней уравнений $M'_{1,2}(r) = 0$) относительно полюсов подынтегральных функций, имея в виду при этом, что условия $\text{Re}(i\Delta_1) \geq 0$, $\text{Re}(i\Delta_2) \geq 0$ выполняются на контуре L , обходящем точки $r = \pm\alpha_1$ в нижней, а $r = \pm\alpha_2$ в верхней полуплоскостях. В результате получим выражение

$$\zeta = \begin{cases} O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), & x < -V_2t, \\ \zeta_2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), & -V_2t < x < 0, \\ \zeta_1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), & 0 < x < V_1t, \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), & x > V_1t \end{cases}$$

при условии $u_2 < u_0 < u_1$ и выражение

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), & -V_2t < x < 0, \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), & x < -V_2t \end{cases}$$

при $u_0 > u_1$. Здесь

$$\zeta_k = A_k \sin(\alpha_k|x|), \quad k = 1, 2,$$

$$A_k = -\sqrt{2\pi} \frac{\rho_0}{\rho} \alpha_k r^{-1}(\alpha_k) f^*(\alpha_k) V_k^{-1} \text{th } \alpha_k H, \quad V_1 = u_0 - \gamma'_1(\alpha_1),$$

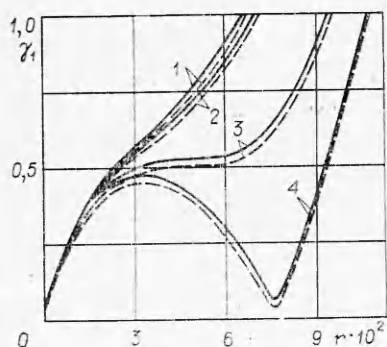
$$V_2 = \gamma'_1(\alpha_2) - u_0.$$

Если $u_0 < u_2$, то $\zeta = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$ для $x > 0$ и для $x < 0$.

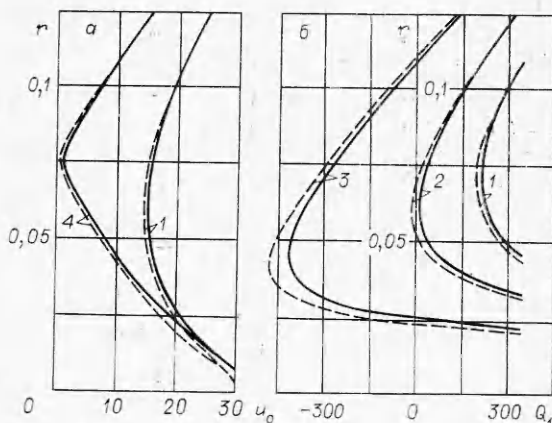
Таким образом, незатухающее волновое движение поверхности пластинка — жидкость при $u_2 < u_0 < u_1$ формируется двумя волнами ζ_1, ζ_2 . Из них ζ_2 упругая (в жидкости со свободной поверхностью и в случае абсолютно гибкой пластинки она не возникает), а ζ_1 гравитационная. Волна ζ_1 генерируется вниз ($x > 0$), а ζ_2 — вверх ($x < 0$) по потоку от области приложения возмущений (1.1). При условии $u_0 > u_1$ вид поверхности пластинка — жидкость формируется под воздействием только одной упругой волны ζ_2 , генерируемой в области $x < 0$. Если же $u_0 < u_2$, то незатухающее волновое движение не генерируется ни вверх, ни вниз по потоку. Передние фронты волн ζ_1, ζ_2 перемещаются от области приложения возмущений со скоростями V_1, V_2 соответственно, а их длины определяются формулами $\lambda_1 = 2\pi/\alpha_1$, $\lambda_2 = 2\pi/\alpha_2$. Причем $0 < \lambda_2 < 2\pi/r_1$, $2\pi/r_1 < \lambda_1 < \infty$.

3. Для количественной оценки влияния продольного сжатия в условиях вертикального сдвига скорости потока жидкости проводились численные расчеты элементов генерируемых волн для значений параметров (1.7) и функции $f(x)$ равной единице в области $|x| \leq l$ и нулю при $|x| > l$, где $l = 3 \cdot 10^2$ м.

Зависимость α_1 и α_2 от величины сжимающего усилия и вертикального сдвига скорости наглядно иллюстрируется фиг. 1, где представлена в случае $a = 0$ (штриховые линии) и $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ (сплошные линии) функция $\gamma_1(r)$ при $Q_1 = 0; 50; 250; 346 \text{ м}^2$ (кривые 1—4 соответственно). Таким Q_1 отвечают сжимающие усилия $0; 4,9 \cdot 10^5; 2,45 \cdot 10^6; 3,39 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$. Волно-



Фиг. 1



Фиг. 2

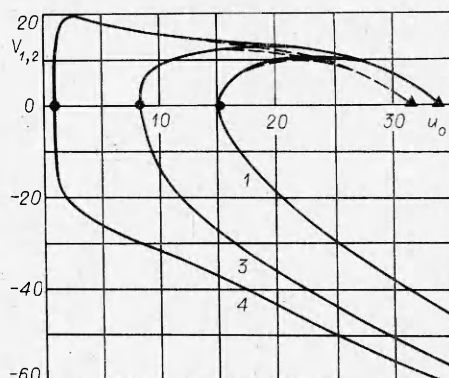
вые числа α_1 и α_2 являются абсциссами точек пересечения $\gamma_1(r)$ с прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент, равный u_0 . Угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и касающейся $\gamma_1(r)$ сверху, характеризует u_1 , а касающейся снизу — u_2 . Видно, что увеличение сжимающего усилия так же, как и рост вертикального градиента скорости течения, расширяет диапазон значений скорости u_0 , когда незатухающие волны генерируются как вверх, так и вниз по потоку. Особенно значительно влияние продольного сжатия. В частности, при $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ указанный диапазон ($u_1 - u_2$) равен 18,9 и 33 $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ для сжимающих усилий 0 и $3,39 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$. Если же $Q = 3,39 \times 10^6 \text{ Н/м}$, а скорость потока не меняется с глубиной, то $u_1 - u_2 = 30,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Причем изменение разности $u_1 - u_2$ при изменении Q_1 обусловлено в основном влиянием продольного сжатия на величину u_2 , убывающую как с ростом Q_1 , так и с уменьшением a . При $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ значениям $Q_1 = 0$ и 346 м^2 отвечают u_2 , равные 15; 0,9 $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, а случаю $Q_1 = 346 \text{ м}^2$, $a = 0$ соответствует $u_2 = 0,54 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Величина же u_1 практически не зависит от Q_1 . Мало меняется она и за счет вертикального сдвига скорости. Действительно, изменение a от 0 до $0,05 \text{ м}^{-1}$ приводит к увеличению u_1 только на 8,3% (от 31,3 до 33,9 $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$).

Влияние сжимающего усилия и вертикального сдвига скорости течения на дисперсионную зависимость $r(u_0)$ иллюстрируется фиг. 2, а, где обозначения те же, что и на фиг. 1. Из данных фиг. 1, 2 следует, что длина λ_1 гравитационных волн ξ_1 , возникающих только вверх по течению, не превосходит длины λ_2 упругих волн ξ_2 , генерируемых вниз по течению. Причем $\max \lambda_2 = \min \lambda_1$. При фиксированных u_0 и Q_1 учет вертикального сдвига скорости уменьшает α_2 . Однако влияние на волновое число α_2 упругих волн мало, а имеющееся отличие значений α_2 для $a = 0$ и $a > 0$ исчезает с ростом u_0 . Величина же α_1 растет с увеличением вертикального сдвига скорости течения. Большему u_0 отвечает и большее отклонение α_1 для случая $a = 0$ в отличие от $a > 0$. Особенно значительны эти отличия при u_0 , близких к u_1 .

Если фиксировано a , то большему Q_1 соответствует большее α_2 . Величина же α_1 убывает с ростом Q_1 . Однако влияние Q_1 на α_1 уменьшается с увеличением u_0 и при u_0 , близких к u_1 , практически не сказывается.

Зависимость $r(Q_1)$, характеризующая распределение α_1 и α_2 по величине сжимающего усилия, показана на фиг. 2, б для $Q_1 < Q^*$. Сплошные и штриховые линии отвечают тем же вертикальным градиентам скорости, что и на фиг. 2, а, кривые 1—3 соответствуют $u_0 = 10; 15; 21 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Из фиг. 2, б следует, что меньшему u_0 отвечает большее сжимающее усилие

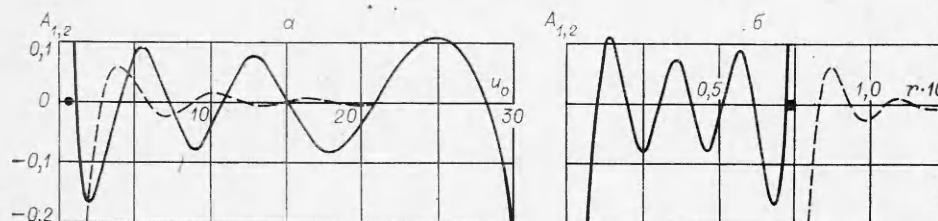
$Q = Q_2$, начиная с которого давления (1.1) в условиях продольного сжатия генерируют не затухающие с расстоянием волны. Действительно, для $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ незатухающие волны генерируются при Q , больших 210 и 10 м^2 , если $u_0 = 10$ и $15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ соответственно. В случае $u_0 = 21 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ и $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ незатухающие волны генерируются как при отсутствии сжимающего усилия, так и в условиях продольного сжатия ($Q_1 > 0$) или растяжения ($Q_1 < 0$). Увеличение вертикального градиента скорости течения смещает величину Q_2 в сторону меньших значений. Если, например, для $u_0 = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ волны генерируются в случае $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ только при $Q > 9,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$, то при отсутствии потока или потока с постоянной по глубине скоростью $u_0 = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ они возникают и при $Q = 0$ (сжимающие усилия отсутствуют) и в условиях продольного сжатия ($0 < Q_1 < Q^*$) или растяжения с усилием $0 < Q < 1,96 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$. Величина растягивающего усилия, необходимая для генерации незатухающих волн давлением (1.1) растет с увеличением u_0 и убывает с ростом вертикального градиента скорости течения.



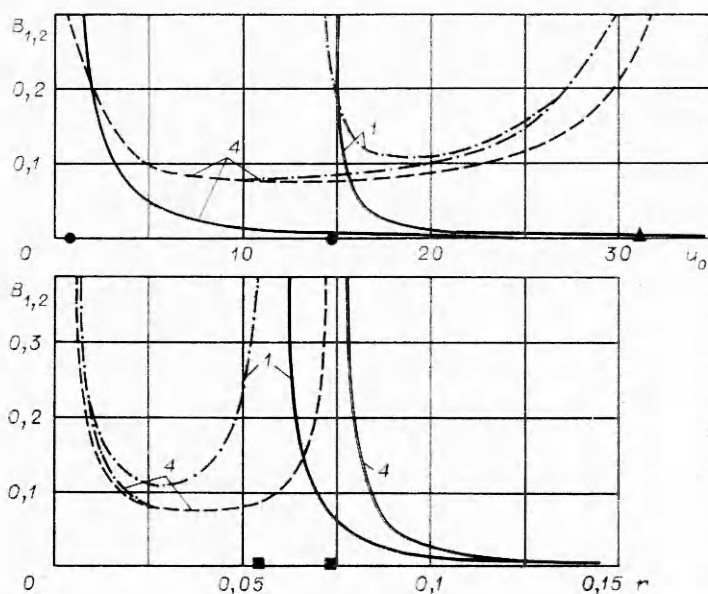
Ф и г. 3

Скорость V_2 переднего фронта упругих волн практически не зависит от вертикального профиля течения. Она определяется упругими силами пластинки и сжимающим усилием. Что касается фронтальной скорости V_1 гравитационных волн, то она может меняться и под воздействием сил продольного сжатия и вертикального сдвига скорости течения. При $u_0 = u_2$ выполняется равенство $V_1 = V_2 = 0$. Скорость V_1 обращается в нуль и при $u_0 = u_1$. В диапазоне $u_2 < u < u_1$ фронтальная скорость V_1 имеет максимум, а $V_2 > V_1$. Скорость же V_2 упругих волн, возникающих при $u_0 > u_2$, неограниченно растет с увеличением u_0 . Это показано на фиг. 3, где участки кривых в нижней полуплоскости, взятые по модулю, характеризуют V_2 , а в верхней полуплоскости — V_1 . Значения u_2 помечены на оси u_0 точками, а значения u_1 — треугольниками, остальные обозначения здесь те же, что и на фиг. 1.

Распределение амплитуд A_1 гравитационных (сплошные линии) и A_2 упругих (штриховые линии) волн по u_0 и r показано с точностью до множителя $\sqrt{2} \pi r_0$ для $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$, $Q_1 = 346 \text{ м}^2$ на фиг. 4. Сопоставление A_1 и A_2 дает наглядное представление о вкладе упругих волн в волновое движение. Видно также, что A_1 и A_2 — осциллирующие функции u_0 и r . Причем для A_1 и A_2 скорость $u_0 = u_2$ (точка на оси u_0) является резонансной. Неограниченно растет A_1 и при стремлении u_0 к u_1 . Резонансной скорости



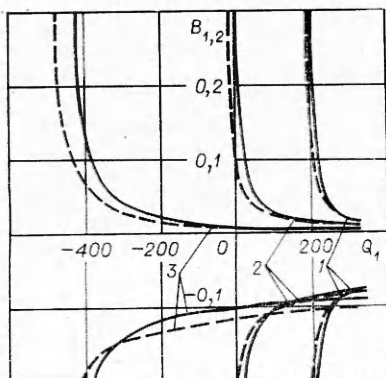
Ф и г. 4



Ф и г. 5

$u_0 = u_2$ на фиг. 4, а отвечает на фиг. 4, б значение $r = r_1$ (квадрат на оси r), к которому стремятся волновые числа α_1 и α_2 . Если же $u_0 \rightarrow u_1$, то $\alpha_1 \rightarrow 0$. Отметим, что изменения r_1 , обусловленные вертикальным сдвигом скорости, не превышают 3%, в то время как увеличение сжимающего усилия приводит к его существенному росту. В частности, для $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ усилиям сжатия $0; 4,9 \cdot 10^5; 2,45 \cdot 10^6; 3,39 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ отвечают $r_1 \cdot 10^2$, равные 5,9; 6,1; 7,1; 7,5 м^{-1} . Напомним, что при этом $u_2 = 15; 14,2; 8,5; 0,9 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, т. е. изменение Q_1 более существенно сказывается на u_2 , чем на r_1 . Если же $a = 0$, то при указанных усилиях $u_2 = 14,8; 13,8; 8,2; 0,54 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Вклад гравитационных и упругих волн в волновое движение характеризуется и фиг. 5, где $B_{1,2}(u_0)$ и $B_{1,2}(r)$ — функции, определяющие максимально возможные значения амплитуд $A_{1,2}(u_0)$ и $A_{1,2}(r)$. На графиках B_2 нанесены сплошными, а B_1 — штриховыми при $a = 0,05 \text{ м}^{-1}$ и штрихпунктирными при $a = 0$ линиями. Треугольниками, квадратами и точками помечены соответствующие значения u_1, r_1, u_2 для потока без сдвига скорости ($a = 0$). Кривые 1, 4 отвечают сжимающим усилиям 0 и $3,39 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$.



Ф и г. 6

Численный анализ зависимости $B_{1,2}$ от a показал, что для упругих волн она практически не проявляется. Исключение составляет окрестность резонансных значений, меняющихся, хотя и незначительно, с изменением a . Влияние вертикального сдвига скорости на величину B_1 (гравитационные волны) заметнее. Оно сказывается в уменьшении B_1 и растет с ростом u_0 (уменьшением r). Это видно из сопоставления штриховых и штрихпунктирных кривых 4 на фиг. 5.

Распределение $B_{1,2}$ по Q_1 показано на фиг. 6 для потока с постоянной по глубине скоростью (штриховые линии) и потока с вертикальными градиентами $a =$

$= 0,05 \text{ м}^{-1}$ (сплошные линии). Кривые 1—3 отвечают тем же u_0 , что и на фиг. 2, б. Видно, что возможность существования резонансных величин сжимающего (или растягивающего) усилия определяется значением u_0 и вертикальным сдвигом скорости течения. С увеличением сжимающего усилия (начиная с резонансной) до критической величины, приводящей к потере устойчивости пластины, значения $B_{1,2}$ убывают. В случае же продольного растяжения большему усилию (до резонансного) отвечает большая амплитуда не затухающих с расстоянием упругих и гравитационных волн.

Поступила 23 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л., Гидрометеиздат, 1967.
2. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Неустойчивые колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости.— ПМ, 1977, № 9.
3. Букатов А. Е. Влияние продольного растяжения на развитие изгибно-гравитационных волн в сплошном ледяном покрове.— Морские гидрофизические исследования, 1978, № 4.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Наука, 1967.
5. Слемян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., Судостроение, 1972.
6. Хейсин Д. Д. Соотношение между средними напряжениями и локальными значениями внутренних усилий в дрейфующем ледяном покрове.— Океанология, 1978, т. XVIII, вып. 3.
7. Богородский В. В. Упругие характеристики льда.— Акуст. журнал, 1964, т. 10, вып. 2.
8. Стокер Д. Д. Волны на воде. М., ИЛ, 1959.

УДК 536.244

СОВМЕСТНАЯ КОНВЕКЦИЯ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

В. И. Дубовик
(Москва)

Совместное действие свободной и вынужденной конвекции имеет место при теплообмене между нагретой поверхностью и средой, движущейся около нее. При совместной конвекции наибольший интерес представляет ламинарный режим движения, при котором около поверхности наблюдаются в пограничном слое максимальные градиенты скоростей и температур. Влияние подъемных сил на вынужденное движение при ламинарном течении около вертикальной непроницаемой пластины исследовалось в работе [1], где показано, что решение задачи о совместной конвекции можно представить в виде ряда по параметру $A = Gr/Re^2$, характеризующему отношению числа Грасгофа к числу Рейнольдса.

Численные решения задач совместной конвекции представлены в работах [2, 3] для непроницаемой вертикальной поверхности.

В работе [2] методом локальной автомодельности, при котором пренебрегают изменением функций скорости и температуры по переменной A , анализируется совместная конвекция при переменных физических свойствах среды, зависящих от температуры. Автомодельная задача совместной конвекции для однородных потоков тепла и температуры стенки рассмот-