

СТРУКТУРА СТАЦИОНАРНОЙ ТОКОВОЙ ВОЛНЫ,  
СОЗДАВАЕМОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ  
В ПРОВОДЯЩЕМ МАТЕРИАЛЕ  
С ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

УДК 539.63

Е. И. Биченков

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
630090 Новосибирск

*В работе предложена двухжидкостная модель плоской стационарной ударной волны в проводнике и рассмотрена ее токовая структура. Для идеального гидродинамического разрыва показано, что распределение полей и токов состоит из довольно широкой диффузионной зоны в не возмущенном волной материале и из мелкомасштабной зоны высокочастотных осцилляций, связанных с релаксацией плотности электронов к плотности ионов. Рассмотрена структура осцилляционной зоны в зависимости от свойств материала и возможного изменения электропроводности в ударной волне. Вычислено время установления равновесной плотности зарядов. Показано, что для проводящих материалов генерируемый волной ток определяется сжимаемостью и практически весь сосредоточен в диффузионной зоне. Ширина этой зоны определяется электропроводностью материала в исходном состоянии и никак не зависит от свойств материала за фронтом волны.*

ПРОСТЕЙШАЯ ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

При распространении ударной волны (УВ) в проводящем материале с поперечным магнитным полем возникает ЭДС индукции и создается система токов, распространяющаяся совместно с волной. Такие волны с индуцированными токами являются новым объектом для классической гидродинамики ударно-волновых явлений. Их распространение отличается качественно новыми особенностями и сопровождается рядом неизвестных ранее эффектов. Величина и распределение токов и структура токовой зоны могут определять величину магнитного поля, создаваемого при ударно-волновой компрессии магнитного потока [1-4], скорость переключения и перебрасываемую мощность в размыкателях с ударно-индуцированными переходами вещества из проводящего в непроводящее состояние и окажутся решающими для других приложений [5]. Начнем рассмотрение структуры ударно-индуцированных токовых волн с протейшей из возможных задач.

Пусть стационарная волна распространяется в материале вдоль оси  $x$  справа налево с волновой скоростью  $D$ . Все параметры в ней зависят от  $\zeta = (x + Dt)$ : магнитное поле  $\mathbf{B} = e_z B(\zeta)$ , электрическое поле  $\mathbf{E} = e_y E(\zeta)$ , плотность тока  $\mathbf{j} = e_y j(\zeta)$ . Квазистационарная

система уравнений Максвелла и закон Ома для движущегося проводника имеют вид [6]

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \left[ \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right] \right).$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость материала (массовая),  $\sigma$  — электропроводность,  $c$  — электродинамическая постоянная. После подстановки полей в уравнение индукции и интегрирования его с граничным условием  $x \rightarrow -\infty$ :  $E \rightarrow 0$ ,  $B \rightarrow B_0$  получаем

$$E = -\frac{D}{c}(B - B_0). \quad (1)$$

Далее уравнение Ома и закон Ампера приводят к уравнению для магнитного поля, которое в случае идеального гидродинамического скачка нулевой толщины распадается на два:

$$\frac{dB}{d\zeta} = \begin{cases} k_0(B - B_0), & k_0 = \frac{4\pi\sigma_0}{c} \frac{D}{c}, \quad \zeta < 0; \\ k_f(B - nB_0), & k_f = k_0 \frac{s}{n}, \quad \zeta > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь и далее индексы 0 и  $f$  обозначают величины перед и за скачком,  $\rho$  — плотность,  $n = D/(D - u) = \rho_f/\rho_0$  — сжатие материала,  $s = \sigma_f/\sigma_0$  — изменение его электропроводности в ударной волне.

Решение полученных уравнений имеет вид

$$B = \begin{cases} B_0 + (B_s - B_0) \cdot e^{k_0\zeta}, & \zeta < 0; \\ nB_0 + \text{const} \cdot e^{k_f\zeta}, & \zeta > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $B_s$  — магнитное поле на скачке. С физической точки зрения решение за скачком абсурдно, так как экспоненциально нарастает с  $\zeta$ . Единственное разумное решение отвечает случаю, когда входящая в него постоянная равна нулю, т. е. если магнитное поле за скачком однородно и равно равновесному с материалом полю, определяемому условием вмороженности

$$B_f = \frac{D}{D - u} B_0 = \frac{\rho_f}{\rho_0} B_0 = nB_0. \quad (4)$$

Отказ от условия (4) приведет к генерированию в области за фронтом УВ неограниченных полей, если вдруг окажется, что по каким-то причинам магнитное поле в некоторый момент времени будет отличаться от равновесной величины  $B_f$ . Подобная ситуация может, в частности, возникнуть при неосмотрительных попытках решить задачу о структуре ударных волн с током численными методами.

Итак, стационарная УВ при распространении в проводящем материале поперек магнитного поля сжимает его, увеличивая в  $n$  раз. При этом она генерирует ток с линейной плотностью

$$i = \frac{c}{4\pi} (n - 1)B_0. \quad (5)$$

Распределение поля, вообще говоря, может иметь вид, показанный на рис. 1: перед фронтом волны магнитное поле экспоненциально возрастает от начального значения  $B_0$  до некоторого заранее неизвестного значения  $B_s$ , а затем на разрыве возрастает скачком от  $B_s$  до  $B_f$ . Такое распределение поля приводит к соответствующему распределению тока. Часть его, определяемая разностью  $B_s - B_0$ , диффундирует вместе с полем в невозмущенный

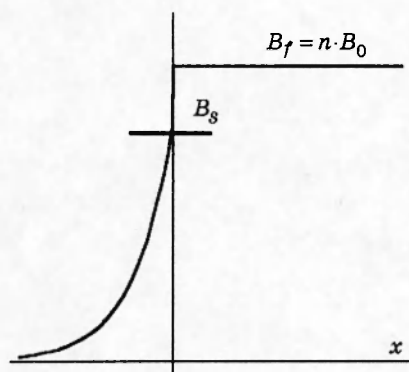


Рис. 1. Распределение магнитного поля, генерируемого ударной волной в проводящем материале

ударной волной материал и сосредоточена перед фронтом волны в слое толщиной

$$l_d = \frac{1}{k_0} = \frac{c}{4\pi\sigma_0} \frac{c}{D}. \quad (6)$$

Зону перед УВ, сосредоточенный в ней ток и магнитное поле будем называть диффузионными, а величину  $l_d$  — диффузионной толщиной токового слоя, генерируемого ударной волной. Отметим, что в  $l_d$  входит характерное время

$$\tau_r = \frac{1}{4\pi\sigma}, \quad (7)$$

равное по порядку величины времени поляризации проводника в электрическом поле и называемое в физике плазмы временем релаксации электрического заряда [7].

Если продиффундировавшее вперед поле  $B_s \neq B_f$ , то возникает разрыв поля с захватом соответствующего тока внутри скачка. Величина захваченного тока  $\propto (B_f - B_s)$  и в рамках проведенного рассмотрения остается неопределенной. Нахождение ее требует более содержательной физической модели взамен использованного простейшего электродинамического приближения нулевого порядка.

### МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ В САМОСОГЛАСОВАННОМ ПОЛЕ. ИДЕАЛЬНЫЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ СКАЧОК

**Физическая модель. Система уравнений.** Будем рассматривать материал как смесь электронной и ионной жидкостей. Электрическое и магнитное поля предполагаем слабыми, чтобы пренебречь их влиянием на движение ионной основы. Это позволяет рассмотреть формирование и поддержание ударного разрыва независимо от полей, полагая в дальнейшем гидродинамическое течение заданным. Структурой гидродинамического скачка будем пренебрегать, считая его идеальным стационарным разрывом. Используя преобразования Лоренца и соотношение (1), нетрудно получить, что для рассматриваемой задачи с точностью до  $(v/c)^2$  в системе отсчета, связанной с ударным фронтом,  $\mathbf{E}' = e_y D/cB_0$ ;  $\mathbf{V}' = e_z V$ , т. е. магнитное поле такое же, как и в системе отсчета с бегущей УВ, а электрическое поле однородно. Дальнейшее изложение проведем в этой стационарной системе отсчета, штрихи у переменных опустим.

Для описания проводящего материала и его взаимодействия с полем используем классическую двухжидкостную МГД-модель [7, 8]. Плотность ионной основы  $n_i$  и ее скорость

$w_i$  зададим в виде

$$n_i = \begin{cases} n_0, & x < 0, \\ n - f, & x > 0, \end{cases} \quad w_i = \begin{cases} D, & x < 0, \\ D - u, & x > 0. \end{cases}$$

Электронная компонента потока подвижна и подвержена воздействию электромагнитного поля. Для плотности электронной жидкости и ее скорости можно записать лишь граничные условия:

$$n_e = \begin{cases} n_0, & x \rightarrow -\infty, \\ n_f, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad w_e = \begin{cases} D, & x \rightarrow -\infty, \\ D - u, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (8)$$

Так как плотность электронов не предполагается равной плотности ионов, в материале возникает и при распространении УВ поддерживается распределение зарядов

$$\rho_q = e(n_i - n_e). \quad (9)$$

Это значит, что распространение УВ сопровождается возникновением продольной компоненты электрического поля  $E_x$ , определяемой уравнением

$$\frac{dE_x}{dx} = 4\pi\rho_q. \quad (10)$$

Перемещение зарядов вдоль оси  $x$  создает продольную компоненту электрического тока, которая в стационарной задаче должна быть равна нулю, т. е. между плотностью электронов и ионов и их скоростями существует соотношение

$$n_e w_e = n_i w_i = n_0 D. \quad (11)$$

Взаимодействие потока электронов вдоль оси  $x$  с электромагнитным полем порождает поперечный ток. Его величину можно рассчитать следующим образом. Сила Лоренца, действующая на электрон в направлении поперечном к потоку электронов, определяется соотношением

$$\mathbf{f}_y = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{w}_e \times \mathbf{B}] = \mathbf{e}_y \left( -e \frac{D}{c} B_0 + e \frac{w_e}{c} B \right) = \mathbf{e}_y m(\omega_c w_e - \omega_{c0} D),$$

где  $\omega_c = eB/(mc)$  — циклотронная частота и  $\omega_{c0}$  соответствует начальному полю  $B_0$ . В простейшей модели проводимость материала  $\sigma$  определяется плотностью носителей тока, их зарядом  $e$  и массой  $m$  и единственным кинетическим параметром  $\tau_i$  — временем рассеяния импульса электронов на ионах [7]:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_i}{m}. \quad (12)$$

В ударных волнах возможны фазовые переходы материала, сопровождающиеся изменением его электропроводности, которые в некоторых случаях могут быть весьма радикальными. Такие переходы мы назвали ударно-индуцированными волнами проводимости [5]. Будем предполагать, что электропроводное состояние определено исключительно плотностью ионной основы материала и в своем изменении  $\sigma$  следует за изменением  $n_i$ . Так как в электропроводности это может проявиться главным образом через изменение времени рассеяния импульса электронов на ионах, то в приведенном выражении для  $\sigma$  (12) мы отметили этот кинетический параметр индексом  $i$ .

В обычных, не сверхсильных магнитных полях для материалов даже с высокой электропроводностью порядка проводимости меди параметр  $\omega_c\tau_i \ll 1$ , что позволяет получить

поперечную скорость электронов  $\mathbf{v}_y = \mathbf{f}_y \tau_i / m = \mathbf{e}_y ((\omega_c \tau_i) w_e - (\omega_{c0} \tau_i) D)$  и вычислить искомую плотность тока  $\mathbf{j} = -en_e \mathbf{v}_y$ . После этого уравнение Ампера приводится к виду

$$\frac{dB}{dx} = \frac{4\pi}{c} en_e ((\omega_c \tau_i) w_e - (\omega_{c0} \tau_i) D). \quad (13)$$

Замкнем систему уравнений (9)–(13) уравнением движения электрона в проекции на ось  $x$ . Для этого рассмотрим силы, действующие на электрон вдоль оси  $x$ , направленной по потоку. Во-первых, это сила со стороны продольного электрического поля  $E_x$  и, во-вторых, поле Холла, генерируемое поперечным током [7]:

$$\mathbf{E}_H = -\frac{1}{en_e} \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = \mathbf{e}_x \frac{1}{4\pi en_e} B \frac{dB}{dx}.$$

Действующие на электрон силы не исчерпываются перечисленными двумя силами электромагнитной природы. Со стороны ионов на поток электронов действует своеобразная сила трения, которая определяет электропроводность. Ранее эта характеристика материала была определена введением времени рассеяния направленного импульса электрона в его движении относительно ионов. Оставаясь в пределах этого предположения, для силы трения, действующей на электрон со стороны ионов, нетрудно получить соотношение  $\mathbf{f}_r \tau_i = m(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_e)$ . В результате уравнение движения электрона записывается в виде

$$\ddot{x} + \frac{w_e - w_i}{\tau_i} = -\frac{1}{8\pi n_e m} \frac{d(B)^2}{dx} - \frac{e}{m} E_x.$$

Полагая  $w_e = \dot{x}$  и переходя к переменной  $x$ , нетрудно получить

$$w_e \frac{dw_e}{dx} + \frac{w_e - w_i}{\tau_i} = -\frac{1}{8\pi n_e m} \frac{d(B)^2}{dx} - \frac{e}{m} E_x. \quad (14)$$

Уравнения (9)–(11), (13) и (14) описывают взаимодействие УВ в проводящем материале с электромагнитным полем. К ним следует добавить в качестве краевых условия (8) и очевидные условия:

$$\begin{aligned} E_x &\rightarrow 0; & x &\rightarrow \pm\infty, \\ B &\rightarrow B_0; & x &\rightarrow -\infty, \\ B &\rightarrow B_f; & x &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Масштабы. Безразмерная формулировка задачи.** Определим масштабы основных величин, входящих в задачу. Для плотности частиц, их скорости и магнитного поля — это естественные величины  $n_0$ ,  $D$  и  $B_0$ , соответствующие их значениям в набегающем потоке. Сложнее обстоит дело с линейным масштабом  $l_0$  и масштабом электрического поля  $E_0$ . Для определения  $l_0$  воспользуемся уравнением (13), откуда

$$l_0 = B_0 \frac{c}{4\pi en_e D} \frac{1}{\omega_{c0} \tau_0} = \frac{c}{4\pi} \frac{m}{e^2 n_0 \tau_0} \frac{c}{D} = \frac{c}{4\pi \sigma_0} \frac{c}{D}. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что эта единица линейного масштаба совпадает с определенным ранее размером диффузионной зоны (6).

Используя  $l_0$ , определим характерное электрическое поле  $E_0 = 4\pi en_0 l_0$  и после замены  $x \rightarrow l_0 x$ ,  $n \rightarrow n_0 n$ ,  $w \rightarrow Du$ ,  $B \rightarrow B_0 B$ ,  $E_x \rightarrow E_0 E_x$  и исключения  $j$  получим систему уравнений

$$n_e u_e = n_i u_i = 1, \quad (16)$$

$$\frac{dE}{dx} = n_i - n_e, \quad (17)$$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\tau_i}{\tau_0} \left( B - \frac{1}{u_e} \right), \quad (18)$$

$$u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{c^2}{D^2} \frac{1}{\omega_{p0}^2 \tau_0^2} (u_e - u_i) \frac{\tau_0}{\tau_i} = -u_A^2 u_c \frac{dB^2}{dx} - \frac{c^4}{D^4} \frac{1}{\omega_{p0}^2 \tau_0^2} E_x. \quad (19)$$

Здесь

$$\omega_{p0}^2 = 4\pi n_0 e^2 / m \quad (20)$$

— плазменная частота, соответствующая плотности электронов в набегающем потоке;

$$u_A^2 = \frac{1}{mn_e} \frac{B^2}{8\pi} \frac{1}{D^2}$$

— безразмерный параметр, который будем называть альфвеновской скоростью электронов. При выводе уравнения (19) использовалось классическое соотношение  $4\pi\sigma_0 = \omega_{p0}^2 \tau_0$ .

**Порядки величин параметров задачи.** Представление о порядках величин входящих в задачу параметров можно получить из приводимой таблицы, составленной на основе справочника [9]. В ней  $c_s$  — продольная скорость звука, остальные параметры определены ранее. Все размерные величины приведены в СГС-системе. При вычислении альфвеновской скорости вместо  $D$  использовалась скорость звука, что отражено звездочкой слева в заголовке последнего столбца таблицы. Для титана она была принята равной  $6 \cdot 10^5$  см/с. Числа в скобках в столбце плотности электронов обозначают принятую в расчетах валентность элемента.

Нетрудно установить, что в уравнении (19) порядки коэффициентов составляют ряд: 1,  $10^5$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{15}$ . Столь большая разница порядков свидетельствует о том, что в задаче перемешаны два явления с несоизмеримыми масштабами. С физической точки зрения это просто понять. Действительно, взаимодействие УВ в проводящем материале с электромагнитным полем содержит в качестве первичного события формирование разрыва плотности ионной основы с последующим изменением электронной плотности, инициируемым этим разрывом. В формальных гидродинамических построениях формирование ударного разрыва описывается введением подходящей вязкости материала. Для материалов типа металлов с почти предельной плотностью упаковки атомов вязкость должна быть огромной, чтобы обеспечить переход в сжатое состояние практически на одном межатомном размере. Следующий вместе с ионами электронный поток релаксирует к новой плотности ионной основы не сразу, а в результате некоторого переходного процесса, определяемого взаимодействием с ионами. Решающими при этом оказываются силы электрического при-

| Материал | $c_s,$<br>$10^5$ см·с <sup>-1</sup> | $\sigma,$<br>$10^{17}$ с <sup>-1</sup> | $n_0,$<br>$10^{22}$ см <sup>-3</sup> | $\tau_r,$<br>$10^{-19}$ с | $\tau_i,$<br>$10^{-15}$ с | $\omega_p,$<br>$10^{16}$ с <sup>-1</sup> | $\omega_c \tau_i \cdot 10^{-4}$ | $\omega_p \tau_i$ | * $u_A^2 \cdot 10^{-3}$ |
|----------|-------------------------------------|--|--------------------------------------|---------------------------|---------------------------|--|---------------------------------|-------------------|-------------------------|
| Al       | 6,26                                | 3,34                                   | 18,06 <sup>(3)</sup>                 | 2,38                      | 7,33                      | 2,40                                     | 1,29                            | 528               | 1,85                    |
| Cu       | 4,70                                | 5,39                                   | 8,37 <sup>(1)</sup>                  | 1,48                      | 25,00                     | 1,63                                     | 4,40                            | 408               | 2,36                    |
| Fe       | 5,85                                | 0,93                                   | 25,39 <sup>(3)</sup>                 | 8,58                      | 1,40                      | 2,84                                     | 0,25                            | 40                | 0,50                    |
| Ti       | —                                   | 0,21                                   | 11,29 <sup>(2)</sup>                 | 37,19                     | 0,75                      | 1,90                                     | 0,13                            | 14                | 1,07                    |
| Pb       | 2,35                                | 0,44                                   | 6,60 <sup>(2)</sup>                  | 18,21                     | 2,60                      | 1,45                                     | 0,46                            | 38                | 11,98                   |



тяжения к ионам. Они порождают колебания в системе ионы — электроны с плазменной частотой  $\omega_p$ . Трение электронов об ионы, эффективно учитываемое электропроводностью материала, является демпфирующим фактором, ведущим к затуханию этих колебаний. Безразмерный параметр  $Q = \omega_p \tau_i$  определяет количество плазменных колебаний, произошедших за время свободного пробега электрона, т. е. может служить мерой добротности рассматриваемой колебательной системы. Из приведенной таблицы видно, что даже самые плохие проводники типа титана имеют довольно высокую добротность  $Q \approx 14$ . Для хороших же проводников следует ожидать многих сотен колебаний, прежде чем в смеси электроны — ионы установится равновесное распределение плотности зарядов.

**Расщепление задачи.** Совершенно естественно далее расщепить задачу на две:

- формирование сопутствующего ионам потока электронов, связанного с ним распределения плотности зарядов и продольного электрического поля  $E_x$ ;
- взаимодействие этого потока с поперечным магнитным полем  $B_z$ .

Для этого следует исключить слагаемое с магнитным полем из уравнения (19) и рассмотреть систему уравнений (16), (17) и (19) без магнитного поля как определяющую для продольного потока электронов.

Мерой воздействия магнитного поля на продольный поток электронов является альфеновская скорость. Малость этого параметра позволяет рассматривать уравнение (18) как определяющее для магнитного поля, если использовать в нем найденное значение электронной плотности  $n_e$  в качестве известной функции.

### ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ЗАДАЧИ

**Система уравнений.** Начнем с задачи о возникающем в УВ распределении зарядов и сопровождающем его продольном электрическом поле. Введем новый масштаб продольных размеров, более соответствующий рассматриваемой задаче, чем предыдущий масштаб  $l_0$ , определенный соотношением (15). Хотя мы и рассматриваем стационарный поток электронов, искомый масштаб  $x_0$  вполне естественно выбрать равным амплитуде возможных плазменных колебаний:

$$x_0 = D/\omega_p \tau_0. \tag{21}$$

Масштаб электрического поля изменится пропорционально линейному:  $E_0 = 4\pi en_0 x_0$ . После несложных преобразований подобия из (16), (17) и (19) следуют уравнения рассматриваемой задачи:

$$n_e u_e = n_i u_i = 1, \tag{22}$$

$$\frac{dE}{dx} = n_i - n_e, \tag{23}$$

$$u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\omega_p \tau_0} \frac{\tau_0}{\tau_i} (u_e - u_i) + E_x = 0. \tag{24}$$

Умножив (24) на  $n_e$  и исключив  $u_e$  и  $u_i$ , нетрудно получить уравнение

$$\frac{dn_e}{dx} = n_e^3 (E_x - E_*(n_e)), \tag{25}$$

где  $E_*(n_e) = -(1 - n_e/n_i)/(\sigma Q)$ . Кроме того, в соответствии с определением электропро-

водности (12) принято:

$$\frac{\tau_0}{\tau_i} = \frac{\sigma_0}{\sigma} \frac{n_e}{n_0} \rightarrow \frac{n_e}{s_i}. \quad (26)$$

Здесь  $s = \sigma/\sigma_0$  — проводимость, отнесенная к ее значению в набегающем потоке,  $Q$  — добротность материала. Уравнения (23) и (25) представляют систему уравнений рассматриваемой задачи. Ранее проводимость была определена как функция плотности материала. Поэтому параметр  $s(n_i)$  в рассматриваемой задаче с идеальным гидродинамическим разрывом изменяется скачком на фронте УВ.

**Качественное исследование решений.** Введя переменную  $\nu = n_i - n_e$ , запишем систему уравнений для электронной плотности и электрического поля:

$$\frac{d\nu}{dx} = -(n_i - \nu)^3 \left( E_x + \frac{\nu}{sn_i Q} \right), \quad (27)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \nu. \quad (28)$$

Так как функция  $n_i$  предполагается идеальным разрывом, задача сводится к исследованию поведения траекторий двух автономных систем уравнений со сшиванием решений на скачке. Каждая из систем имеет одно грубое состояние равновесия на бесконечности при  $E_x = 0$  и  $n_e = n_i$ . Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид  $\lambda^2 + n_i^2/(sQ)\lambda + n_i^3 = 0$ . Его корни

$$\lambda_{\pm} = -\frac{n_i^2}{2sQ} \pm i \sqrt{n_i^3 - \frac{n_i^4}{4s^2 Q^2}}. \quad (29)$$

Отсюда следует, что

- положение равновесия устойчивое;
- при  $n_i \geq 4s^2 Q^2$  особая точка — узел, в случае равенства — вырожденный узел;
- при  $n_i < 4s^2 Q^2$  особая точка — фокус.

Так как набегающему на скачок потоку соответствуют отрицательные значения  $x$ , то траектории системы выходят из состояния равновесия  $\{1, 0\}$  в бесконечности слева, достигают какой-то точки  $\{n_e, \bar{E}_e\}$ , соответствующей скачку, в ней переходят на траекторию системы с новым значением параметра  $n_i$  и далее по спирали «накручиваются» на новое состояние равновесия за скачком  $\{n, 0\}$ . Эволюция электронной плотности и электрического поля в рассматриваемой задаче показана на рис. 2. Приведенные на нем графики представляют результаты численных расчетов для невысокой степени сжатия ( $n = 1,1$ ) и для сильносжимаемого материала ( $n = 2$ ) и, пожалуй, для самой малой из возможных добротностей материала  $Q = 10$ . Для построения этих траекторий необходимо было знать положение гидродинамического разрыва на плоскости переменных  $\{n_e, E_x\}$ . Условия, определяющие положение скачка, сформулированы в следующем разделе работы. При расчетах использовались аналитические условия для скачка с малым сжатием материала. Это значит, что если график для  $n = 1,1$  можно воспринимать как достаточно точный, то ко второму следует отнести скорее как иллюстрацию, показывающей качественные особенности поведения сильносжимаемых материалов.

**Условия на скачке.** Важнейшим для дальнейшего становится вопрос об условиях, определяющих положение гидродинамического скачка на плоскости  $\{n_e, E_x\}$ , т. е. в принятых ранее обозначениях — положение точки  $\{n_s, E_s\}$ . Естественно предполагать не-



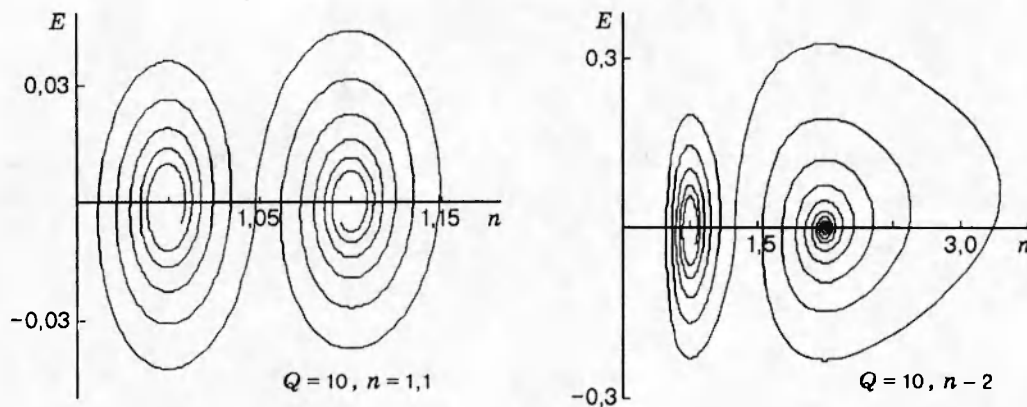


Рис. 2. Фазовые траектории систем, описывающих электрическое поле и распределение плотности электронов в потоке до и после гидродинамического скачка

прерывность электронной плотности и поля. Однако разрыв электронной плотности, в принципе, возможен. Ему должен сопутствовать разрыв массовой скорости электронов, что, в свою очередь, можно получить за счет скачка потенциала электрического поля. Этот скачок вместе с появлением двойного слоя электрических зарядов может создать контактная разность потенциалов, сопровождающая фазовый переход на ударном фронте. Не исключая такой возможности в принципе, ограничимся в дальнейшем более простой задачей о непрерывности электронной плотности на гидродинамическом разрыве. Разрыв электрического поля в проводящем материале исключен, так как без внешних источников ЭДС поддержание стационарного заряженного слоя в проводнике невозможно.

Условий непрерывности недостаточно для определения положения скачка. Дело в том, что в любой точке плоскости  $\{n_e, E_x\}$  пересекаются фазовые траектории каждой из двух рассматриваемых систем уравнений, т. е., в принципе, скачок с непрерывными значениями поля и электронной плотности можно поместить где угодно. Однако одно условие можно сформулировать совершенно определенно: общий электрический заряд образца с распространяющейся по нему УВ должен быть нулевым. Его можно записать в виде уравнения

$$\int_{-\infty}^0 (n_e(x) - 1) dx = \int_0^{\infty} (n - n_e(x)) dx, \quad (30)$$

после чего электрическое поле  $E_s$  на скачке оказывается равным

$$E_s = \int_{-\infty}^0 (1 - n_e(x)) dx. \quad (31)$$

Записанных соотношений достаточно, чтобы определить положение скачка на плоскости  $\{n_e, E_x\}$ .

**Аналитические оценки для невысоких степеней сжатия.** Для аналитических оценок в дальнейшем воспользуемся решениями линеаризованной системы (27), (28). Это приближение можно использовать при невысоких степенях сжатия  $(n - 1) \ll 1$ . Для плотных материалов типа металлов оно может оказаться неплохим приближением даже при взрывных нагружениях, за исключением особых случаев, когда происходит кумуляция энергии.

Из изложенного ранее нетрудно получить, что

$$n_{e\mp} = \begin{cases} 1 + (n_s - 1)\Re(e^{-\lambda-x}), \\ n - (n - n_s)\Re(e^{\lambda+x}). \end{cases} \quad (32)$$

Здесь индексы + и - относятся к состоянию за и перед скачком плотности, функция  $\Re(z)$  означает вещественную часть  $z$ . Теперь из условий (30), (31) можно определить электронную плотность и электрическое поле на скачке

$$n_s = n \frac{1+s}{1+sn}, \quad E_s = \frac{1-n}{1+sn} \frac{1}{2Q}. \quad (33)$$

Отметим, что при сильном возрастании проводимости в скачке  $n_s \rightarrow 1$ ,  $E_s \rightarrow 0$ , при переходе в непроводящее состояние  $n_s \rightarrow n$ ,  $E_s \rightarrow (1-n)/(2Q)$ . Оба результата прозрачны с физической точки зрения. Первый из них очевиден. При переходе в непроводящее состояние значение  $n_s$  тоже очевидно. Но то, что при этом электрическое поле на скачке не равно нулю, довольно неожиданно и означает, что в непроводящем материале за скачком возникает заряженный слой. В этом случае переход в состояние равновесия за скачком происходит без каких-либо осцилляций по отрезку прямой  $n_e = n$  из точки  $\{n, E_s\}$  в  $\{n, 0\}$ .

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

**Решение задачи. Поле при переходе через скачок.** Принимая во внимание соотношения (16) и (26), запишем уравнение (18) для магнитного поля, генерируемого ударной волной, в виде

$$\frac{dB}{dx} = \frac{s}{n_e}(B - n_e).$$

Для понимания физики рассматриваемой задачи удобно представить поле в виде суммы двух введенных ранее компонент: диффузионной, определяемой диффузией и переносом поля вместе с проводником, и осцилляционной, создаваемой осцилляциями электронной плотности в процессе релаксации ее к плотности ионной основы. Диффузионную компоненту магнитного поля обозначим  $\bar{B}$  и определяющие ее уравнения (2) перепишем в виде

$$\frac{d\bar{B}}{dx} = \frac{s}{n_i}(\bar{B} - n_i).$$

Определим осцилляционную компоненту магнитного поля соотношением  $\tilde{\beta} = B - \bar{B}$ , после чего из уравнений для  $B$  и  $\bar{B}$  следует

$$\frac{d\tilde{\beta}}{dx} = \frac{s}{n_e}B - \frac{s}{n_i}\bar{B} = \left(\frac{s}{n_e} - \frac{s}{n_i}\right)\bar{B} + \frac{s}{n_e}\tilde{\beta}. \quad (34)$$

В этом уравнении, как и во всех предыдущих настоящего параграфа, использован диффузионный масштаб линейных размеров (15). Он очень велик в сравнении с электрическим (21), характерным для осцилляционной зоны. Их отношение

$$l = \frac{l_0}{x_0} = \frac{c^2}{D^2} \frac{1}{Q}$$

— очень большая величина ( $\approx 10^8$ ). Перейдем в (34) к естественным для осцилляционной

зоны величинам  $x \rightarrow x/l, \bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta}/l$ . При этом уравнение для осцилляционной компоненты поля преобразуется к виду

$$\frac{d\bar{\beta}}{dx} = \frac{n_i - n_e}{n_i n_e} s \bar{B} + \frac{1}{l} \frac{s}{n_e} \tilde{\beta}.$$

Учитывая малость параметра  $1/l$  и принимая во внимание, что как перед, так и позади ударного разрыва в осцилляционной зоне  $B \simeq n$ , запишем для магнитного поля непосредственно в окрестности гидродинамического скачка плотности уравнение

$$\frac{d\tilde{\beta}}{dx} = sn \frac{n_i - n_e}{n_i n_e}.$$

Для качественного анализа и самых грубых оценок воспользуемся аналитическим решением линеаризованной системы уравнений электрической задачи (27), (28). Уравнения для осцилляционной компоненты магнитного поля имеют вид

$$\frac{d\tilde{\beta}}{dx} = \begin{cases} n \frac{(1 - n_s) \Re(e^{-\lambda-x})}{1 + (n_s - 1) \Re(e^{-\lambda-x})}, \\ \frac{(n - n_s) \Re(e^{\lambda+x})}{n + (n_s - n) \Re(e^{\lambda+x})}; \end{cases} \quad \lambda_{\mp} = \begin{cases} -\frac{1}{2Q} + i \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}, \\ -\frac{n^2}{2sQ} + i \sqrt{n^2 - \frac{n^4}{4s^2 Q^2}}. \end{cases} \quad (35)$$

Нетрудно установить, что приращение магнитного поля, связанное с осцилляциями электронной плотности, составляет

$$\delta\tilde{\beta} = n \int_{-\infty}^0 \left( 1 - 1 / \left( 1 + \frac{n-1}{1+sn} \exp\left(\frac{x}{2Q}\right) \cos\left(\frac{x}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}\right) \right) \right) dx - \\ - \int_0^{\infty} \left( 1 - 1 / \left( 1 - s \frac{n-1}{1+sn} \exp\left(-\frac{x}{2Q} \frac{n^2}{s}\right) \cos\left(\frac{x}{2Q} \frac{n^2}{s} \sqrt{\frac{4Q^2 s^2}{n} - 1}\right) \right) \right) dx. \quad (36)$$

Соотношение (36) полностью разрешает поставленную в первом параграфе проблему произвольной величины магнитного поля на скачке слева. Незвестная константа  $B_s$  однозначно определяется полученным условием (36):

$$B_s = n - \frac{D^2}{c^2} Q \cdot \delta\tilde{\beta}.$$

**Величина захваченного в скачок тока.** Проанализируем полученные результаты. Важнейшее, что следует отметить, — это малость величины приращения магнитного поля на самом скачке (36). Понятно, что гидродинамический скачок нулевой толщины неспособен захватить в себя сколь-нибудь заметный ток. Из-за огромной величины сил электрического взаимодействия электронов с ионами ширина осцилляционной токовой зоны, сопутствующей скачку плотности ионов, тоже очень мала. Размер этой области можно принять на основании (36):

$$\tilde{l} \simeq 2Q \left( 1 + \frac{s}{n^2} \right) x_0 = 2Q^2 \left( 1 + \frac{s}{n^2} \right) \frac{D^2}{c^2} l_0, \quad (37)$$

а время установления равновесия плотности электронов к плотности ионов оценить из

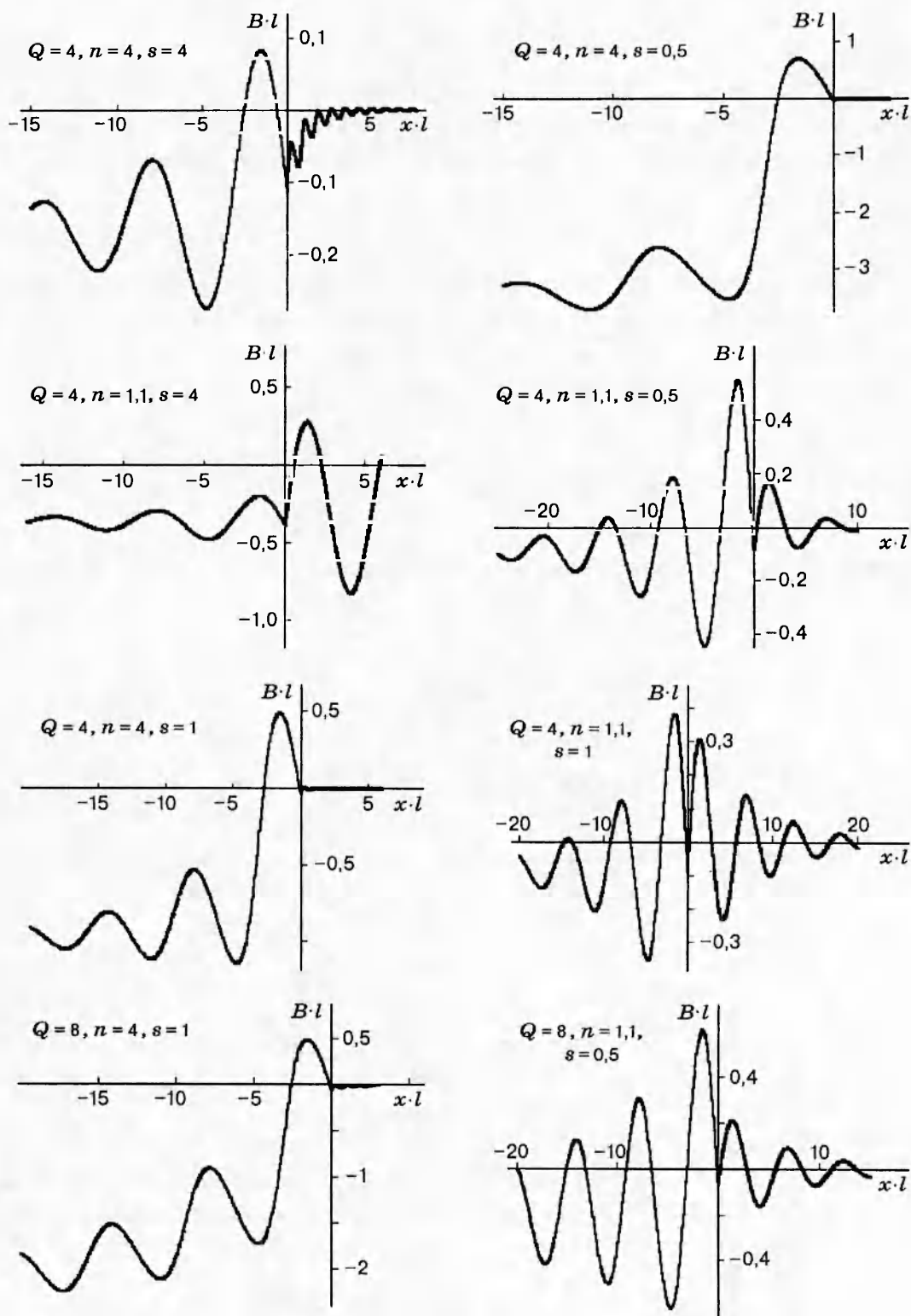


Рис. 3. Осцилляционная компонента магнитного поля,  $l = l_0/x_0$

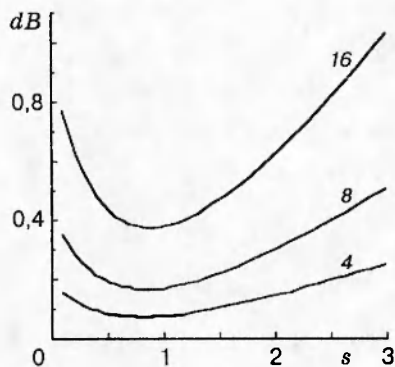


Рис. 4. Зависимость осцилляционной компоненты магнитного поля от скачка электропроводности для различных добротностей материалов,  $l = l_0/x_0$

соотношения

$$\tau_{ei} \simeq \frac{\tilde{l}}{D} = 2Q^2 \left(1 + \frac{s}{n^2}\right) \frac{D^2 l_0}{c^2 D} = 2Q^2 \left(1 + \frac{s}{n^2}\right) \tau_r.$$

Здесь  $\tau_r$  — время релаксации электрического заряда в проводящем материале, определенное ранее соотношением (7). По порядку величины ширина осцилляционной зоны составляет  $5 \cdot 10^{-8}$  см для меди и  $0,25 \cdot 10^{-8}$  см для титана. Соответственно время выравнивания плотности зарядов  $\sim (10^{-13} - 10^{-15})$  с.

**Структура токовой зоны.** Распределение магнитного поля, создаваемого диффузией тока, показано на рис. 1. Это плавный подъем поля, локализованный в сравнительно узкой зоне, сформированной перед скачком плотности материала. Ее ширина  $2,83 \cdot 10^{-4}$  см для меди и  $5,58 \cdot 10^{-3}$  см для титана.

Распределение осцилляционной компоненты магнитного поля, рассчитанное с помощью соотношений (35), показано на рис. 3. По сравнению с рис. 1 масштабы сильно увеличены — за единицу длины взята малая величина  $x_0$  (21), пропорционально изменен и масштаб для поля. В результате масштабы на рис. 3 мельче использованных для описания диффузионной части магнитного поля в  $l_0/x_0$  раз. Кроме того, поле на рис. 3 отнесено к  $(n - 1)$ , чтобы сравнить его с величиной поля  $(B_f - B_0) \propto (n - 1)$ , генерируемого ударной волной.

Подчеркнем основные моменты, характерные для компоненты магнитного поля, возникающего в зоне релаксации плотности электрических зарядов. Во-первых, несмотря на принятую в расчетах малую добротность, осцилляции захватывают довольно широкую пространственную область. С увеличением добротности размер этой области возрастает  $\propto Q^2$ . Во-вторых, амплитудные значения поля заметно превышают значение поля на скачке. Можно показать, что это превышение  $\propto 2Q$ . Это означает, что в зоне осцилляций циркулируют заметные токи разных знаков, что сопровождается соответствующим джоулевым нагревом материала в этой области УВ. И наконец, картина очень чувствительна к изменению проводимости и особенно плотности материала. При увеличении электропроводности амплитуда осцилляций и ширина занятой ими области за фронтом волны резко возрастают, а затухание падает. Увеличение плотности материала при переходе через скачок приводит к росту частоты осцилляций  $\propto n^{3/2}$  и сильному сокращению размеров осцилляционной зоны.

При прохождении осцилляционной зоны поле изменяется на некоторую величину  $\delta\vec{\beta}$ , зависимость которой от скачка электропроводности для различных добротностей материалов показана на рис. 4. Значение  $Q$  приведено рядом с соответствующей кривой. Вычи-

сления показали, что с ростом электропроводности  $\delta\tilde{\beta}$  изменяется немонотонно и имеет минимум при  $s \simeq 1$ . Уменьшение добротности уменьшает величину и сглаживает зависимость  $\delta\tilde{\beta}(s)$ . Наличие множителя  $(D^2/c^2)$  как в выражении для поля (36), так и в формуле для ширины осцилляционной зоны (37) приводит к малости этих величин, несмотря на заметный множитель, связанный с добротностью.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат проведенного анализа состоит в том, что ширина осцилляционной зоны для конденсированных материалов не оказывается препятствием для диффузии поля и в случае идеального гидродинамического скачка приводит к сосредоточению практически всего тока, генерируемого ударной волной, в небольшой стационарной области диффузии поля перед скачком. Величина линейной плотности этого тока определяется соотношением (5) и для поля 10 кГс и сжатия материала на 10 % оказывается значительной величиной порядка 10 кА/см. Малость размеров зоны осцилляций, быстротечность релаксации плотности электронов к плотности ионов и малость генерируемых при этом полей позволяют для хороших проводников пренебречь неравновесностью плотности зарядов и принять, что ход электронной плотности следует за плотностью ионной основы. Захват сколь-нибудь заметного тока в ударную волну может произойти лишь в случае волны конечной ширины, а величина этого тока будет определяться отношением ширины фронта волны к диффузионной толщине токового слоя.

Интересный вывод из проведенного рассмотрения следует для ударно-индуцированного перехода из непроводящего состояния в проводящее. Если этот переход осуществляется в скачке нулевой толщины, то ни сам скачок, ни привязанная к нему осцилляционная зона релаксации плотности электронов к плотности ионов не могут захватить в себя сколь-нибудь заметный ток. Это значит, что поле за скачком просто равно полю перед скачком и после перехода в проводящее состояние «примерзает» к образовавшемуся проводнику, изменяясь вместе с изменением плотности последнего при течи материала за ударной волной. Именно такая модель как совершенно естественная была принята нами [2, 10] и К. Нагаемой [11] без каких-либо дополнительных обоснований для оценок возможностей ударно-волнового метода магнитной кумуляции.

Автор благодарен Международному научному фонду и Российскому фонду фундаментальных исследований, поддержавшим настоящую работу совместным грантом RVO 300.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. с. 762706 от 16.05.80, СССР. Магнитокумулятивный генератор / Биченков Е. И., Скоробогатых Н. Г., Трубачев А. М. Приоритет от 30.11.78. М.Кл.<sup>2</sup> HO2N11/00.
2. Биченков Е. И., Гилев С. Д., Трубачев А. М. МК-генераторы с использованием перехода полупроводникового материала в проводящее состояние // ПМТФ. 1980. № 5. С. 125–129.
3. Nagayama K. New method of magnetic flux compression by means of the propagation of shock induced metallic transition in semiconductor // Appl. Phys. Lett. 1981. V. 38, № 2. P. 109–119.



4. Nagayama K., Oka T., Mashimo T. Experimental study of new mechanism of magnetic flux cumulation by the propagation of shock-compressed conductive region in silicon // J. Appl. Phys. 1982. V. 53, № 4. P. 3029–3037.
5. Биченков Е. И., Гилев С. Д., Трубачев А. М. Ударно-индуцированные волны проводимости в электрофизическом эксперименте // ПМТФ. 1989. № 5. С. 125–129.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
7. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
8. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 183–272.
9. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.
10. Биченков Е. И., Гилев С. Д., Трубачев А. М. Ударно-волновые МК-генераторы // Сверхсильные магнитные поля. Физика. Техника. Применение: Труды МГ-III, Новосибирск, 13–17 июня 1983 / Под ред. В. М. Титова, Г. А. Швецова. М.: Наука, 1984. С. 88–93.
11. Nagayama K., Mashimo T. Magnetohydrodynamic study of flux cumulation by the propagation of shock-compressed conductive region in semiconductors // Там же. С. 270–277.

*Поступила в редакцию 27/IV 1996 г.*

---