

УДК 621.376.3 : 519.233.2

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ГОМОДИННОГО ЛАЗЕРНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ВИБРОМЕТРА

В. А. Гречихин, Т. А. Хренникова

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»,  
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14  
E-mail: KhrennikovaTA@mpei.ru*

Проведён анализ потенциальной точности оценки индекса модуляции сигнала гомодинного лазерного доплеровского виброметра с гармонической частотной модуляцией при известных и неизвестных неинформационных параметрах сигнала. С использованием неравенства Рао — Крамера получены выражения для расчёта нижней границы дисперсии эффективной оценки индекса модуляции и исследована её зависимость от параметров смеси сигнала и шума. Даны рекомендации по выбору условий проведения измерений амплитуды вибросмещения гомодинным лазерным доплеровским виброметром.

*Ключевые слова:* гомодинный лазерный доплеровский виброметр, индекс модуляции сигнала, нижняя граница дисперсии оценки.

DOI: 10.15372/AUT20180103

**Введение.** В настоящее время во многих отраслях промышленности и в научных исследованиях широко применяются различные методы и средства непрерывного прецизионного контроля параметров движения объектов, в частности, виброколебаний. В качестве прецизионных средств измерения параметров виброколебаний получили распространение лазерные доплеровские виброметры (ЛДВ) [1]. Данные устройства могут быть использованы как для прямого измерения виброскорости и вибросмещения объектов, так и для косвенных измерений параметров процессов, являющихся причиной появления виброколебаний [2]. Предельные характеристики метода измерений с помощью ЛДВ находятся путём определения потенциальной точности оценки информационного параметра сигнала ЛДВ. Результаты исследований по оценке параметров гауссового импульса и одночастичного сигнала ЛДА, а также обширная библиография по вопросам получения максимально правдоподобных оценок параметров оптических сигналов и определения их потенциальной точности содержатся в [3, 4].

В предлагаемой работе решается задача исследования зависимости потенциальной точности оценки информационного параметра сигнала от различных неинформационных параметров сигнала гомодинного ЛДВ. Анализ полученных результатов позволяет дать рекомендации по подбору оптимальных условий проведения измерений амплитуды вибросмещения гомодинным ЛДВ.

**Оценка информационного параметра сигнала в условиях стационарного шума.** Известна следующая модель идеального сигнала гомодинного ЛДВ [1]:

$$u(t) = U \cos[m \sin(\Omega t + \Phi) + \varphi], \quad (1)$$

где  $U$  — амплитуда сигнала;  $m$  — индекс угловой модуляции, связанный с амплитудой вибросмещения  $L$  соотношением  $m = 2\pi L/\Lambda$  ( $\Lambda$  — период интерференционной картины в

области измерительного объема ЛДВ, построенного по дифференциальной оптической схеме);  $\Omega$  — частота виброколебаний;  $\varphi$  — начальная фаза регистрируемого сигнала, зависящая от взаимного расположения рассеивателя и интерференционной полосы в измерительном объеме ЛДВ;  $\Phi$  — начальная фаза виброколебаний. Амплитуда вибросмещения  $L$  определяется косвенным методом по результатам прямого измерения параметра  $\Lambda$  и оценки параметра  $m$ , полученной в ходе обработки сигнала ЛДВ.

Рассмотрим задачу оценки информационного параметра  $m$  в случае, когда на устройство оценивания с выхода фотоприёмника на интервале времени  $(0, T)$  поступает аддитивная смесь сигнала (1) и стационарного широкополосного гауссова шума  $n(t)$ :

$$x(t) = u(t) + n(t). \quad (2)$$

При наличии значительной фоновой засветки, когда уровень дробового шума меняется слабо, корреляционную функцию шума  $n(t)$  можно описать выражением  $R(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ , где  $N_0$  — односторонняя спектральная плотность мощности шума,  $\delta(\tau)$  — функция Дирака.

При условии если неинформационные параметры сигнала точно известны, а отношение энергии сигнала на интервале наблюдения к спектральной плотности мощности шума достаточно велико, оценка информационного параметра  $m$  сигнала является оптимальной по критерию минимума среднеквадратической погрешности, нижняя граница дисперсии которой  $D_m$  определяется неравенством Рао — Крамера [5]:

$$D_m \geq \left( \left\langle \left( \frac{\partial \ln p(x(t) | m)}{\partial m} \right)^2 \right\rangle \right)^{-1}, \quad (3)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  — знак математического ожидания;  $p(x(t) | m)$  — функционал условной плотности вероятности наблюдаемой реализации  $x(t)$ .

Для принятой модели шума функционал  $p(x(t) | m)$  удовлетворяет соотношению [6]

$$p(x(t) | m) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - u(t, m)]^2 dt \right\}. \quad (4)$$

Нижняя граница дисперсии оценки индекса частотной модуляции может быть найдена из (1)–(4). Преобразуем математическое ожидание в выражении (3) к виду

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{\partial \ln p(x(t) | m)}{\partial m} \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial m} \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - u(t, m)]^2 dt \right\} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \left( -\frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - u(t, m)] \frac{\partial u(t, m)}{\partial m} dt \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left( -\frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) \frac{\partial u(t, m)}{\partial m} dt \right)^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{4}{N_0^2} \int_0^T \int_0^T n(t_1) n(t_2) \frac{\partial u(t_1, m)}{\partial m} \frac{\partial u(t_2, m)}{\partial m} dt_1 dt_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Проведя усреднение по реализациям шума, получим соотношение для нижней границы дисперсии оценки индекса модуляции  $m$ :

$$D_m \geq \left( \frac{U^2}{2N_0} \int_0^T (1 - \cos[2m \sin(\Omega t + \Phi) + 2\varphi])(1 - \cos[2\Omega t + 2\Phi]) dt \right)^{-1}. \quad (5)$$

Для частного случая, когда время наблюдения  $T$  составляет целое число периодов виброколебаний  $T_\Omega$  ( $T = nT_\Omega$ , где  $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ ,  $n \geq 1$  — натуральное число) и намного превышает период виброколебаний, выражение для дисперсии  $D_m$  можно привести к виду

$$D_m \geq ((q^2/2)[1 - (J_0(2m) - J_2(2m)) \cos(2\varphi)])^{-1}. \quad (6)$$

Здесь  $J_0(x)$  и  $J_2(x)$  — функции Бесселя первого рода;  $q$  — отношение сигнал/шум, определяемое формулой  $q = \sqrt{U^2 T / N_0}$ .

Для случая, когда неинформационные параметры сигнала неизвестны, решается задача совместного оценивания. Используя (1), (2) и (4), можно получить выражения для расчёта элементов информационной матрицы Фишера  $\mathbf{J}$ , задаваемых формулой [5]

$$J_{\lambda_i \lambda_j} = \left\langle \frac{\partial \ln p(x | \mathbf{\Lambda})}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ln p(x | \mathbf{\Lambda})}{\partial \lambda_j} \right\rangle, \quad (7)$$

где  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots)$  — вектор параметров сигнала, который в рассматриваемом случае имеет вид  $\mathbf{\Lambda} = (U, m, \Omega, \Phi, \varphi)$ . Нижние границы дисперсий оценок параметров определяются при этом диагональными элементами корреляционной матрицы ошибок  $\mathbf{D}$ , вычисляемой путём обращения информационной матрицы Фишера  $\mathbf{D} = \mathbf{J}^{-1}$  [5]. Нижняя граница относительного среднего квадратического отклонения (СКО) оценки индекса модуляции может быть рассчитана по формуле  $\delta_m = (\sqrt{D_{mm}}/m) \cdot 100\%$ , где  $D_{mm}$  — соответствующий диагональный элемент корреляционной матрицы ошибок  $\mathbf{D}$ .

Графики зависимостей нижней границы относительного СКО оценки индекса модуляции  $\delta_m$  от величины индекса модуляции при различных значениях числа периодов виброколебаний на интервале времени наблюдения  $T/T_\Omega$  приведены на рис. 1 для  $q = 10$  дБ,

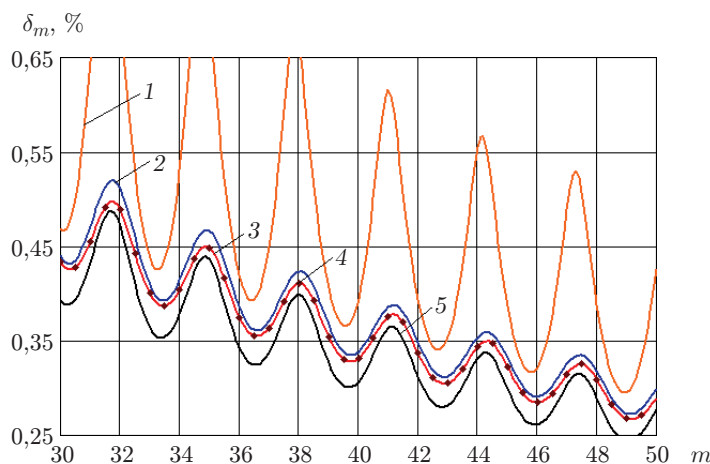


Рис. 1. Зависимости нижней границы относительного СКО оценки индекса модуляции от величины индекса модуляции при известных (кривые 3, 5) и неизвестных (кривые 1, 2) неинформационных параметрах сигнала (кривые 1, 5 —  $T/T_\Omega = 0,6$ ; 2, 3 —  $T/T_\Omega = 1$ ; 4 — расчёт по формуле (6))

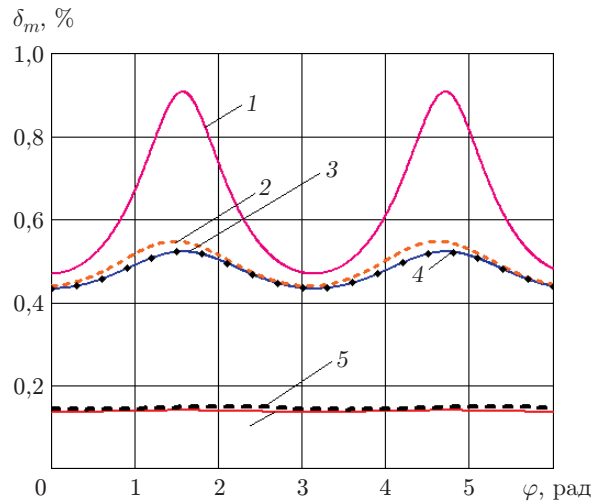


Рис. 2. Зависимости нижней границы относительного СКО оценки индекса модуляции от начальной фазы регистрируемого сигнала при известных (кривые 3, 6) и неизвестных (кривые 1, 2, 5) неинформационных параметрах сигнала (кривая 1 —  $T/T_\Omega = 0,6$ ,  $m = 30$ ; 2, 3 —  $T/T_\Omega = 1$ ,  $m = 30$ ; 5, 6 —  $T/T_\Omega = 1$ ,  $m = 100$ ; 4 — расчёт по формуле (6) для  $m = 30$ )

$\varphi = \pi$ ,  $\Phi = 4\pi/3$ . На рис. 2 показаны зависимости  $\delta_m$  от начальной фазы регистрируемого сигнала  $\varphi$  для  $q = 10$  дБ,  $\Phi = 4\pi/3$ , двух значений  $m$  и различных значений  $T/T_\Omega$ . Зависимости нижней границы относительного СКО оценки индекса модуляции  $\delta_m$  от начальной фазы виброколебаний  $\Phi$  для  $q = 10$  дБ,  $\varphi = \pi$ ,  $m = 30$  и различных значений  $T/T_\Omega$  приведены на рис. 3.

**Оценка информационного параметра сигнала в условиях нестационарного шума.** Если оптическая схема ЛДВ позволяет устранить фоновую засветку, а аддитивный шум электронных блоков минимизирован, модель наблюдаемого процесса на выходе инерционного фотодетектора (photodetector — ph) можно представить в виде аддитивной

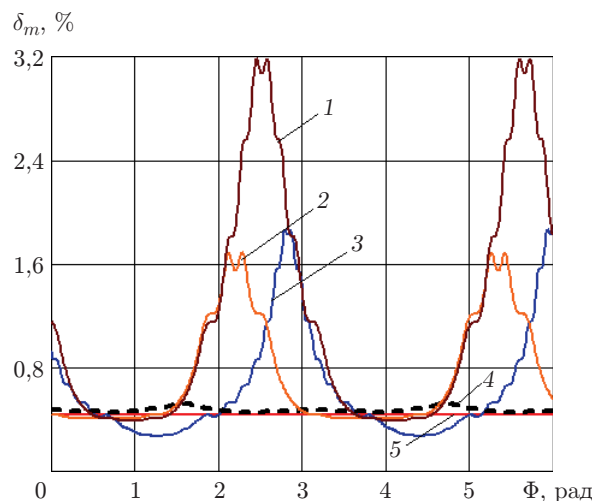


Рис. 3. Зависимости нижней границы относительного СКО оценки индекса модуляции от начальной фазы виброколебаний при известных (кривые 3, 5) и неизвестных (кривые 1, 2, 4) неинформационных параметрах сигнала (кривая 1 —  $T/T_\Omega = 0,7$ ; 2 —  $T/T_\Omega = 0,8$ ; 3 —  $T/T_\Omega = 0,1$ ; 4, 5 —  $T/T_\Omega \geq 1$ )

смеси сигнала и нестационарного широкополосного гауссова шума [7]:

$$x_{\text{ph}}(t) = u_{\text{ph}}(t) + n_{\text{ph}}(t), \quad (8)$$

где

$$u_{\text{ph}}(t) = U_0(1 + V \cos[m \sin(\Omega t + \Phi) + \varphi]) \quad (9)$$

— полезный сигнал;

$$N_{\text{ph}}(t) = N_0(1 + V \cos[m \sin(\Omega t + \Phi) + \varphi]) \quad (10)$$

— «мгновенное» значение спектральной плотности мощности шума;  $V$  — параметр оптической схемы датчика («видность» интерференционной картины, создаваемой зондирующими лазерными пучками),  $0 < V < 1$  [8]. В принятой упрощённой модели нестационарный шум приближённо задаётся функцией корреляции [9]

$$R_{\text{ph}}(t, t + \tau) = (N_{\text{ph}}(t)/2)\delta(\tau). \quad (11)$$

Запишем выражение для функции правдоподобия в условиях нестационарного шума, используя соотношение для условной многомерной плотности вероятности дискретной выборки из  $K$  отсчётов процесса  $x_{\text{ph}}(t)$ , которые приближённо будем считать независимыми:

$$p(x_{\text{ph}}(t_i) | \mathbf{\Lambda}, N_{\text{ph}}(t_i, \mathbf{\Lambda}), i = 1, \dots, K) = \prod_{i=1}^K \sqrt{\frac{\Delta}{\pi N_{\text{ph}}(t_i, \mathbf{\Lambda})}} \exp \left\{ -\frac{(x_{\text{ph}}(t_i) - u_{\text{ph}}(t_i, \mathbf{\Lambda}))^2}{N_{\text{ph}}(t_i, \mathbf{\Lambda})} \Delta \right\}, \quad (12)$$

где  $\Delta$  — интервал дискретизации.

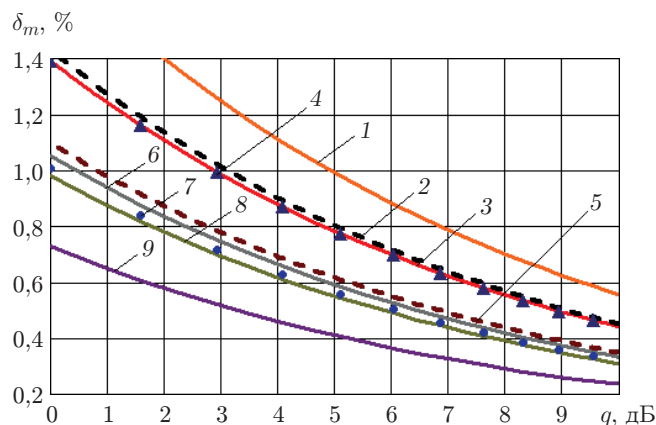


Рис. 4. Зависимости нижней границы относительного СКО оценки индекса модуляции от отношения сигнал/шум при известных (кривые 3, 6 — аддитивный шум; 8, 9 — мультипликативный шум) и неизвестных (кривые 1, 2 — аддитивный шум; 5, 7 — мультипликативный шум) неинформационных параметрах сигнала (кривые 1, 5 —  $T/T_\Omega = 0,6$ ; 2, 3, 7, 8 —  $T/T_\Omega = 1$ ; 6, 9 —  $T/T_\Omega = 0,2$ ; 4 — расчёт по формуле (6))

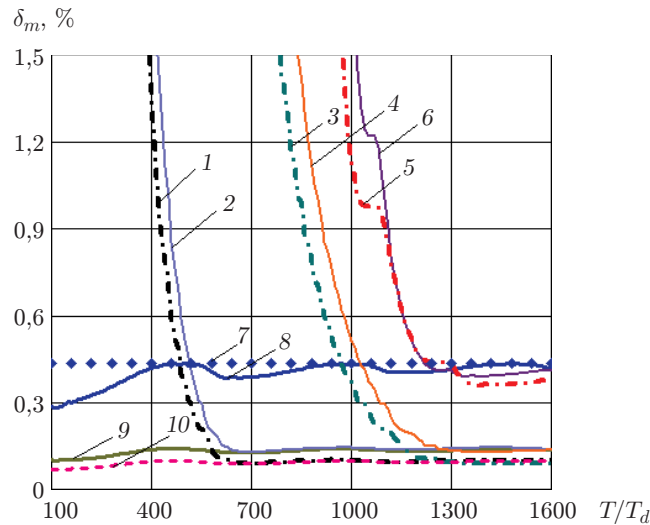


Рис. 5. Зависимости нижней границы относительного СКО оценки индекса модуляции от времени наблюдения при известных (кривые 8, 9 — аддитивный шум; 10 — мультипликативный шум) и неизвестных (кривые 2, 4, 6 — аддитивный шум; 1, 3, 5 — мультипликативный шум) неинформационных параметрах сигнала (кривые 1, 2, 9, 10 —  $T_\Omega/T_d = 1000$ ,  $m = 100$ ; 3, 4 —  $T_\Omega/T_d = 2000$ ,  $m = 100$ ; 5, 6 —  $T_\Omega/T_d = 2000$ ,  $m = 30$ ; 8 —  $T_\Omega/T_d = 1000$ ,  $m = 30$ ; 7 — расчёт по формуле (6) для  $m = 30$ )

Используя (7)–(12), можно получить выражения для расчёта элементов  $i, j$  информационной матрицы Фишера:

$$J_{\lambda_i \lambda_j} = \sum_{k=1}^K \frac{2\Delta}{N_k} \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_i} \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_j}. \quad (13)$$

В соответствии с (13) проведём численный расчёт элементов корреляционной матрицы ошибок  $\mathbf{D}$  и найдём нижнюю границу дисперсии оценки информационного параметра  $m$  в условиях нестационарного шума. Так как в этих условиях отношение сигнал/шум меняется во времени, следуя [9], введём понятие среднего отношения сигнал/шум:

$$\bar{q} = \sqrt{\int_0^T (u_{\text{ph}}(t) - U_0)^2 dt / (N_0/2)} = \sqrt{(U_0 V)^2 T / N_0}.$$

На рис. 4 представлены зависимости величины  $\delta_m$  от отношения сигнал/шум  $\bar{q} = q$  при  $m = 100$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $\Phi = 4\pi/3$  и различных значениях  $T/T_\Omega$  для аддитивного и мультипликативного шумов. Рис. 5 иллюстрирует зависимости величины  $\delta_m$  от нормированного времени наблюдения  $T/T_d$  для двух моделей шума при  $\bar{q} = q = 10$  дБ,  $\varphi = \pi$ ,  $\Phi = 4\pi/3$ , двух значений  $m$  и различных значений  $T_\Omega/T_d$ , где  $T_d = \Delta$  — шаг дискретизации.

**Заключение.** На основании результатов проведённого исследования можно сделать следующие выводы. Как видно из графиков рис. 1, при увеличении индекса модуляции значение нижней границы относительного СКО оценки параметра  $m$  уменьшается, а в случае когда интервал времени наблюдения становится меньше периода виброколебаний ( $T/T_\Omega < 1$ ), приобретает осциллирующий характер, который наиболее выражен при условии неизвестных неинформационных параметров сигнала. С одной стороны, анализ рис. 2–5 позволяет сделать вывод, что при  $T/T_\Omega > 1$  потенциальная точность оценки задаётся

практически только отношением сигнал/шум и не зависит от неинформационных параметров сигнала. При  $T/T_\Omega < 1$  имеются оптимальные значения начальных фаз регистрируемого сигнала и виброколебаний, при которых СКО оценки минимально. С другой стороны, на графиках рис. 5 видно, что при выборе времени наблюдения меньше некоторых «пороговых» значений, величина нижней границы относительного СКО оценки резко возрастает. При известных неинформационных параметрах сигнала и оптимальных значениях фаз данные «пороговые» явления наступают при  $T/T_\Omega \approx 0,2$ , а при неизвестных неинформационных параметрах — при  $T/T_\Omega \approx 1$ . Аналогичные зависимости имеют место и при мультипликативном шуме. Таким образом, для практически значимого случая неизвестных неинформационных параметров сигнала при проведении измерений амплитуды вибро смещения гомодинным ЛДВ необходимо выбирать время наблюдения, превышающее 1–1,5 периода виброколебаний. Тогда нижняя граница относительного СКО оценки практически не зависит от начальных фаз сигнала и виброколебаний и может быть оценена по приведённым в работе графикам для заданных значений отношения сигнал/шум и информационного параметра сигнала  $m$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Застрогин Ю. Ф., Застрогин О. Ю., Кулебякин А. З.** Лазерные приборы вибрационного контроля и точного позиционирования. М.: Машиностроение, 1995. 320 с.
2. **Гречихин В. А., Расковская И. Л., Ринкевичюс Б. С.** Влияние акустооптического эффекта на погрешность измерений колебательной скорости частиц лазерным доплеровским анемометром // Автометрия. 2000. № 5. С. 92–101.
3. **Соболев В. С., Прокопенко М. Н.** Максимально правдоподобные оценки частоты и других параметров сигналов лазерных доплеровских измерительных систем, работающих в режиме одночастичного рассеяния // Квантовая электроника. 2000. **30**, № 12. С. 1109–1114.
4. **Соболев В. С., Полецук Ю. А.** Максимально правдоподобные оценки параметров оптических сигналов с учетом дробового и фоновых шумов // Компьютерная оптика. 2006. № 30. С. 98–106.
5. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
6. **Перов А. И.** Статистическая теория радиотехнических систем. М.: Радиотехника, 2003. 400 с.
7. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
8. **Соболев В. С., Кащеева Г. А.** Потенциальная точность методов лазерной доплеровской анемометрии в режиме одночастичного рассеяния // Автометрия. 2017. **53**, № 3. С. 74–80.
9. **Гречихин В. А.** Потенциальная точность оценки индекса модуляции сигнала с гармонической частотной модуляцией // Радиотехника. 2009. № 1. С. 29–35.

*Поступила в редакцию 4 мая 2017 г.*