висящая от y составляющая величины $(\mathbf{V}_1\cdot\nabla)\mathbf{V}_1$ из правой части (6.1) имеет вид

$$[(\mathbf{V}_1\cdot\nabla)\mathbf{V}_1]_c = \left(V_{cx}\frac{\partial V_{cx}}{\partial x} + V_{cz}\frac{\partial V_{cx}}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(V_{cx}\frac{\partial V_{cz}}{\partial x} + V_{cz}\frac{\partial V_{cz}}{\partial z}\right)\mathbf{e}_z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\left[\widetilde{V}_x\left(\frac{\partial \widetilde{V}_x}{\partial x} - 2k_0\widetilde{V}_y\right) + \widetilde{V}_z\frac{\partial \widetilde{V}_x}{\partial z}\right]\mathbf{e}_x + \left[\widetilde{V}_x\frac{\partial \widetilde{V}_z}{\partial x} + \widetilde{V}_z\left(\frac{\partial V_z}{\partial z} - 2k_0\widetilde{V}_y\right)\right]\mathbf{e}_z\right\}.$$

Отсюда с учетом оценок (5.2), (5.3) видно, что хотя составляющая $\widetilde{\mathbf{V}}e^{2ik_0y}$ решения первого приближения в принципе создает рейнольдсовы напряжения, влияющие на поле скоростей $\mathbf{V}_{2c}$, однако при $k_0 \gg 1$ эти напряжения малы по сравнению с членом $(\mathbf{V}_c\cdot\nabla)\mathbf{V}_c$ (их отношение $\sim 1/k_0^2$) и могут быть отброшены.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хоничев В. И., Яковлев В. И.** Движение плоской пластины конечной ширины в проводящей вязкой жидкости, вызванное электромагнитными силами.— ПМТФ, 1980, № 1.
2. **Шатров В. И., Яковлев В. И.** Изменение гидродинамического сопротивления шара, приводимого в движение электромагнитными силами.— ПМТФ, 1981, № 6.
3. **Шатров В. И., Яковлев В. И.** О гидродинамическом сопротивлении шара, содержащего источник электромагнитных полей кондукционного типа.— ПМТФ, 1985, № 1.
4. **Хоничев В. И., Яковлев В. И.** К теории кондукционного МГД-движителя со свободным полем.— ПМТФ, 1980, № 5.

Поступила 13/II 1984 г.

УДК 532.5

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Абрашкин, Е. И. Якубович

(Горький)

Как известно, в двумерной гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости аналитические методы достаточно общего характера были развиты лишь для потенциальных движений, тогда как вихревые течения исследовались для весьма частных случаев [1, 2]. Примерами безграничных плоских потоков с концентрированной завихренностью, допускающих аналитическое описание, являются некоторые системы точечных вихрей — пара вихрей, дорожка Кармана [1], система трех вихрей [3], а также вихрь Кирхгофа, представляющий эллиптическую область однородной завихренности ω, вращающуюся с угловой скоростью $\Omega = \omega AB/(A+B)^2$ (A, B — полуоси эллипса). Для вихревых течений со свободной границей единственное точное решение получено Герстнером и описывает трохоидальные волны на поверхности бесконечно глубокой жидкости [1].

В данной работе найден такой тип плоских нестационарных бигармонически зависящих от времени вихревых движений жидкости, который включает в себя в качестве частных случаев эллиптический вихрь и волны Герстнера и, так же как потенциальные течения, для решения конкретных задач допускает метод конформных преобразований. Показано, что найденный класс движений в некотором смысле исключителен, а именно: из всех возможных решений в лагранжевых переменных, содержащих конечный набор временных частот, уравнениям гидродинамики удовлетворяет только полученное в работе двухчастотное решение. Этот класс, однако, описывает только такие вихревые течения, для которых можно указать систему отсчета, где траектории жидких частиц остаются локализованными, что не выполняется, например, для сдвигового слоя.

Развитая теория этих течений применяется для исследования самосогласованного взаимодействия вихревой нестационарной области с внешним потенциальным течением.

1. Основные уравнения. Уравнения двумерной гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа хорошо известны. Это уравнение непрерывности

$$X_aY_b - X_bY_a = S_1(a,\ b) \tag{1.1}$$

и уравнения движения

(1.2) $X_{tt}X_a + Y_{tt}Y_a = -(1/\rho)p_a - \Phi_a,\quad X_{tt}X_b + Y_{tt}Y_b = -(1/\rho)p_b - -\Phi_b,$

где p — давление; ρ — плотность; Φ — потенциал сторонних сил; X, Y — координаты траектории частиц жидкости; a, b — лагранжевы декартовы координаты элемента жидкости; t — время; S_1 — некоторая функция, не зависящая от времени; индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Эти уравнения применяются редко, так как их нелинейные члены входят в неудобной форме, однако они имеют то большое преимущество, что их решение следует искать в фиксированной области переменных a, b даже при наличии свободной поверхности.

Известно также, что система уравнений движения эквивалентна системе уравнений, описывающих сохранение вихря вдоль траектории [4]:

(1.3) $$X_{tb}X_a - X_{ta}X_b + Y_{tb}Y_a - Y_{ta}Y_b = S_2(a,\ b)$$

($S_2(a, b)$ — функция, не зависящая от времени). Данное уравнение существенно проще исходных, так как в нем не содержится давление, а порядок его не выше порядка системы (1.2). Для целей исследования уравнения (1.1), (1.3) удобнее записать в комплексной форме. Введем комплексную координату

$$W = X + iY\ (\overline{W} = X - iY)$$

и комплексный аргумент

$$\eta = a + ib\ (\bar\eta = a - ib).$$

Уравнения (1.1), (1.3) в этих переменных примут вид

(1.4) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(W_\eta(\overline{W})_{\bar\eta} - W_{\bar\eta}(\overline{W})_\eta\right) = 0;$$

(1.5) $$\frac{\partial}{\partial t}(W_{t\eta})(\overline{W})_{\bar\eta} - W_{t\bar\eta}(\overline{W})_\eta + (\overline{W})_{t\eta}W_{\bar\eta} - (\overline{W})_{t\bar\eta}W_\eta) = 0.$$

Уравнение движения (1.5) допускает некоторое упрощение: сложив с ним продифференцированное по времени уравнение непрерывности (1.5), получим

(1.6) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(W_{t\eta}(\overline{W})_{\bar\eta} - W_{t\bar\eta}(\overline{W})_\eta\right) = 0.$$

Итак, систему уравнений гидродинамики мы записали в виде двух законов сохранения для двух якобианов

(1.7) $$D(W,\ \overline{W})/D(\eta,\ \bar\eta) = D(W_0,\ \overline{W}_0)/D(\eta,\ \bar\eta);$$

(1.8)' $$D(W_t,\ \overline{W})/D(\eta,\ \bar\eta) = D(W_{t0},\ \overline{W}_0)/D(\eta,\ \bar\eta),$$

где W_0, W_{t0} — комплексные координата и скорость в начальный момент времени. Компактность и наглядность этой формы записи существенно упрощает исследование.

2. Птоломеевские течения. В этом разделе мы получим некоторые точные решения уравнений (1.4), (1.6) и обсудим их свойства.

Будем искать решение в виде

(2.1) $$W = G(\eta)g(t) + F(\bar\eta)f(t).$$

Из уравнения непрерывности следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|G_\eta|^2|g|^2 - |F_{\bar\eta}|^2|f|^2\right) = 0.$$

Выражение в круглых скобках не зависит от времени в двух случаях: а) либо $|G_\eta|^2 = |F_{\bar\eta}|^2 = 1$, а функции времени удовлетворяют равенству

$|g|^2 - |f|^2 = \text{const} = C_1$, и, следовательно, одна из них (g или f) произвольна; б) либо $|g|^2 = |f|^2 = 1$, а функции G и F любые.

Рассмотрим, какие ограничения на функции дает уравнение движения в обоих вариантах. Подставляя выражение (2.1) в уравнение (1.6), получаем

$$|G_\eta|^2 g_t\bar{g} - |F_{\bar{\eta}}|^2 f_t\bar{f} = iC_2, \tag{2.2}$$

где C_2 действительно. Для случая «а» тогда имеем

$$g_t\bar{g} - f_t\bar{f} = iC_2,$$

откуда находим искомое представление решения

$$W = \eta|g|e^{i\varphi(t)} + \bar{\eta}\sqrt{|g|^2 - C_1}e^{i\psi(t)}, \tag{2.3}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — фазы функций g и f, связанные соотношением

$$\psi_t = (\varphi_t|g|^2 - C_2)/(|g|^2 - C_1). \tag{2.4}$$

Полученное выражение для W описывает течение с постоянной завихренностью. При этом вид траекторий жидких частиц определяется законом изменения $g(t)$.

Если положить, что области вихревого движения в плоскости лагранжевых переменных соответствует круг, то решение (2.3), (2.4) описывает эллиптический вихрь, который вращается с угловой скоростью $(\varphi + \psi)/2$ и при этом деформируется, так что его эксцентриситет ε определяется формулой

$$\varepsilon = (|g| - \sqrt{|g|^2 - C_1})/(|g| + \sqrt{|g|^2 - C_1});$$

в случае $|g| = \text{const}$ вихрь не деформируется. Отметим, что до настоящего времени изучались только стационарные области с постоянной завихренностью [5].

Рассмотрим теперь второй тип течений, отвечающий случаю «б». Он оказывается существенно разнообразнее, чем первый, поэтому в данной работе ему уделяется основное внимание.

Из уравнения (2.2) следует, что

$$W = G(\eta)e^{i\lambda t} + F(\bar{\eta})e^{i\mu t} + h(t) \tag{2.5}$$

(λ, μ — действительные числа) удовлетворяет системе уравнений гидродинамики. Отметим, что функции G, F в значительной степени произвольны (так как единственным ограничением на их выбор является требование необращения в нуль якобиана (1.7)), поэтому выражение (2.5) описывает некоторый класс вихревых течений. Изучим его свойства.

Перейдем в систему координат, которая движется по закону $X = \mathrm{Re}\, h(t)$, $Y = \mathrm{Im}\, h(t)$. В выражении для W тогда исчезнет член $h(t)$. Траектории частиц в такой системе отсчета — эпициклоиды (гипоциклоиды), т. е. частицы описывают окружность, центр которой в свою очередь движется по окружности. Поэтому данный вид течения мы бы назвали птоломеевским.

Два хорошо известных типа течений: волны Герстнера [1] и стационарное течение с постоянной завихренностью в эллиптической области [2] являются частными случаями птоломеевского течения. Действительно, если в (2.5) взять $\lambda = 0$, $G(\eta) = \eta$, $F(\bar{\eta}) = -iR\exp(ik\bar{\eta})$, $h(t) = 0$, то получим выражения, описывающие волны Герстнера:

$$X = a + Re^{kb}\sin(ka + \mu t), \quad Y = b - Re^{kb}\cos(ka + \mu t).$$

Случай второго течения (эллиптические траектории частиц) описывается формулой

$$W = \alpha e^{ik\eta + i\lambda t} + \beta e^{-ik\bar{\eta} - i\lambda t},$$

где α, β, k — постоянные.

Рассмотрим теперь некоторые особенности птоломеевского течения. Очевидно, что равномерное вращение жидкости как целого с угловой скоростью Ω характеризуется общим множителем $\exp(i\Omega t)$ в выражении для W. Поэтому выбором подходящей системы отсчета временные множители при функциях G и F могут быть изменены. При такой процедуре невозможно лишь изменить разность частот $\lambda - \mu$. В частности, можно первое слагаемое в выражении для W сделать не зависящим от времени.

Птоломеевские течения вихревые. Завихренность ω для них в переменных Лагранжа запишется следующим образом:

$$\omega = 2\left(\lambda |G_\eta|^2 - \mu |F_{\bar\eta}|^2\right)/\left(|G_\eta|^2 - |F_{\bar\eta}|^2\right).$$

Она, естественно, не зависит от времени. Найдем поле скоростей, соответствующее птоломеевскому течению. Для этого из системы

$$W = G(\eta)e^{i\lambda t} + F(\bar\eta)e^{i\mu t}, \quad V = i\lambda G(\eta)e^{i\lambda t} + i\mu F(\bar\eta)e^{i\mu t}$$

надо исключить η и $\bar\eta$ и получить выражение, связывающее комплексную координату W с комплексной скоростью V. В итоге скорость как функция координат в неявном виде определится формулой

$$F^{-1}\left(e^{-i\mu t}\frac{V - i\lambda W}{i(\mu - \lambda)}\right) = \overline{G^{-1}\left(e^{-i\lambda t}\frac{i\mu W - V}{i(\mu - \lambda)}\right)},$$

где F^{-1}, G^{-1} — обратные функции от F и G соответственно.

Стало очевидным, что при всей простоте зависимости от времени траектории частиц поле течений в переменных Эйлера может оказаться весьма сложной функцией времени.

Приведем формулу для давления в области с птоломеевским течением:

$$\frac{p}{\rho} = -\Phi + \frac{1}{2}\mu^2 |F|^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 |G|^2 + \\ + \operatorname{Re}\left(e^{i(\lambda-\mu)t}\int \left(\lambda^2 G(\bar F)_\eta + \mu^2 G_\eta \bar F\right) d\eta\right).$$

В завершение обзора свойств птоломеевского течения остановимся на одной его особенности, делающей этот класс вихревых нестационарных течений в некотором смысле столь же исключительным, как и потенциальные. Именно: он охватывает все возможные плоские движения жидкости с конечным числом гармоник по времени (в переменных Лагранжа). Иными словами, среди выражений для W, описываемых конечным рядом Фурье

$$W = \sum_{k=1}^{N} Z_k(\eta, \bar\eta)\, e^{i\lambda_k t}$$

(λ_k — постоянные), уравнениям гидродинамики удовлетворяют только бигармонические решения (2.5). Покажем это.

Для $N = 2$ подстановка выражения $W = Z_1 \exp(i\lambda_1 t) + Z_2 \exp(i\lambda_2 t)$ в уравнение непрерывности приводит к условию

$$D(Z_1, \bar Z_2)/D(\eta, \bar\eta) = 0,$$

которое удовлетворяется, если Z_1 будет функцией от $\bar Z_2$, или (что то же самое) $Z_1 = G(\eta)$, $Z_2 = F(\bar\eta)$, как это и записано в формуле (2.5).

Для $N = 3$ подставляем

$$W = Z_1 \exp(i\lambda_1 t) + Z_2 \exp(i\lambda_2 t) + Z_3 \exp(i\lambda_3 t) \tag{2.6}$$

в уравнение непрерывности и приравняем нулю все осциллирующие во времени слагаемые. Возможны два случая.

А. Все разности частот не равны друг другу. Тогда получаем

$$[Z_1, \bar Z_2] = 0, \quad [Z_1, \bar Z_3] = 0, \quad [Z_2, \bar Z_3] = 0,$$

здесь квадратные скобки обозначают операцию взятия якобиана по переменным η, $\bar{\eta}$.

Из первого условия следует, что $\bar{Z}_2$ — функция от Z_1, из второго — $\bar{Z}_3$ — функция от Z_1, но тогда из последнего равенства получим, что $\bar{Z}_1$ — функция от Z_1. Это возможно только тогда, когда Z_1 — комплексная функция от одного действительного параметра. Очевидно, что Z_2 и Z_3 — тоже функции только этого же действительного параметра. Примем этот параметр за лагранжеву переменную a. В итоге мы пришли к утверждению, что W — функция только от a и не зависит от b, и доказали тем самым, что течение вида (2.6) с неэквидистантным спектром не может быть двумерным. Мы получили этот результат, даже не используя уравнения движения.

Б. Частоты эквидистантны. Результат будет такой же, как и в случае «А». Теперь, однако, необходимо будет воспользоваться обоими уравнениями гидродинамики. Из уравнения непрерывности следует

$$[Z_1, \bar{Z}_3] = 0, \quad [Z_1, \bar{Z}_2] + [Z_2, \bar{Z}_3] = 0,$$

а из уравнения движения

$$\lambda_1[Z_1, \bar{Z}_2] + \lambda_2[Z_2, \bar{Z}_3] = 0,$$

и опять, как в случае «А»,

$$[Z_1, \bar{Z}_2] = 0, \quad [Z_1, \bar{Z}_3] = 0, \quad [Z_2, \bar{Z}_3] = 0, \quad \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Таким образом, снова W — функция только a и не зависит от b.

Аналогичным образом можно показать, что течения с траекториями, описываемыми N частотными функциями времени, не могут быть двумерными, и, следовательно, птоломеевские течения (2.5) являются исключением из этого правила.

3. Склейка птоломеевских течений с потенциальными. Задача о склейке областей вихревого и потенциального течения имеет свои, на первый взгляд, непреодолимые трудности. В самом деле, задача потенциального обтекания заданной границы произвольной формы в общем случае не решена. Проблема потенциального обтекания произвольной области с птоломеевским течением еще сложнее, так как следует учесть обратное влияние потенциального потока на форму границы и на движение области с завихрением как целого. Тем не менее нам удалось решить ее для случая односвязанной области с птоломеевским течением.

Задача формулируется следующим образом. В области $b \geqslant 0$ задано птоломеевское течение (2.5). Требуется определить потенциальное течение вне этой области. На границе сшивки потребуем выполнения условия непрерывности полной скорости.

Потенциальное движение во внешности вихревой области тогда представляется в параметрической форме. Действительно, соотношения

$$W = G(\eta)e^{i\lambda t} + F(\eta)e^{i\mu t} + h(t), \tag{3.1}$$
$$V = i\lambda G(\bar{\eta})e^{i\lambda t} + i\mu F(\bar{\eta})e^{i\mu t} + h_t(t)$$

($\eta = a + ib$, $b \leqslant 0$) решают проблему. Эти выражения — параметрическая форма записи потенциального течения, так как из них следует, что $\bar{V} = \bar{V}(W, t)$, а при $b = 0$ удовлетворяются условия непрерывности смещения границы вихря и давления (непрерывность давления проверяется непосредственным вычислением)*.

Следует отметить, что предложенная форма записи потенциального течения не совпадает ни с лагранжевой, ни с эйлеровой.

---

*Заметим, что условием однозначности поля скорости потенциального течения является отсутствие точек ветвления у функции W, т. е. необращение в нуль ее производной.

Переход от параметрического представления к эйлерову очевиден и осуществляется исключением η из системы (3.1). Чтобы перейти к лагранжеву описанию, будем считать, что параметр η зависит от времени, а его производная по времени определяется выражением

$$\eta_t = (V(\bar{\eta}, t) - W_t(\eta, t))/W_\eta(\eta, t),$$

которое вместе с комплексно-сопряженным ему соотношением образует систему двух уравнений относительно η и $\bar{\eta}$. Интегрируя ее, можно найти зависимость величины η от времени и начальных условий η_0, которые и выбираются в качестве лагранжевых координат.

Применим теперь результаты исследования общих свойств птоломеевских течений для изучения конкретных вихревых потоков.

4. Самосогласованное взаимодействие вихревой нестационарной области с окружающим потенциальным течением. Рассмотрим одиночную вихревую область, потенциально обтекаемую снаружи. Предположим, что выражение

$$W = G\left(e^{ik\eta}\right)e^{i\lambda t} + F\left(e^{-ik\bar{\eta}}\right)e^{i\mu t} + h(t)$$

задает вихревое птоломеевское движение внутри этой области. На плоскости лагранжевой переменной exp $(ik\eta)$ ей соответствует внутренность единичного круга, что эквивалентно условию $b \geqslant 0$. Функции G и F будем считать аналитическими и не имеющими особенностей. На границе склейки потоков $b = 0$, поэтому, согласно выражениям (3.1), потенциальное течение во внешности области запишется в виде

$$W = G(e^{ik\eta})e^{i\lambda t} + F(e^{-ik\eta})e^{i\mu t} + h(t), \tag{4.1}$$
$$V = i\lambda G\left(e^{ik\bar{\eta}}\right)e^{i\lambda t} + i\mu F\left(e^{-ik\bar{\eta}}\right)e^{i\mu t} + h_t(t),$$

где $\eta = a + ib$, $b \leqslant 0$. На бесконечности жидкость покоится, т. е. $V \to 0$ при $W \to \infty$. Поэтому в соотношениях (4.1) следует положить $\mu = 0$, $h_t(t) = 0$ (для простоты возьмем $h(t) = 0$).

Итак, нами получено решение, описывающее потенциальное обтекание рассматриваемой вихревой области: завихренное течение описывается выражением

$$W = G\left(e^{ik\eta}\right)e^{i\lambda t} + F\left(e^{-ik\bar{\eta}}\right), \tag{4.2}$$

а потенциальное задается параметрически

$$W = G(e^{ik\eta})e^{i\lambda t} + F(e^{-ik\eta}), \tag{4.3}$$
$$V = i\lambda G\left(e^{ik\bar{\eta}}\right)e^{i\lambda t}.$$

Видно, что форма вихревой области определяется только связью функций F и $\bar{G}$ между собой, поэтому функция $G(\eta)$ может выбираться из соображений удобства, например, в виде $G(\eta) = \alpha$ exp $(ik\eta)$.

Известное точное решение для эллиптического вихря Кирхгофа получается из формул (4.2), (4.3), если взять

$$G(\eta) = (1/2)(A + B) \exp(ik\eta), \quad F(\bar{\eta}) = (1/2)(A - B) \exp(-ik\bar{\eta}),$$

где A, B — полуоси эллипса.

Укажем также, что соотношения (4.2), (4.3) дают решение начальной задачи, когда на контуре в значительной степени произвольной формы задаются скорости, однозначно определяемые видом контура.

Начальную форму контура вихря W_0^* и скорость на нем W_{t0}^* привычнее задавать в эйлеровых координатах. В этом случае определение функций G и F сводится к отысканию конформного отображения χ единичного круга на внешность области W_0^*. Граница вихря тогда запишется в виде

$$W_0^*\left(e^{ika}\right) = \chi\left(e^{ika}\right) = \chi_1 e^{ika} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n e^{-ikna},$$

где χ_n — коэффициенты ряда Фурье; n — целое число.

Укажем, что выбранное нами параметрическое представление границы единственное, которое обеспечивает спадание скорости на больших расстояниях от вихря обратно пропорционально радиусу.

Течение внутри вихревой области определяется выражением

$$W = \chi_1 e^{ik\eta + i\lambda t} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n e^{-ikn\bar{\eta}}, \tag{4.4}$$

справедливым при заданной W^*_{t0}, если

$$W^*_{t0} = i\lambda\chi_1 e^{ika + i\lambda t}.$$

Значение λ находится из соотношения

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi} |\chi_1|^{-2} \operatorname{Re} \oint_{W^*_0} \overline{W}^*_{t0} dW.$$

Функции G и F, определяемые формулой (4.4), должны удовлетворять условию необращения в нуль якобиана (1.7). Поэтому задача с заданной в начальный момент формой вихревой области с помощью соотношений (4.2)—(4.4) разрешима не всегда.

Отметим, что в качестве начальных данных можно задавать также форму вихря и завихренность внутри него (но опять-таки не произвольную).

Рассмотрим конкретные примеры. Для простоты будем искать класс стационарных вихрей, которые не деформируются, а только вращаются (поступательное движение отсутствует). Во вращающейся с угловой скоростью вихря Ω системе отсчета траектории жидких частиц, образующих границу вихревой области $b = 0$, совпадают с границей вихря, и их скорость касательна к ней, так что

$$W_t = \gamma W_a. \tag{4.5}$$

Здесь γ — действительная постоянная (в общем случае γ зависит от a, но всегда можно выбрать такое W^*, что $\gamma(a) W_a = \gamma^* W^*_a$, где γ^* не зависит от a).

Во вращающейся системе координат решение (4.2) примет вид

$$W = \alpha e^{ik\eta + i(\lambda - \Omega)t} + F\left(e^{-ik\bar{\eta}}\right) e^{-i\Omega t}.$$

Подставляя это выражение в условие (4.5), получим, что F — степенная функция, и формулу (4.3) можно записать в виде

$$W = \alpha e^{ik\eta + i\lambda t} + \beta e^{-ikl\bar{\eta}}, \tag{4.6}$$

где l — целое неотрицательное число. Она описывает семейство стационарных вихрей. Для $l = 1$ получаем эллиптический вихрь; вихри, соответствующие значениям $l \geqslant 2$, представляют области гипоциклоидальной формы с числом заострений $l + 1$ и вращаются как целое с угловой скоростью $\Omega = l\lambda(l + 1)$. Условием отсутствия самопересечений границы вихря является неравенство $\beta \leqslant \alpha l^{-1}$. Это условие обеспечивает однозначность поля скорости потенциального течения (см. примечание на с. 61).

Завихренность течения (4.6) запишем как

$$\omega = \frac{2\lambda\alpha^2}{\alpha^2 - l^2\beta^2 \exp[-2k(l-1)b]}.$$

Если для эллиптического вихря завихренность однородная, то для остальных членов семейства (4.6) она минимальна в центре вихря и возрастает к границе.

В заключение укажем, что для функции F, отличной от степенной, вихревая область, помимо вращения, деформируется довольно сложным образом. Характер этой деформации легко определяется из (4.2).

Авторы выражают благодарность М. И. Рабиновичу и Б. Е. Немцову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1932.
2. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
3. **Новиков Е. А.** Динамика и статистика системы вихрей.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1868.
4. **Стокер.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: ИЛ, 1959.
5. **Burbea J.**— In: Lecture Notes in Physics. Berlin — Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag, 1980, vol. 120, p. 276.

Поступила 12/III 1984 г.

УДК 532.517.4

СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ПО ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КАНАЛАМ, ВРАЩАЮЩИМСЯ ВОКРУГ ПОПЕРЕЧНОЙ ОСИ

В. В. Рис, Е. М. Смирнов, С. А. Смирнов

(*Ленинград*)

Развитое ламинарное течение и явления неустойчивости во вращающемся канале квадратного сечения изучались в [1]. Для турбулентного режима измерения развитого поля продольной составляющей скорости выполнены лишь для одной (центральной) плоскости [2]. В [3, 4] проведено численное моделирование турбулентного течения, однако примененная модель турбулентности ограничена малыми значениями параметра вращения.

Ниже излагаются результаты измерения полей осредненной скорости и интенсивности пульсаций продольной компоненты в течении по квадратному каналу, вращающемуся вокруг поперечной оси. На основе известной полуэмпирической модели второго порядка анализируются эффекты прямого воздействия силы Кориолиса на турбулентность. Обсуждается ряд общих особенностей структуры турбулентных течений по прямоугольным каналам с отношением сторон сечения порядка единицы.

1. Теоретический анализ. Изменения характеристик осредненного и пульсационного движений, вызванные вращением, для изотермических течений целиком обусловлены силой Кориолиса. Известны [5] два главных эффекта ее воздействия. Первый из них состоит в дополнительной турбулизации или, наоборот, стабилизации течения. В «чистом» виде этот эффект проявляется в плоскопараллельных течениях, плоскость которых нормальна к оси вращения [6]. Второй эффект заключается в образовании вторичных (поперечных) течений с существенным обратным влиянием на поток в основном направлении. В результате при достаточно быстром вращении канала в развитом потоке выделяется ядро, характеристики течения в котором слабо изменяются по направлению, параллельному оси вращения. Ядро заполняет большую часть поперечного сечения канала и приближенно может рассматриваться как плоскопараллельный поток.

Имея в виду необходимость анализа экспериментальных данных, рассмотрим полуэмпирическую модель турбулентности второго порядка в приложении к плоскопараллельным вращающимся течениям.

Запишем общий вид точных уравнений переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса для квазистационарного турбулентного течения во вращающейся декартовой системе координат x_1, x_2, x_3:

$$U_n\partial\langle u_iu_j\rangle/\partial x_n = P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - E_{ij} - D_{ij}. \tag{1.1}$$

Здесь P_{ij}, G_{ij} — члены, выражающие порождение напряжений вследствие деформаций поля осредненной скорости и действия кориолисовых сил:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -\langle u_iu_n\rangle \partial U_j/\partial x_n - \langle u_ju_n\rangle \partial U_i/\partial x_n, \\ G_{ij} &= 2\omega_p(\varepsilon_{ipq}\langle u_ju_q\rangle + \varepsilon_{jpq}\langle u_iu_q\rangle). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Используем модельные представления [7] для членов, отражающих взаимодействие пульсаций давления с полем скорости Φ_{ij} и эффекты вяз-