ПМТФ, № 2, 1974

УДК 533.93

УСТОЙЧИВОСТЬ НИЗКОВОЛЬТНОЙ ДУГИ С НЕРАВНОВЕСНОЙ ИОНИЗАЦИЕЙ

Ю. Ю. Абрамов, Г. Г. Гладуш

(Мсква)

Получен критерий устойчивости низковольтной дуги при отсутствии ионизационного равновесия. Показано, что устойчивость зависит от свойств функции генерации. На примере цезиевой дуги термоэмиссионного преобразователя рассматривается влияние изменения температуры электронов на устойчивость плазмы.

1. Целью данной работы является исследование устойчивости низковольтной дуги с неравновесной функцией генерации на практически важном примере — цезиевом термоэмиссионном преобразователе. Отклонение функции генерации от равновесной в условиях цезиевой дуги может быть обусловлено многими причинами — обеднением «хвоста» максвелловского распределения, наличием пучковых электронов, выходом излучения, диффузией возбужденных атомов. Влияние на вид функции каждого из этих факторов в отдельности или в совокупности изучалось во многих работах, так как функция генерации важна для расчета дуги и построения вольт-амперной характеристики преобразователя.

Многими авторами отмечается, что для построения вольт-амперной характеристики важны интегральные свойства функции генерации, тогда как для исследования вопроса об устойчивости важны более тонкие свойства этой функции.

Не ограничиваясь каким-либо конкретным видом функции генерации, сформулируем задачу следующим образом: какими свойствами должна обладать функция генерации, чтобы система была неустойчивой?

2. При пренебрежении градиентами температуры электронов низковольтная дуга в парах цезия описывается уравнением амбиполярной диффузии и уравнением электронной теплопроводности [1]

$$-D_a d^2n / dx^2 = \alpha^2 (T_e) F(n) \tag{2.1}$$

$$jV = 2T_c j_R (T_e / T_c - 1) + I v_i n_1 \tag{2.2}$$

где D_a — коэффициент амбиполярной диффузии, n — плотность плазмы, j — плотность тока, V — падение потенциала на зазоре, I — эффективный потенциал ионизации, T_c — температура катода, x — координата, перпендикулярная к поверхности электродов, $F(n)$ — немонотонная функция плотности плазмы, $\alpha^2 (T_e)$ представляет собой зависимость функции генерации от температуры электронов, v_i — тепловая скорость ионов.

Функция $F(n, T_e)$ в общем случае не представляется в виде произведения, однако, как будет видно ниже, в данном случае это не принципиально и введено для наглядности. Учет выхода излучения в уравнении энергобаланса к качественно новым результатам не приводит и поэтому в дальнейшем для простоты не принимается во внимание. К (2.1), (2.2) необходимо добавить граничные условия для развитой дуги [1]

$$j = j_R - \frac{n_1 v_e}{4} \exp\left(-\frac{\varphi_c}{T_e}\right), \quad D_a \frac{dn}{dx}\bigg|_{x=-d} = \frac{n_1 v_i}{2} \tag{2.3}$$

$$j = \frac{n_2 v_e}{4} \exp\left(-\frac{\varphi_a}{T_e}\right), \quad -D_a \frac{dn}{dx}\bigg|_{x=d} = \frac{n_2 v_i}{2} \tag{2.4}$$

где n_1, n_2 — плотность плазмы у катода и анода, φ_c, φ_a — приэлектродные скачки потенциала, v_e — тепловая скорость электронов, $2d$ — расстояние между катодом и анодом (зазор). В силу симметрии граничных условий (2.3), (2.4) $n_1 = n_2$.

Уравнение (2.1) аналогично уравнению движения частицы в потенциальной яме с энергией $u = \int_0^n F(n)\,dn$, причем роль координаты частицы играет величина n, а роль времени — x. С точностью до величины порядка l / d плотность плазмы на границе можно положить равной нулю (l — длина свободного пробега электрона). Тогда задача состоит в отыскании такой точки $N = n\,(x = 0)$, начиная движение от которой с нулевой скоростью (в силу симметрии решения $(dn / dx)_{x=0} = 0$) частица придет в точку с координатой $n = 0$ за «время», равное заданному (половине зазора d). Интегрируя (2.1), получаем

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{D_a}} = \tau(N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^N \frac{dn}{\sqrt{u(N) - u(n)}} \tag{2.5}$$

Величину $\tau\,(N)$ будем условно называть периодом. Переходя в (2.5) к интегрированию по u, можно записать

$$\tau(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^E \frac{(dn / du)\,du}{\sqrt{E - u}} \tag{2.6}$$

где $E = u\,(N)$ — «полная энергия» частицы.

В зависимости от вида потенциала $u\,(n)$ зависимость τ от амплитуды N (или $\tau\,(E)$) может быть немонотонной [2], т. е. одному значению τ, или α, могут соответствовать два или более значений N. Необходимо выяснить, какими свойствами должна обладать «сила» F, чтобы $\tau\,(N)$ была немонотонной функцией. Для этого следует из интегрального уравнения Абеля (2.6) выразить $u\,(n)$ через $\tau\,(N)$ [3]

$$n(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \int_0^u \frac{\tau(E)\,dE}{\sqrt{u - E}} \tag{2.7}$$

Поскольку $F \geqslant 0$, то зависимость u от n (или $E\,(N)$) монотонна, u и n связаны однозначно; зная $n\,(u)$, можно найти $u\,(n)$. Задавая различные немонотонные зависимости $\tau\,(N)$, можно убедиться, что неоднозначные решения (2.1) могут иметь место и для гладких функций $F\,(n)$, причем $F\,(n)$ может даже не менять кривизны.

Многозначность решений зависит от тонких свойств функции генерации, поэтому приближенный метод определения неоднозначности решений по виду функции $F\,(n)$, используемый, например, в [2,4], ограничен.

Если имеются два или более решений, то решения, для которых $\partial\tau / \partial N < 0$, неустойчивы, а решения с $\partial\tau / \partial N > 0$ устойчивы. Доказательство этого утверждения в предположении о неизменности температуры электронов проводится ниже.

3. Чтобы определить область неустойчивости в зависимости от внешних параметров (тока, напряжения и т. д.), необходимо построить вольтамперную характеристику дуги. Падение потенциала на зазоре складывается из падения потенциала на плазме φ_p и разности приэлектродных скачков потенциала. Последнюю величину с точностью до величины по-

рядка l / d можно найти из граничных условий с учетом $n_1 = n_2$

(3.1) $$\varphi_c - \varphi_a = T_e \ln j / j_R (1 - j / j_R)$$

Падение потенциала на плазме можно найти интегрированием уравнения для электронного тока

(3.2) $$j_e = -D_e\, dn / dx + u_e n d\varphi / dx$$

где u_e — подвижность электронов, φ — потенциал плазмы.

Поскольку изменение электронного тока по зазору мало, то с учетом (2.5) можно получить

(3.3) $$\varphi_p = \frac{j}{u_e} \int \frac{dx}{n(x)} = \frac{\sqrt{2D_a}}{\alpha(N)} \frac{j}{u_e} \int\limits_{n_1}^{N} \frac{dn}{n\,[u(N) - u(n)]^{1/2}}$$

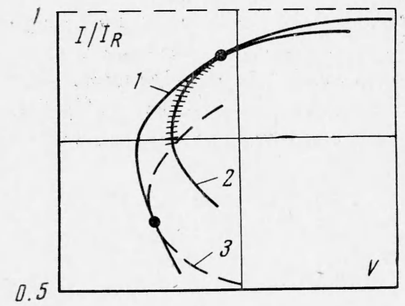
Величину n_1 можно определить из (2.3), учитывая, что это «скорость» частицы в конце траектории

(3.4) $$n_1(N) = 2\sqrt{2D_a u(N)}\, \alpha(N) / v_i$$

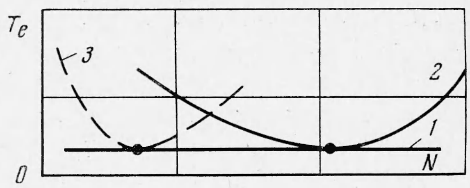
С помощью (3.4) следует исключить n_1 из (3.3) и (2.2). Полное напряжение на зазоре можно получить из (3.1) и (3.3)

(3.5) $$V = \varphi_c - \varphi_a + \varphi_p$$

Для двух неизвестных V и N (ток считаем заданным) имеем два уравнения (2.2) и (3.5). Эти уравнения представляют собой вольт-амперную



Фиг. 1



Фиг. 2

характеристику в параметрическом виде (N — параметр). Если $F \sim n$, то все интегралы берутся в элементарных функциях и вольт-амперная характеристика получается с участком отрицательного дифференциального сопротивления (см. кривую *1* на фиг. 1) [1]. При этом зависимость T_e (N), как следует из (2.5), имеет вид прямой, параллельной оси абсцисс (см. кривую *1* фиг. 2). В случае немонотонной зависимости T_e от N (кривые *2*, *3* на фиг. 2) немонотонность зависимости V от j выражена в большей степени, чем при $T_e = \text{const}$ (кривые *2*, *3* на фиг. 1).

Хотя α может изменяться значительно, T_e меняется слабо, поскольку α обычно зависит от температуры электронов экспоненциально

(3.6) $$\alpha^2 = \alpha_0^2 e^{-I/T_e}$$

При малых токах через прибор N мало. Почти все падение потенциала приходится на плазму. Этот участок вольт-амперной характеристики можно получить из (2.2). Поскольку N мало, то потерями на ионизацию можно пренебречь, поэтому $V = 2T_c\,(T_e\,/\,T_c - 1)\,j_R\,/\,j$, напряжение с ростом тока уменьшается, $dV\,/\,dj < 0$. В случае немонотонной зависимости $T_e\,(N)$ с ростом N температура уменьшается (при малых плотностях плазмы и, соответственно, малых токах). Это приводит к тому, что $dV\,/\,dj$ становится еще меньше. С увеличением N падение на плазме φ_p уменьшается, основными потерями энергии из плазмы становятся ионизационные потери

$$jV = 2\sqrt{2D_a u\,(N)}\,I\alpha\,(N) \tag{3.7}$$

Умножая (3.1) на j и пренебрегая φ_p, получим

$$2\sqrt{2D_a u\,(N)}\,I\alpha\,(N) = T_e j \ln j\,/\,j_R\,(1 - j\,/\,j_R) \tag{3.8}$$

Из (3.8) видно, что с увеличением N растет плотность тока, тогда по (3.1) растет и V. Поскольку при больших плотностях T_e возрастает с ростом N (см. фиг. 2), то производная $dV\,/\,dj$ больше, чем в случае $T_e = \mathrm{const}$. Эти выводы находятся в качественном согласии с расчетами термоэмиссионного преобразователя на ЭВМ, проведенными [5], где показано, что при учете выхода резонансного излучения и диффузии возбужденных атомов отрицательный участок вольт-амперной характеристики существенно увеличивается. Учет выхода резонансного излучения и диффузии возбужденных атомов приводит к тому, что функция генерации при малых концентрациях плазмы пропорциональна n^2. В этом случае α (и, соответственно, T_e) — немонотонная функция N, что и предполагалось выше. При некоторых параметрах разряда точка $\partial\tau\,/\,\partial N = 0$ может лежать на участке вольт-амперной характеристики с $dj\,/\,dV > 0$. Это значит, что неустойчивость может иметь место и на положительном участке вольт-амперной характеристики (см. кривую *2* на фиг. 1).

4. Условие неустойчивости выведено в пренебрежении возмущениями температуры электронов. Получим условия, при которых это пренебрежение справедливо.

Варьируя (2.3), (2.4), находим

$$\frac{\delta j}{j}\,\frac{j_R}{j_R - j} = \frac{\delta n_2 - \delta n_1}{n_1} - \frac{\delta T}{T_e}\,\frac{V}{T_e} + \frac{\delta V}{T_e} \tag{4.1}$$

$$D_a \frac{d}{dx}\,\delta n\,|_{x=-d} = \frac{v_i}{2}\,\delta n_1, \quad -D_a \frac{d}{dx}\,\delta n\,|_{x=d} = \frac{v_i}{2}\,\delta n_2 \tag{4.2}$$

Рассмотрим случай больших токов, который, по-видимому, представляет наибольший интерес. В этом случае падением потенциала на плазме можно пренебречь. Нестационарное уравнение для возмущений температуры электронов имеет вид

$$V\delta j + j\delta V = 2j_R\delta T + {}^1\!/_2 I v_i\,(\delta n_1 + \delta n_2) + 2\varkappa k y^2 d\delta T - 3\Gamma dN\delta T \tag{4.3}$$

где $\varkappa$ — коэффициент электронной теплопроводности.

В (4.3) рассматриваются возмущения параметров плазмы вдоль электродов с длиной волны $\lambda = 2\pi\,/\,k_y$, зависимость от времени представляется в виде $\exp\,(-\Gamma t)$.

Вместе с нестационарным уравнением амбиполярной диффузии для возмущений

$$-\Gamma\delta n + D_a k_y{}^2\delta n - D_a \frac{d^2}{dx^2}\,\delta n = \alpha^2 \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_{n=n_0(x)} \delta n + F\,\frac{\partial\alpha^2}{\partial T_e}\,\delta T \tag{4.4}$$

Уравнения (4.1) — (4.3) составляют замкнутую систему однородных уравнений, из которой можно определить величину декремента Г.

Получить решение (4.4) в общем случае не удается. Поэтому следует рассмотреть, каким образом влияет на устойчивость член с δT в (4.4), свойства которого без этого члена исследуется ниже.

По тем же причинам, что и в стационарном случае

$$\delta n_1 = \delta n_2 \tag{4.5}$$

Это позволяет опустить $(\delta n_1 - \delta n_2)$ в (4.1). В зависимости от сопротивления нагрузки следует рассмотреть несколько случаев.

Случай $\delta V = 0$ может иметь место, когда во внешней цепи задано напряжение или когда при заданном токе имеются возмущения вдоль электродов $k_y \neq 0$. Пусть $k_y \to 0$.

Ток и температура, как следует из (4.1), меняются в противофазе. С учетом (4.2) получаем связь между возмущением температуры и плотности на границе δn_1

$$\frac{\delta T}{T_e} = -\frac{I v_i n_1}{V^2 j (j_R - j) / T_e j_R + 2 j_R T_e} \frac{\delta n_1}{n_1} \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в (4.4), получаем, что возмущение температуры в данном случае оказывает стабилизирующее влияние. Для токов $j \lesssim j_R$ этим влиянием можно пренебречь, если

$$\frac{I}{V} \sqrt{\frac{m}{M}} e^{\varphi_a / T_e} \ll 1 \tag{4.7}$$

Для больших токов $(j \approx j_R)$ второй член в правой части (4.4) больше первого, отношение этих членов порядка

$$\frac{I}{T_e} \sqrt{\frac{m}{M}} e^{\varphi_a / T_e} > 1 \tag{4.8}$$

Состояние плазмы в этом случае будет устойчивым.

В случае $\delta j = 0$, $k_y = 0$ изменение во внешней цепи увеличивает температуру

$$\frac{\delta V}{T_e} = \frac{V}{T_e} \frac{\delta T}{T_e}$$

и при токах, близких к j_R, увеличение температуры вызывает увеличение плотности плазмы

$$\frac{\delta T}{T_e} = \frac{I v_i n_1}{j V} \frac{\delta n_1}{n_1}$$

Такая зависимость приводит к усилению неустойчивости.

В случае $\delta V = 0$, $k_y \neq 0$, $j \approx j_R$ высокая электронная теплопроводность будет выравнивать возмущение температуры электронов, уменьшая их стабилизирующее влияние. Для этого величина k_y должна быть достаточно большой

$$\left(\frac{I}{T_e}\right)^2 \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 4 k_y^2 d^2$$

С другой стороны, слишком короткие волны будут затухать из-за диффузии частиц вдоль электродов. Чтобы этого не происходило, необходимо

$$k_y^2 d^2 \ll d^2 \Gamma / D_a$$

Таким образом

$$(I\,/\,T_e)^2\sqrt{m\,/\,M} \ll 4k_y^2 d^2 \ll 4d^2\Gamma/D_a \tag{4.9}$$

При выполнении этих условий член с Γ в (4.3) мал и изменением температуры электронов можно пренебречь. Оценку величины Γ можно получить, положив его равным по порядку величины производной от скорости ионизации, поскольку процесс неравновесной ионизации обусловливает возникновение неустойчивости. Для характерных условий работы преобразователя, рассмотренных, например, в [5] ($P_{CS} = 1$ *мм* рт. ст., $j_R = 0.66$ *а*, $d = 0.5$ *мм*, $T_e = 3000°$ K) скорость ионизации пропорциональна n^2, следовательно, $4\Gamma d^2\,/\,D_a \gtrsim 1$. Условие (4.9) может быть выполнено, следовательно, в системе может развиваться неустойчивость с характерной длиной волны, на порядок превышающей величину зазора.

5. Докажем, что знак декремента Γ совпадает со знаком производной $\partial\tau\,/\,\partial N$. Уравнение для возмущения плотности плазмы в зазоре без учета возмущения температуры имеет вид

$$-\,\Gamma\delta n - D_a\frac{d^2}{dx^2}\delta n = \alpha^2\frac{\partial F}{\partial n}\bigg|_{n=n_0(x)}\delta n\,(x) \tag{5.1}$$

В (5.1) зависимость от времени выбрана в виде $\exp\,(-\Gamma t)$, n_0 — стационарное решение. Введем новые обозначения

$$\frac{d^2\Gamma}{D_a} = E, \quad -\frac{d^2\alpha^2}{D_a}\frac{\partial F}{\partial n}\bigg|_{n=n_0(x)} = U\,(x), \quad \delta n \equiv \psi\,(x) \tag{5.2}$$

С учетом этого (5.1) перепишется в виде

$$-\,\psi'' + U\,(x)\,\psi = E\psi \tag{5.3}$$

с граничными условиями $\psi\,(-1) = \psi\,(1) = 0$.

В (5.3) координата x обезразмерена на d. Это уравнение имеет вид уравнения Шредингера для частицы с потенциалом $U\,(x)$. В зависимости от вида стационарного решения $n\,(x)$, т. е. от формы и глубины потенциальной ямы $U\,(x)$, уровни энергии могут быть отрицательными или положительными. Если самый нижний уровень E_0 отрицательный, система неустойчива, если положительный — устойчива, поскольку знаки Γ и E совпадают. Свойства этого основного состояния будут изучаться в дальнейшем. Покажем вначале, что знак основного уровня совпадает со знаком функции $\varphi\,(x = 1)$, являющейся решением уравнения

$$-\,\varphi'' + U\,(x)\varphi = 0 \tag{5.4}$$

с граничными условиями

$$\varphi\,(-1) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{x=-1} > 0$$

(задача Коши).

При $E_0 = 0$ решения уравнений (5.3) и (5.4) совпадают, при этом $\varphi\,(1) = 0$. В случае $\varphi\,(1) < 0$ существует такая точка $x_0 < 1$, что $\varphi\,(x_0) = 0$. Поскольку число нулей на интервале $(-1,1)$ является монотонной функцией энергии [6], а энергия, соответствующая функции $\varphi\,(x)$, равна нулю, то энергия E_0, соответствующая функции $\psi\,(x)$, которая не имеет нулей на данном интервале, меньше нуля. Если $\varphi\,(1) > 0$, то поскольку в этом случае $\varphi\,(x)$ на интервале $(-1,1)$ нулей не имеет (см. ниже), точка x_0 расположена правее единицы. Поскольку функция $\psi\,(x)$ обращается в нуль на расширенном интервале $(-1, x_0)$ (в точке $x = 1$), то соответствующая ей энергия больше нуля.

Знак функции $\varphi(x)$ при $x = 1$ совпадает со знаком уровня энергии задачи на собственные значения (5.3). Необходимо вычислить значение этой функции в $x = 1$.

Одно решение уравнения (5.4) известно

$$\varphi_1 = dn_0/dx \tag{5.5}$$

В этом можно убедиться, подставив (5.5) в (5.3) и сравнив полученное уравнение с продифференцированным уравнением (2.1).

Второе решение (5.4) $\varphi_2(x)$ находим из условия сохранения определителя Вронского

$$\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_2'\varphi_1 = C_2$$

Получим

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_1 \int_{-1}^{x} \frac{dx}{\varphi_1^2(x)} \tag{5.6}$$

Так как

$$\varphi_1(-1) = \left[(2\alpha^2 / D_a) \int_0^N F\,dn\right]^{1/2} > 0$$

то из условия $\varphi(-1) = 0$ находим $C_1 = 0$. Из требования $(d\varphi / dx)_{x=-1} > 0$ находим $C_2 > 0$. Здесь же отметим, что по теореме о перемежении нулей [6] функция φ на интервале $(0, -1)$ нулей не имеет.

Решение (5.6) с $C_1 = 0$ неприменимо для $x > 0$, так как при $x = 0$ интеграл расходится из-за того, что $\varphi_1(0) = 0$. Поэтому при $x > 0$ решение (5.4) можно записать в виде

$$\varphi(x) = C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_1 \int_x^1 \frac{dx}{\varphi_1^2} \tag{5.7}$$

Константы C_1' и C_2' находятся из условий непрерывности функции (5.6) и (5.7) и их производных при $x = 0$.

$$\left[C_2\varphi_1(x) \int_{-1}^{x} \frac{dx}{\varphi_1^2}\right]_{x\to-0} = \left[C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_1(x) \int_x^1 \frac{dx}{\varphi_1^2}\right]_{x\to+0} \tag{5.8}$$

$$\left\{C_2 \frac{d}{dx}\left[\varphi_1(x) \int_{-1}^{x} \frac{dx}{\varphi_1^2}\right]\right\}_{x\to-0} = \left\{C_1'\varphi_1(x) + C_2' \frac{d}{dx}\left[\varphi_1 \int_x^1 \frac{dx}{\varphi_1^2}\right]\right\}_{x\to+0} \tag{5.9}$$

Учитывая, что $\varphi_1(0) = 0$ и $\varphi_1(-x) = -\varphi_1(x)$, из (5.8) находим, что $-C_2' = C_2$. Из (5.9) можно получить

$$C_1' = \left\{\frac{2C_2}{\varphi_1'(0)} \frac{d}{dx}\left[\varphi_1(x) \int_{-1}^{x} \frac{dx}{\varphi_1^2}\right]\right\}_{x\to-0}$$

Учитывая из (5.7), что $\varphi(1) = C_1'\varphi_1(1)$, получим

$$\varphi(1) = 2\frac{\varphi_1(1)}{\varphi_1'(0)} \left\{C_2 \frac{d}{dx}\left[\varphi_1(x) \int_{-1}^{x} \frac{dx}{\varphi_1^2}\right]\right\}_{x\to-0} \tag{5.10}$$

Поскольку

$$\varphi_1(1) < 0,\ \varphi_1'(0) = d^2n / dx^2 \sim -F(n) < 0,\ C_2 > 0$$

то знак $\varphi(1)$ совпадает со знаком производной от величины в квадратных скобках. Так как при $\varphi(1) > 0$ $C_1' < 0$, $C_2' < 0$, то по теореме о перемежении нулей функция $\varphi(x)$ на интервале $(0,1)$ нулей также не имеет. Покажем, что производная (5.10) совпадает с величиной $\partial\tau / \partial N$. Условие $x \to 0$ соответствует $n \to N$. С учетом этого, переходя в выражении $\left\{d\left[\varphi_1 \int\limits_{-1}^{x} dx / \varphi_1^2\right] \Big/ dx\right\}_{x\to 0}$ от переменной x к переменной n, можно убедиться, что с точностью до положительного множителя $\alpha / \sqrt{D_a}$ это выражение совпадает с $\partial\tau / \partial N$. Знак декремента Γ и знак производной $\partial\tau/\partial N$ совпадают.

В заключение следует отметить, что аналогичные вопросы относительно устойчивости решений нелинейных уравнений в различных физических задачах рассматривались и ранее [7,8].

Работа [7] полностью посвящена случаю неограниченного интервала $(-\infty, \infty)$, а в [8] рассмотрен лишь один частный вид функции генерации.

Авторы благодарны А. М. Дыхне за обсуждение работы и замечания.

Поступила 5 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жеребцов В. А., Стаханов И. П.* О ионизационно-перегревной неустойчивости в низковольтном дуговом разряде. ПМТФ, 1971, № 3.
2. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 1. Механика. М., «Наука», 1965.
4. *Лошкарев А. И.* Об устойчивости низковольтного дугового разряда в системах с протяженными электродами. III Всес. конференция по физике низкотемпературной плазмы. М., 1971. Краткое содержание докл. М., Изд. МГУ, 1971.
5. *Белоконь А. А., Сонин Э. Б.* К теории низковольтной дуги в термоэмиссионном преобразователе. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, вып. 11.
6. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
7. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Об неустойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
8. *Истратов А. Г., Либрович В. Б.* Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.