УДК 532.529.6

СИЛЫ ВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ СФЕР В ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ЗОНЫ ИХ КОНТАКТА

Ш. В. Сандуляну

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия
Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия
E-mail: shtefan.sanduleanu@gmail.com

Рассматривается взаимодействие двух сферических пузырьков с переменными радиусами при движении в вязкой жидкости вдоль линии, соединяющей их центры. Функция тока, удовлетворяющая уравнению Стокса, найдена в бисферических координатах в виде ряда по полиномам Гегенбауэра. Выражения для вязких сил, действующих на сферы, представлены в виде бесконечных рядов. Вблизи зоны контакта пузырьков получены асимптотические выражения для этих сил.

Ключевые слова: вязкое взаимодействие пузырьков, функция тока Стокса, осевая симметрия.

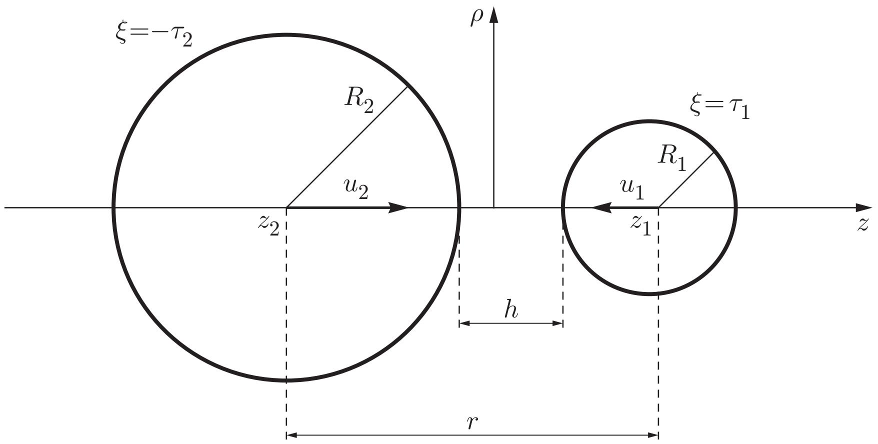
DOI: 10.15372/PMTF20200405

Введение. Задача о взаимодействии двух твердых сфер (с постоянными радиусами) в вязкой жидкости в приближении Стокса впервые в точной постановке рассматривалась в работе [1], в которой сферы совершали движение вдоль линии, соединяющей их центры, а течение жидкости полагалось осесимметричным. Для функции тока построено разложение по полиномам Гегенбауэра в бисферических координатах. С помощью этой функции для вязких сил, действующих на сферы, получены выражения в виде бесконечных рядов, позднее использованные для определения главных асимптотик вязких сил как на больших расстояниях от зоны контакта сфер [2], так и вблизи нее [3, 4]. В работах [3–5] с помощью теории смазочного слоя найдены главные асимптотики сил вблизи зоны контакта сфер.

Задача о взаимодействии двух твердых сфер также решена с помощью “метода отражений” [6]. В работе [6] также получено разложение вязких сил на больших расстояниях и найдена сила взаимодействия, возникающая при движении двух сфер с постоянными радиусами и одинаковыми скоростями в области контакта. Ряды, полученные методом отражений, сходятся значительно быстрее, чем разложения по обратным степеням расстояний r между центрами сфер. Однако этого недостаточно для анализа процесса сближения пузырьков [7].

Целью настоящей работы является получение с помощью методики [1] точного решения задачи о вязком взаимодействии двух сфер с произвольными переменными радиусами при выполнении условия прилипания на поверхностях сфер. Из выражений в виде бесконечных рядов для вязких сил получены их асимптотические разложения вблизи зоны контакта.

Работа выполнена в рамках Государственного задания № АААА-А20-120011690138-6.



Постановка задачи

1. Постановка задачи. В приближении Стокса рассматривается взаимодействие двух сферических пузырьков с переменными радиусами при движении в вязкой жидкости вдоль линии, соединяющей их центры. Течение жидкости полагается осесимметричным. Центры сфер, расположенные на оси z, имеют координаты z_1, z_2 ($z_1 > z_2$), скорости центров равны $u_1 = -\dot{z}_1$, $u_2 = \dot{z}_2$ и направлены навстречу друг другу (см. рисунок). Скорости изменения радиусов равны $\dot{R}_1$, $\dot{R}_2$ соответственно. Расстояние между центрами сфер равно $r = z_1 - z_2$, расстояние между поверхностями сфер (зазор) равно $h = r - R_1 - R_2$. Необходимо найти действующие на сферы силы вязкого трения как линейные функции скоростей u_1, u_2, $\dot{R}_1$, $\dot{R}_2$, коэффициенты которых зависят от радиусов этих сфер и расстояния между ними.

В соответствии с работой [1] решение задачи целесообразно искать с помощью функции тока Стокса в бисферических координатах, которая должна удовлетворять уравнению [1]

$$\Phi^4(\psi) = 0;$$

$$\Phi^2 \equiv \frac{\operatorname{ch}\xi - \mu}{c^2}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big((\operatorname{ch}\xi - \mu)\,\frac{\partial}{\partial\xi}\Big) + (1-\mu^2)\,\frac{\partial}{\partial\mu}\Big((\operatorname{ch}\xi - \mu)\,\frac{\partial}{\partial\mu}\Big)\Big). \qquad (1)$$

Бисферические координаты ξ, ζ, θ связаны с декартовыми следующим образом:

$$\rho = c\,\frac{\sin\zeta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\zeta}, \qquad z = c\,\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\zeta}, \quad x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

При этом поверхности сфер задаются уравнениями (см. рисунок)

$$\xi = (-1)^{i-1}\tau_i = \mathrm{const}, \qquad \zeta \in [0,\pi], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad i = \{1, 2\},$$

параметры τ_1, τ_2, c находятся из уравнений

$$R_1 \operatorname{sh}\tau_1 = c, \qquad R_2 \operatorname{sh}\tau_2 = c, \qquad r = R_1 \operatorname{ch}\tau_1 + R_2 \operatorname{ch}\tau_2.$$

2. Функция тока в бисферических координатах. Функцию тока будем искать в виде [1]

$$\psi = (\operatorname{ch}\xi - \cos\zeta)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_n^{-1/2}(\cos\zeta),$$
$$U_n(\xi) = a_n \operatorname{ch}(n-3/2)\xi + b_n \operatorname{sh}(n-3/2)\xi + c_n \operatorname{ch}(n+1/2)\xi + d_n \operatorname{sh}(n+1/2)\xi, \qquad (2)$$

где $C_n^{-1/2}(\mu)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — полиномы Гегенбауэра [8]. При решении задачи для сфер с переменными радиусами суммирование необходимо начинать с $n = 0$, поскольку в этом случае множество полиномов Гегенбауэра образует полный базис [9].

Коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n находим из граничных условий на поверхностях сфер при $\xi = \tau_1$, $\xi = -\tau_2$. В случае вязкой жидкости кроме условия для нормальной компоненты скорости зададим второе условие для тангенциальной скорости либо для касательного напряжения. В данной работе рассматривается случай прилипания на границе пузырьков. Такое условие является естественным при наличии поверхностно-активных веществ в различных газожидкостных технологиях.

3. Граничные условия. Сформулируем граничные условия на поверхностях сфер.

3.1. *Нормальная составляющая.* Нормальная составляющая скорости жидкости v_n и скорость поверхности пузырька w_n должны совпадать: $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{n})$ на границе первой сферы, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{n})$ на границе второй сферы. В бисферических координатах скалярные произведения $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{n})$, $(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{n})$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{n}) &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\,\frac{\operatorname{ch}\tau_1 - \cos\zeta}{c}, \qquad (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{n}) = -u_1\Big(-\frac{\operatorname{ch}\tau_1\cos\zeta - 1}{\operatorname{ch}\tau_1 - \cos\zeta}\Big) - \dot R_1, \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{n}) &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\,\frac{\operatorname{ch}\tau_2 - \cos\zeta}{c}, \qquad (\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{n}) = u_2\Big(-\frac{\operatorname{ch}\tau_2\cos\zeta - 1}{\operatorname{ch}\tau_2 - \cos\zeta}\Big) + \dot R_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Интегрируя по ζ граничные условия (3) и выбирая константы интегрирования таким образом, чтобы на оси симметрии вектор скорости был параллелен данной оси, получаем

$$\begin{aligned} \psi\big|_{\xi=\tau_1} &= u_1c^2\,\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch}\tau_1 - \mu)^2} + \dot R_1c^2\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau_1 - \mu} + \Big(\frac{\dot R_2c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_2} - \frac{\dot R_1c^2\operatorname{ch}\tau_1}{\operatorname{sh}^2\tau_1}\Big), \\ \psi\big|_{\xi=-\tau_2} &= -u_2c^2\,\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch}\tau_2 - \mu)^2} - \dot R_2c^2\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau_2 - \mu} - \Big(\frac{\dot R_1c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_1} - \frac{\dot R_2c^2\operatorname{ch}\tau_2}{\operatorname{sh}^2\tau_2}\Big). \end{aligned} \tag{4}$$

С учетом вида функции тока (2) условия (4) преобразуем к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\tau_1)C_n^{-1/2}(\cos\zeta) - f_0(\mu) = 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} U_n(-\tau_2)C_n^{-1/2}(\cos\zeta) - g_0(\mu) = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} f_0(\mu) &= u_1c^2\,\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch}\tau_1 - \mu)^{1/2}} + \dot R_1c^2(\operatorname{ch}\tau_1 - \mu)^{1/2} + \Big(\frac{\dot R_2c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_2} - \frac{\dot R_1c^2\operatorname{ch}\tau_1}{\operatorname{sh}^2\tau_1}\Big)(\operatorname{ch}\tau_1 - \mu)^{3/2}, \\ g_0(\mu) &= -u_2c^2\,\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch}\tau_2 - \mu)^{1/2}} - \dot R_2c^2(\operatorname{ch}\tau_2 - \mu)^{1/2} - \Big(\frac{\dot R_1c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_1} - \frac{\dot R_2c^2\operatorname{ch}\tau_2}{\operatorname{sh}^2\tau_2}\Big)(\operatorname{ch}\tau_2 - \mu)^{3/2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее функции $f_0(\mu)$, $g_0(\mu)$ разложим по полиномам Гегенбауэра следующим образом.

Согласно работам [1, 8] при $\tau > 0$, $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ справедливы тождества

$$(\operatorname{ch}\tau - \mu)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu)\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-(n-1/2)\tau},$$

$$\frac{1}{(\operatorname{ch}\tau - \mu)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu)\,\frac{-(n-1/2)\sqrt{2}}{\operatorname{sh}\tau}\,\mathrm{e}^{-(n-1/2)\tau},$$

$$(\operatorname{ch}\tau - \mu)^{3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu)\,\frac{3\sqrt{2}}{8}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-(n+1/2)\tau}}{n+1/2} - \frac{\mathrm{e}^{-(n-3/2)\tau}}{n-3/2}\Big),$$

$$\frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch}\tau-\mu)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{-1/2}(\mu)2\sqrt{2}\,n(n-1)\,\mathrm{e}^{-(n-1/2)\tau},$$

$$\frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch}\tau-\mu)^{1/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{-1/2}(\mu)\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,n(n-1)\Big(\frac{\mathrm{e}^{-(n-3/2)\tau}}{n-3/2}-\frac{\mathrm{e}^{-(n+1/2)\tau}}{n+1/2}\Big).$$

3.2. *Тангенциальная составляющая.* В случае выполнения условия прилипания на границе тангенциальные составляющие скоростей равны: $v_\tau=w_\tau$ (($\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{\tau}$) = ($\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{\tau}$) на границе первой сферы, ($\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{\tau}$) = ($\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{\tau}$) на границе второй сферы). В бисферических координатах скалярные произведения ($\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{\tau}$) и ($\boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{\tau}$) определяются по формулам

$$(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{\tau})=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,\frac{\operatorname{ch}\tau_1-\cos\zeta}{c},\qquad(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{\tau})=u_1\,\frac{\operatorname{sh}\tau_1\sin\zeta}{\operatorname{ch}\tau_1-\cos\zeta},$$

$$(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{\tau})=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,\frac{\operatorname{ch}\tau_2-\cos\zeta}{c},\qquad(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{\tau})=u_2\,\frac{\operatorname{sh}\tau_2\sin\zeta}{\operatorname{ch}\tau_2-\cos\zeta}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\tau_1}=-u_1c^2\,\frac{\operatorname{sh}\tau_1(1-\mu^2)}{(\operatorname{ch}\tau_1-\mu)^3},\qquad\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=-\tau_2}=-u_2c^2\,\frac{\operatorname{sh}\tau_2(1-\mu^2)}{(\operatorname{ch}\tau_2-\mu)^3}.\tag{7}$$

Используя функцию тока ψ (2), получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=(\operatorname{ch}\xi-\mu)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}U_n'(\xi)C_n^{-1/2}(\mu)-\frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi-\mu}\,\psi,\qquad U_n'(\xi)=\frac{\partial U_n(\xi)}{\partial\xi}.\tag{8}$$

Подставляя равенство (8) в (7), получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}U_n'(\tau_1)C_n^{-1/2}(\mu)=\frac{3}{2}\operatorname{sh}\tau_1(\operatorname{ch}\tau_1-\mu)^{1/2}\;\psi\big|_{\xi=\tau_1}-u_1c^2\,\frac{\operatorname{sh}\tau_1(1-\mu^2)}{(\operatorname{ch}\tau_1-\mu)^{3/2}},\\ \sum_{n=0}^{\infty}U_n'(-\tau_2)C_n^{-1/2}(\mu)=-\frac{3}{2}\operatorname{sh}\tau_2(\operatorname{ch}\tau_2-\mu)^{1/2}\;\psi\big|_{\xi=-\tau_2}-u_2c^2\,\frac{\operatorname{sh}\tau_2(1-\mu^2)}{(\operatorname{ch}\tau_2-\mu)^{3/2}}.\end{gathered}\tag{9}$$

Подставляя (4) в (9), находим

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n'(\tau_1)C_n^{-1/2}(\mu)-f_1(\mu)=0,\qquad\sum_{n=0}^{\infty}U_n'(-\tau_2)C_n^{-1/2}(\mu)-g_1(\mu)=0,\tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}f_1(\mu)&=-u_1c^2\,\frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sh}\tau_1(1-\mu^2)}{(\operatorname{ch}\tau_1-\mu)^{3/2}}+\dot R_1c^2\,\frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\tau_1}{(\operatorname{ch}\tau_1-\mu)^{1/2}}+\\&\qquad+\Big(\frac{\dot R_2c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_2}-\frac{\dot R_1c^2\operatorname{ch}\tau_1}{\operatorname{sh}^2\tau_1}\Big)\frac{3}{2}\,\operatorname{sh}\tau_1(\operatorname{ch}\tau_1-\mu)^{1/2},\\ g_1(\mu)&=-u_2c^2\,\frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sh}\tau_2(1-\mu^2)}{(\operatorname{ch}\tau_2-\mu)^{3/2}}+\dot R_2c^2\,\frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\tau_2}{(\operatorname{ch}\tau_2-\mu)^{1/2}}+\\&\qquad+\Big(\frac{\dot R_1c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_1}-\frac{\dot R_2c^2\operatorname{ch}\tau_2}{\operatorname{sh}^2\tau_2}\Big)\frac{3}{2}\operatorname{sh}\tau_2(\operatorname{ch}\tau_2-\mu)^{1/2}.\end{aligned}\tag{11}$$

Далее функции $f_1(\mu)$, $g_1(\mu)$ необходимо разложить по полиномам Гегенбауэра, как это сделано выше.

Коэффициенты при полиномах Гегенбауэра $C_n^{-1/2}$ в уравнениях (5), (10) должны быть равны нулю. Отсюда для каждой четверки неизвестных $(X_n)^{\text{т}} = \{a_n, b_n, c_n, d_n\}$ получаем систему уравнений

$$M_n X_n - B_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где матрица M_n равна

$$M_n = \begin{pmatrix} c_{\tau_1}^- & s_{\tau_1}^- & c_{\tau_1}^+ & s_{\tau_1}^+ \\ c_{\tau_2}^- & -s_{\tau_2}^- & c_{\tau_2}^+ & -s_{\tau_2}^+ \\ n_- s_{\tau_1}^- & n_- c_{\tau_1}^- & n_+ s_{\tau_1}^+ & n_+ c_{\tau_1}^+ \\ -n_- s_{\tau_2}^- & n_- c_{\tau_2}^- & -n_+ s_{\tau_2}^+ & n_+ c_{\tau_2}^+ \end{pmatrix},$$

$n_- = n - 3/2$, $n_+ = n + 1/2$, $c_\xi^\pm = \operatorname{ch} n_\pm \xi$, $s_\xi^\pm = \operatorname{sh} n_\pm \xi$; столбец B_n не приводится ввиду громоздкости.

Разрешая систему линейных уравнений (12), находим выражения для $\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$, которые далее используются для определения вязких сил и их асимптотик вблизи зоны контакта сфер.

4. Выражения для вязких сил. В работе [1] для твердых шаров получена следующая формула для результирующей силы, действующей на каждый шар:

$$F_{\mu_l} = \pi \mu_l \int \rho^3 \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{\Phi^2(\psi)}{\rho^2}\Big)\, ds. \tag{13}$$

Здесь n — внешняя нормаль к поверхности сферы; ds — элемент меридиана; μ_l — вязкость жидкости; интеграл берется вдоль меридиана соответствующего шара; оператор Φ^2 задается формулами (1).

Установлено, что формула (13) справедлива также для сфер с переменными радиусами. Подставляя функцию тока (2), для вязких сил получаем точные выражения

$$\begin{aligned} F_{\mu_l 1} &= -\mu_l \frac{8\pi c \dot{R}_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} + \frac{2\sqrt{2}\,\pi\mu_l}{c} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n), \\ F_{\mu_l 2} &= \mu_l \frac{8\pi c \dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} + \frac{2\sqrt{2}\,\pi\mu_l}{c} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - b_n + c_n - d_n). \end{aligned} \tag{14}$$

5. Асимптотические выражения для вязких сил. Метод поиска асимптотических рядов с точностью до константы предложен в [7]. Бесконечную сумму в первом уравнении (14) представим в виде

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{2\sqrt{2}}{c} \sum_{n=2}^{1/(\tau_1+\tau_2)} (a_n + b_n + c_n + d_n) + O(1). \tag{15}$$

Для конечной суммы в (15) находим разложение по малому параметру $\tau_1 + \tau_2$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \sum_{n=2}^{1/(\tau_1+\tau_2)} (a_n + b_n + c_n + d_n) = \sum_{n=2}^{1/(\tau_1+\tau_2)} \Big(\frac{384 n(n-1) R_1 R_2^3 (u_1 + u_2 + \dot{R}_1 + \dot{R}_2)}{(2n-1)(2n-3)^2(2n+1)^2(R_1+R_2)^3 \tau_1^2} +$$

$$+ \frac{24 R_1 \dot{R}_1}{(2n+1)(2n-3)\tau_1} + \frac{32 n(n-1) R_1 R_2}{(2n-1)(2n-3)^2(2n+1)^2(R_1+R_2)^3} \times$$

$$\times \{(u_1+u_2)[3(4n^2-4n+15)R_1^2+3(28n^2-28n-15)R_1R_2+(12n^2-12n+25)R_2^2]+ \\ +\dot R_1[3(4n^2-4n+15)R_1^2-9(4n^2-4n-5)R_1R_2-(48n^2-48n-55)R_2^2]+ \\ +\dot R_2[(12n^2-12n+25)R_2^2-9(4n^2-4n-5)R_1R_2-(48n^2-48n-75)R_1^2]\}+O(\tau_1+\tau_2)\Big). \qquad (16)$$

Поменяв местами индексы 1 и 2, а также знак перед знаком суммы, получаем аналогичное выражение для силы $F_{\mu_l 2}$.

Подставляя (16) в (15), а затем в (14) и учитывая, что

$$\tau_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}\sqrt{\frac{2h}{\bar R}}+O(h^{3/2}), \qquad \tau_2=\frac{R_1}{R_1+R_2}\sqrt{\frac{2h}{\bar R}}+O(h^{3/2}),$$
$$c=\sqrt{2h\bar R}+O(h^{3/2}), \qquad \bar R=R_1R_2/(R_1+R_2),$$

находим разложение вязких сил вблизи зоны контакта сфер в окончательном виде

$$F_{\mu_l 1}\approx -F_{\mu_l 2}=-6\pi\mu_l\bar R^2\,\frac{\dot h}{h}-6\pi\mu_l\bar R\ln\Big(\frac{\bar R}{h}\Big)\Big(\frac{1}{5}+\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\Big)\dot h- \\ -6\pi\mu_l\bar R\ln\Big(\frac{\bar R}{h}\Big)\Big(\frac{R_2(R_2+2R_1)}{(R_1+R_2)^2}\,\dot R_1+\frac{R_1(R_1+2R_2)}{(R_1+R_2)^2}\,\dot R_2\Big)+O(1) \qquad (17)$$

($\dot h=-(\dot R_1+\dot R_2+u_1+u_2)$).

В случае постоянных радиусов ($\dot R_1=\dot R_2=0$) разложения вязких сил совпадают с разложениями, полученными в работах [4, 5].

Главная часть асимптотического выражения, пропорциональная выражению $1/h$ в формуле (17), для пузырьков с переменными радиусами получена в работах [7, 10] с помощью теории смазочного слоя. В работе [11] также с помощью теории тонкого слоя для случая роста пузырька вблизи стенки получена логарифмическая особенность асимптотического выражения

$$F_{\mu_l}=-6\pi\mu_lR_1\dot h\Big(\frac{R_1}{h}+O\Big(\ln\frac{h}{R_1}\Big)\Big)+6\pi\mu_lR_1\dot R_1\Big(\ln\frac{h}{R_1}+O(1)\Big).$$

При $R_2\to\infty$ в формуле (17) получаем более точное разложение, включающее логарифмическую особенность при $\dot h$:

$$F_{\mu_l}=-6\pi\mu_lR_1\dot h\Big(\frac{R_1}{h}-\frac{1}{5}\ln\frac{h}{R_1}+O(1)\Big)+6\pi\mu_lR_1\dot R_1\Big(\ln\frac{h}{R_1}+O(1)\Big).$$

При больших расстояниях между центрами сфер r асимптотики вязких сил (14) принимают вид

$$\frac{F_{\mu_l 1}}{6\pi\mu_lR_1}\approx u_1\Big(1+\frac{9}{4}\,\frac{R_1R_2}{r^2}\Big)+\frac{3}{2}\,u_2\,\frac{R_2}{r}+\frac{3}{2}\,\dot R_1\,\frac{R_1^2R_2}{r^3}+\dot R_2\,\frac{R_2^2}{r^2},$$
$$-\frac{F_{\mu_l 2}}{6\pi\mu_lR_2}\approx u_2\Big(1+\frac{9}{4}\,\frac{R_1R_2}{r^2}\Big)+\frac{3}{2}\,u_1\,\frac{R_1}{r}+\frac{3}{2}\,\dot R_2\,\frac{R_2^2R_1}{r^3}+\dot R_1\,\frac{R_1^2}{r^2},$$

что при $\dot R_1=\dot R_2=0$ согласуется с результатами [6].

Заключение. В приближении Стокса рассмотрено движение двух сфер с переменными радиусами в вязкой жидкости. Найдено точное выражение для сил гидродинамического взаимодействия. Получено двухчленное разложение для этих сил при выполнении граничного условия прилипания. Первый член пропорционален $1/h$, второй пропорционален $\ln h$. Впервые найдена логарифмическая асимптотика, имеющая существенное значение для исследования задач о слиянии пузырьков [7]. Для твердых шаров логарифмическая асимптотика согласуется с асимптотическими выражениями [4, 5]. В случае взаимодействия сферы с переменным радиусом и плоскости полученный результат согласуется с результатом работы [10]. Найденное точное выражение для сил взаимодействия позволяет получить разложения по обратным степеням r.

Автор выражает благодарность А. Г. Петрову за полезные замечания и продуктивное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Stimson M., Jeffery G. B.** The motion of two spheres in a viscous fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Contain. Papers Math. Phys. Character. 1926. V. 111, N 757. P. 110–116.
2. **Brenner H.** The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface // Chem. Engng Sci. 1961. V. 16, N 3/4. P. 242–251.
3. **Cox R. G., Brenner H.** The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. 2. Small gap widths, including inertial effects // Chem. Engng Sci. 1967. V. 22, N 12. P. 1753–1777.
4. **Cooley M. D. A., O'Neill M. E.** On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere // Mathematika. 1969. V. 16, N 1. P. 37–49.
5. **Jeffrey D. J.** Low-Reynolds number flow between converging spheres // Mathematika. 1982. V. 29, N 1. P. 58–66.
6. **Happel J.** Low-Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media / J. Happel, H. Brenner. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publ., 1983. V. 1.
7. **Petrov A. G.** Forced oscillations of two gas bubbles in a fluid in the vicinity of bubble contact // Fluid Dynamics. 2011. V. 46, N 4. P. 81–99.
8. **Уиттекер Э. Т.** Курс современного анализа / Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон. М.: Физматлит, 1963.
9. **Сандуляну Ш. В.** Асимптотическое разложение кинетической энергии жидкости при движении в ней двух сфер переменных радиусов вблизи их контакта // Прикл. математика и механика. 2020. Т. 84, вып. 3. С. 311–326.
10. **Петров А. Г., Харламов А. А.** Пространственные задачи гидродинамического взаимодействия тел в вязкой жидкости в окрестности их контакта // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 5. С. 14–25.
11. **Michelin S., Gallino G., Gallaire F., Lauga E.** Viscous growth and rebound of a bubble near a rigid surface // J. Fluid Mech. 2019. V. 860. P. 172–199.

Поступила в редакцию 20/I 2020 г.,
после доработки — 20/I 2020 г.
Принята к публикации 2/III 2020 г.