

## ЛИТЕРАТУРА

1. Струминский В. В. Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. — М.: Наука, 1985.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.
3. Сарпкаяя Т. Обтекание тел цилиндрической формы // РТК. — 1966. — № 3.
4. Струминский В. В. Теория нестационарного пограничного слоя // Теоретические работы по аэродинамике. — М.: Оборонгиз, 1957.
5. Гудков В. А. Экспериментальное исследование нестационарного пограничного слоя // ИФЖ. — 1991. — № 1.

г. Москва

Поступила 3/V 1990 г.

УДК 532.526.2

Н. Н. Пилюгин, Р. Ф. Талипов

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ В РАМКАХ МОДЕЛИ ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ

Численное решение полных уравнений Навье — Стокса в настоящее время значительно затруднено из-за отсутствия эффективного вычислительного алгоритма (особенно в области больших чисел Рейнольдса). В связи с этим широкое распространение получили различные упрощенные модели уравнений Навье — Стокса [1—3]. Практический интерес представляет расчет поля течения и теплообмена около затупленного тела при наличии существенной неравномерности набегающего потока, приводящей в ряде случаев к развитию локальных отрывных зон на наветренной части тела. В [4] излагаются данные экспериментальных и теоретических исследований сопротивления, теплообмена и газодинамической картины течения около пары тел, одно из которых находится в сверхзвуковом потоке за другим телом. Проведено обобщение численных расчетов вязкого обтекания затупленных тел неравномерным сверхзвуковым потоком в рамках теории гиперзвукового вязкого ударного слоя (ГВУС) как при наличии, так и при отсутствии подачи вещества с поверхности. В [5] приведено асимптотическое решение задачи неравномерного обтекания затупленного тела при умеренных числах Рейнольдса ( $Re_\infty \leq 10^3$ ), даны выражения для коэффициентов теплообмена, трения и предложен критерий безотрывного обтекания.

Уравнения полного вязкого ударного слоя (ПВУС), полученные впервые в [6], описывают течение в ударном слое до величин второго порядка малости по обратной величине квадратного корня из характерного  $Re_\infty$ . Впервые идея использования многократной маршевой процедуры в решении краевой задачи ПВУС реализована в [7]. В [8] подробно изложен численный метод глобальных итераций для решения полных стационарных уравнений вязкого ударного слоя, который сводится к многократной маршевой процедуре с уточнением формы ударной волны (УВ) и поля давления на каждой глобальной итерации.

Система уравнений ГВУС [9] имеет параболический тип. Однако задача сохраняет краевой характер из-за неизвестной формы УВ. Если же форма скачка считается известной, например совпадающей с формой тела, то краевая задача может решаться с заданными начальными условиями однократной маршевой процедурой. В настоящей работе рассматривается именно такой подход к уравнениям ГВУС. Другая возможность с уточнением формы УВ для уравнений тонкого вязкого ударного слоя в случае равномерного набегающего потока реализована в [10].

В данной работе метод глобальных итераций [8] используется для расчета сверхзвукового обтекания осесимметричного затупленного тела неравномерным потоком вязкого совершенного газа. Исследуется пригодность упрощенных уравнений Навье — Стокса [1—3] для описания течения неравномерного потока около затупленного тела, уточняются критические значения параметров неравномерности, при которых происходит переход к отрывному режиму течения.

Результаты, найденные численно в рамках уравнений ПВУС, сравниваются с полученными ранее решениями полных уравнений Навье — Стокса и ГВУС. Расчеты выполнены для сферы при числах Маха  $M_\infty \geq 6$  и  $Re_\infty = 10^2, 10^3$  с учетом эффектов скольжения как на скачке, так и на поверхности тела.

**1. Постановка задачи и описание численного метода решения.** Рассмотрим стационарное сверхзвуковое обтекание гладкого затупленного тела неравномерным потоком вязкого совершенного газа. Профили параметров в набегающем потоке записываются в безразмерном виде [4, 11]

$$V_1(r) = 1 - a \exp(-br^2), \quad p_1(r) = (\gamma M_\infty^2)^{-1}, \\ \rho_1(r) = B / (1 + C \{1 + V_1^2(1 - a)^{-2}\}), \quad B = 1 + C \{1 + (1 - a)^{-2}\}.$$

Здесь  $rR_0$  — расстояние до оси симметрии ( $R_0$  — радиус кривизны тела в критической точке);  $V_1V_\infty$ ,  $\rho_1\rho_\infty$ ,  $p_1\rho_\infty V_\infty^2$  — скорость, плотность, давление в набегающем потоке;  $M_\infty$ ,  $V_\infty$ ,  $\rho_\infty$  — число Маха, размерные скорость и плотность при  $r \rightarrow \infty$ . Параметры  $a$ ,  $b$ ,  $C$  определяют степень неравномерности набегающего потока. Рассматривается случай умеренных и больших  $Re_\infty = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu_\infty$  ( $\mu_\infty$  — вязкость в набегающем потоке) и больших  $M_\infty$ :  $Re_\infty \geq 10^2$ ,  $M_\infty \geq 6$ ,  $\mu_\infty = \mu(T_\infty)$ .

Важный параметр при сверхзвуковом обтекании затупленных тел — температура адиабатического торможения  $T_0 = T_\infty [1 + (\gamma - 1) 0,5M_\infty^2]$ , от которой зависит коэффициент вязкости, типичный для поля течения в окрестности критической точки. Характерное для задачи  $Re$  введем по формуле  $Re_s = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu_s$  ( $\mu_s = \mu(T_0)$ ). Параметр вязкого гиперзвукового подобия  $\varepsilon = Re_s^{-1/\alpha}$  оценивает толщину пограничного слоя, имеющего порядок  $\varepsilon$  и УВ  $O(\varepsilon^2)$  в предельном случае бесконечно больших  $M_\infty$  и  $Re_\infty$ .

Стационарная двумерная система уравнений ПВУС в переменных, связанных с поверхностью тела, дана в [8]. Перейдем к новым независимым переменным  $\xi$ ,  $\eta$  и функции тока:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1}{\Delta} \int_0^y \rho \bar{r} dy, \quad \bar{r} = r/r_w = 1 + \frac{y \cos \alpha}{r_w},$$

$$\Delta = \int_0^{y_s} \rho \bar{r} dy, \quad f = \psi (2\pi \rho_\infty V_\infty r_w \Delta \cos \alpha)^{-1}$$

( $xR_0$ ,  $yR_0$  — координаты вдоль и по нормали к поверхности тела,  $r_w R_0$  — расстояние от оси симметрии до контура тела,  $\alpha$  — угол наклона контура тела к оси симметрии,  $y_s$  — отход УВ). Система уравнений в переменных  $\xi$ ,  $\eta$  приведена в [8]. Остановимся подробнее на выводе граничных условий на УВ. При умеренно малых  $Re_\infty$  УВ размазана, необходимо проводить анализ структуры области перехода через скачок. Если скачок остается достаточно тонким по сравнению с ударным слоем, то для упрощенных уравнений Навье — Стокса этот анализ можно опустить, а вместо граничных условий на скачке использовать обобщенные соотношения Ранкина — Гюгонио, учитывающие скольжение на скачке [9]. В неравномерном случае граничные условия выводятся аналогично [7–9]. Опуская вывод, запишем окончательные формулы в переменных  $\xi$ ,  $\eta$  при  $\eta = 1$ :

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + u + (1 - k_s) C_2 \cos \alpha - V_1 \cos \alpha - \frac{\cos^2 \beta \cdot \cos^2 \beta_s}{Re_\infty \rho_1 V_1 \sin \beta} \frac{dV_1}{dr} = 0,$$

$$\frac{C_1}{\cos^2 \beta_s \cdot Pr} \frac{\partial H}{\partial \eta} + H - 1 + \frac{V_\infty^2}{H_0} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \left\{ C_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{V_1 \cos^3 \beta}{Re_\infty} \frac{dV_1}{dr} \right\} = 0,$$

$$p_s = (\gamma M_\infty^2)^{-1} + (1 - k_s) \rho_1 V_1^2 \sin^2 \beta,$$

$$C_1 = \frac{\mu \rho \bar{r} \cos^3 \beta_s}{\Delta Re_\infty \rho_1 V_1 \sin \beta}, \quad C_2 = \frac{\sin \beta \cdot \sin \beta_s}{\cos \alpha},$$

$$H_0 = C_p T_0, \quad k_s = \frac{\rho_1}{\rho_s} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) \rho_1 V_1^2 M_\infty^2 \sin^2 \beta},$$

$$\beta_s = \beta - \alpha.$$

Здесь  $V_\infty u \cos \alpha$ ,  $(-V_\infty v)$  — компоненты вектора скорости, соответствующие осям  $x$ ,  $y$ ;  $\rho_\infty V_\infty^2 p$ ,  $T_0 T$ ,  $\mu_0 \mu$ ,  $\lambda$ ,  $HH_0$  — давление, температура, коэффициенты вязкости и теплопроводности газа, полная энтальпия;  $\gamma = C_p / C_v$ ;  $Pr = 0,71$  — число Прандтля;  $\beta$  — угол между касательной к поверхности УВ и осью симметрии; индекс  $s$  отмечает параметры на скачке уплотнения.

В общем случае вдува газа с поверхности тела при  $\eta = 0$  используются условия

$$f_w = -\frac{Qr_w}{2\Delta \cos \alpha}, \quad u = 0, \quad H = h_w, \quad Q = \frac{1}{r_w^2} \int_0^{r_w} \rho_w v_w dr_w^2$$

( $f_w$  — функция тока, индекс  $w$  отмечает значения параметров на теле). В случае умеренно малых чисел Рейнольдса ( $Re_\infty = 30 \div 100$ ) на поверхности тела учитываются скольжение и скачок температуры [7], которые в переменных  $\xi, \eta$  имеют вид

$$u = \frac{a_1 \mu}{Re_\infty \Delta} \sqrt{\frac{\rho}{p}} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\Delta}{\rho} \kappa u \right),$$

$$H = h_w + \frac{b_1 \mu}{\Delta Re_\infty} \sqrt{\frac{\rho}{p}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H - v \frac{u^2 V_\infty^2}{2H_0} \right) + v u^2 V_\infty^2 / 2H_0, \quad v = \cos^2 \alpha.$$

Согласно [7],  $a_1 = 1,2304$ ,  $b_1 = 2,3071$ . Отход скачка в новых переменных  $\Delta$  определяется из условия баланса массы:

$$\Delta = \frac{(1 + F + Q) r_w}{(f_s - f_w - I) 2 \cos \alpha},$$

где

$$I = \int_0^1 \frac{d\eta}{\rho}; \quad \bar{F}(r_s) = \frac{R(1-a)^2}{2bCr_w^2} I; \quad A;$$

$$A = \left| \frac{\alpha_0 - W_1}{\alpha_0 - W_0} \right|^{\alpha_0 - 1} \left| \frac{\alpha_0 + W_0}{\alpha_0 + W_1} \right|^{\alpha_0 + 1};$$

$$r_s = r_w + y_s \cos \alpha; \quad \bar{W}_1 = V_1(r_s); \quad W_0 = 1 - a; \quad \alpha_0 = (1 - a) \times \\ \times \sqrt{(1 + C)/C}.$$

Воспользуемся также геометрическим соотношением

$$\operatorname{tg} \beta_s = \frac{1}{H_{1s}} \frac{dy_s}{dx}, \quad H_{1s} = 1 + \kappa y_s$$

( $\kappa$  — кривизна контура тела).

В качестве начального приближения для формы УВ взяты формулы из [8, 12]:

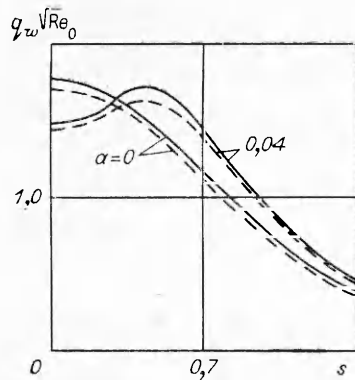
$$\operatorname{tg} \beta_s = D \left( \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{2D-1}{D^2}} - \operatorname{tg} \alpha \right),$$

$$D = \frac{R_{s0}}{2R_0 H_{1s0}}, \quad H_{1s0} = 1 + y_s(0)/R_0$$

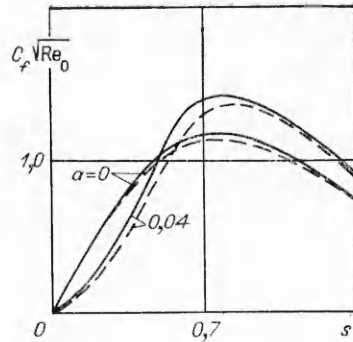
или в явном виде

$$D = \frac{1,05 + 1,65k_{s0}}{2(1 + 0,78k_{s0})}, \quad k_{s0} = \rho_\infty / \rho_{s0}.$$

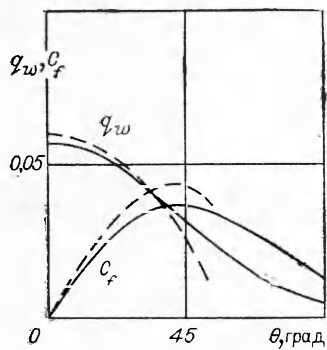
Расчеты проведены в широком диапазоне параметров набегающего потока:  $M_\infty \geq 6$ ,  $30 \leq Re_\infty \leq 10^6$ ,  $0,01 \leq T_w \leq 1$ ,  $f_w = 0$ . В большинстве случаев  $b = 7,2$ ,  $C = 3,0$ , параметр  $a$  рассматривался из интервала  $0 \leq a \leq a_{кр}$ , где  $a_{кр}$  ( $b, C, M_\infty, Re_\infty, T_w$ ) — критическое значение, при котором реализуется отрывное течение в ударном слое на лобовой части тела. Расчеты выполнены на неравномерных сетках. Поперек ударного слоя задавалось до 30 узлов расчетной сетки в зависимости от  $Re$ . Приблизительно половина точек при этом попадала в пограничный слой. При обтекании сферы рассматривалось 24 интервала по продольной координате  $\xi$  со сгущением к критической точке. Минимальный шаг по центральному углу  $\theta$  имел значение около  $2^\circ$ .



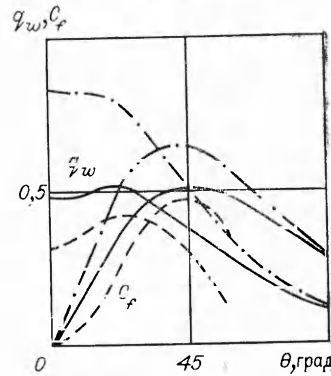
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

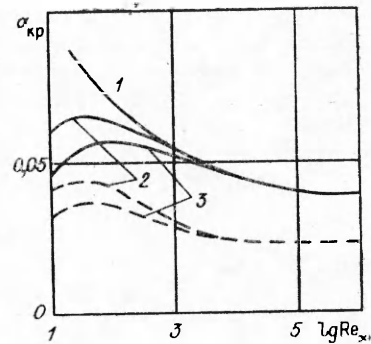
При численном решении использована схема повышенного порядка точности, аналогичная [13]. Неравномерный случай вычислялся следующим образом. Параметры неравномерности  $b, C$  фиксировались, а для  $a$  задавался шаг (обычно 0,005 или 0,01). Равномерный случай ( $a = 0$ ) рассчитывался до сходимости, затем параметр  $a$  возрастал на величину шага и глобальные итерации повторялись до сходимости, после чего  $a$  снова увеличивался и процесс повторялся. При такой организации алгоритма форма УВ и поле градиента давления для полученного решения при меньшем  $a$  использовались в качестве начального приближения. Общий расчет проводился до максимально возможных  $a$ , каждое новое значение  $a$  требовало порядка 10—15 глобальных итераций для шага 0,01 по  $a$  или 5—8 итераций для шага 0,005.

После решения разностных уравнений вычислялись распределения теплового потока  $q_w$  и коэффициента трения  $C_f$  (тепловой поток отнесен к  $\rho_\infty V_\infty H_0$ , сила трения — к  $0,5\rho_\infty V_\infty^2$ ) по формулам

$$q_w = \frac{\mu\rho}{Pr Re_\infty} \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (\eta = 0), \quad C_f = \frac{2 \cos \alpha \mu \rho}{Re_\infty} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (\eta = 0).$$

**2. Результаты расчетов сверхзвукового обтекания сферы неравномерным потоком.** Рассмотрим результаты расчетов локальных тепловых и динамических характеристик при ламинарном обтекании сферы.

На рис. 1, 2 проведено сравнение данных, полученных в рамках модели ПВУС (сплошные линии) и полных уравнений Навье — Стокса [14] (штриховые) для обтекания охлаждаемой сферы. Результаты представле-



Р и с. 5

ны в безразмерных переменных работы [14],  $s$  — безразмерная координата вдоль поверхности тела. На оси симметрии перед УВ  $M_0 = 6$ ,  $Re_0 = 177$ . Температурный фактор, определяемый как отношение  $T_w/T_0$ , имеет значение 0,15,  $b = 7,2$ ,  $C = 3,0$ ,  $Pr = 0,7$ , коэффициент вязкости определяется по степенному закону  $\mu \sim \sqrt{T}$ , отношение удельных теплоемкостей  $\gamma = 1,4$ . На рис. 1, 2 сравниваются распределения коэффициентов теплового потока  $q_w \sqrt{Re_0}$  и трения  $C_f \sqrt{Re_0}$ . Максимальное отличие в неравномерном случае сплошной и штриховой кривых по тепловому потоку составляет 3 %, а по трению и давлению — менее 5 %. Вместе с тем авторы [14] указывают, что представленные ими результаты по трению и тепловому потоку имеют точность около 5 %. Сопоставление вычисленного по модели ПВУС  $q_w \sqrt{Re_0}$  в зависимости от  $Re_0$  с расчетами по полным уравнениям Навье — Стокса [15] для  $\theta = 0$  и  $30^\circ$  показало, что с увеличением  $Re_0$  соответствие в критической точке несколько ухудшается с ростом  $a$ , что объясняется близостью параметров неравномерности к критическим. Однако максимальное отличие кривых для принятых  $Re$  не превышает 9 %. Результаты показывают, что основные аэродинамические характеристики (тепловой поток и трение), определяемые по модели ПВУС, имеют удовлетворительную точность во всем изучаемом диапазоне параметров неравномерности.

На рис. 3, 4 сравниваются данные, полученные в рамках уравнений ПВУС (сплошные и штрихпунктирные кривые) и ГВУС [4] (штриховые) при  $M_\infty = 20$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $T_w = 0,1$ . На рис. 3 представлены тепловой поток и трение в равномерном случае ( $a = 0$ ) при  $Re_\infty = 10^4$ , на рис. 4 — при неравномерном обтекании ( $a = 0,04$ ,  $Re_\infty = 10^2$ ). Сплошные линии отвечают расчету с учетом эффектов скольжения на скачке и условиям прилипания на поверхности тела. При  $Re_\infty = 10^2$  проводился расчет с эффектами скольжения как на скачке, так и на поверхности тела (чтобы не загромождать рисунок, эта кривая не приведена) и без учета этих эффектов (штрихпунктирные линии). Сравнение расчетов по модели ГВУС (скольжение только на скачке) с расчетами ПВУС показывает, что при равномерном набегающем потоке отличие по тепловому потоку в окрестности критической точки (приблизительно до  $30^\circ$ ) не превышает 5–8 % при всех  $Re$ . Соответствие по коэффициенту трения несколько лучше при малых  $Re$  и хуже при больших, в неравномерном случае оно значительно ухудшается. Тепловой поток в критическую точку для модели ГВУС занижен на 35 % при  $Re_\infty = 10^2$  и на 20 % при  $Re_\infty = 10^4$ . На части боковой поверхности сферы (приблизительно при  $30^\circ$ ) согласие несколько улучшается. Отличие по коэффициенту трения в неравномерном случае также заметно (например, при  $Re_\infty = 10^4$  для максимальных значений коэффициента трения оно составляет около 20 %).

Эффекты скольжения на скачке (рис. 3, 4) оказывают гораздо более сильное влияние на трение и тепловой поток, чем скольжение и скачок температуры на поверхности. Вычисления без учета эффектов скольжения приводят к завышенным значениям теплового потока в критической точке почти в 2 раза, а для коэффициента трения — на 30 % (рис. 3, 4), со скольжением только на скачке приводят к завышению значений теплового потока на 17 % и коэффициента трения на 10 %. Близкие к этим оценки при равномерном обтекании получены также в [7]. Из рис. 3, 4 видно, что эффекты скольжения на скачке проявляются в основном в окрестности критической точки, где температура за скачком близка к температуре торможения; влияние же эффектов скольжения на поверхности имеет место вдоль всей поверхности сферы. В неравномерном случае (рис. 4) они сказываются приблизительно так же, как и в равномерном (рис. 3).

На рис. 5 приведена зависимость  $a_{кр}$  от  $Re_\infty$  при значениях параметров, соответствующих рис. 3. Кривая 1 — расчет по модели ПВУС со скольжением на поверхности с произвольной температурой  $0,1 \leq T_w \leq 1$ , сплошные линии 2, 3 — расчет ПВУС с условиями прилипания при

$T_w = 0,1$  и  $0,3$ , штриховые 2, 3 — соответствующие расчеты по модели ГВУС, дающие несколько заниженные значения  $a_{кр}$  во всем диапазоне значений  $Re$ . При больших  $Re$  зависимость  $a_{кр}(Re_\infty)$  выходит на постоянное значение. Учет условий прилипания (кривые 2, 3) приводит к расслоению кривых в зависимости от температуры стенки и немонотонному характеру  $a_{кр}(Re_\infty)$  в области малых  $Re_\infty$  [4]. Расчет с условиями скольжения на поверхности не обнаруживает такого расслоения, и  $a_{кр}$  монотонно возрастает с уменьшением  $Re$  (кривая 1). Отметим, что при  $Re < 10^2$  и  $M_\infty \approx 20$  число Кнудсена становится порядка единицы и применение уравнений механики сплошной среды требует дополнительного исследования. Поэтому результаты при малых  $Re_\infty$  на рис. 5 надо рассматривать как качественные, требующие уточнения в области перехода к модели разреженного газа. Сравнение сплошных кривых 1—3 показывает, что с охлаждением стенки влияние эффектов скольжения на поверхности уменьшается, что согласуется с оценками [9] для равномерного обтекания.

Авторы выражают благодарность Г. А. Тирскому и С. А. Юницкому за полезное обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В., Тирский Г. А. Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техники. Сер. МЖГ.— М.: ВИНТИ, 1985.— Т. 19.
2. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа.— Киев: Наук. думка, 1987.
3. Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А. Динамика ионизованного излучающего газа.— М.: Изд-во МГУ, 1989.
4. Еремейцев И. Г., Пилюгин Н. Н., Хлебников В. С., Юницкий С. А. Исследование аэродинамических характеристик и теплообмена тел в неравномерных сверхзвуковых потоках газа.— М.: Изд-во МГУ, 1988.
5. Пилюгин Н. Н., Талипов Р. Ф. Гиперзвуковое обтекание затупленного тела неравномерным потоком вязкого газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 6.
6. Davis R. T., Flugge-Lotz I. Second-order boundary-layer effects in hypersonic flow past axisymmetric blunt bodies // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 20, pt 4.
7. Davis R. T. Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations // AIAA J.— 1970.— V. 8, N 5.
8. Васильевский С. А., Тирский Г. А. Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных химических реакций.— М.: Изд-во МГУ, 1987.
9. Cheng H. K. The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // Paper/IAS.— 1963.— N 63—92.
10. Васильевский С. А., Тирский Г. А. О некоторых способах численного решения уравнений вязкого ударного слоя // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
11. Lin T. C., Reeves B. L., Siegelman D. Blunt body problem in nonuniform flowfields // AIAA J.— 1977.— V. 15, N 8.
12. Тирский Г. А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим потоком газа при наличии вдува // Научн. тр. Ин-та мех. МГУ.— М.: Изд-во МГУ.— 1975.— № 39.
13. Петухов Н. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратные формулы.— М.: Наука, 1964.
14. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Сверхзвуковое обтекание сферы неравномерным потоком вязкого газа // ЧММСС.— 1981.— Т. 12, № 6.
15. Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Численное исследование обтекания затупленного тела, расположенного в области сверхзвукового следа.— Л., 1984.— (Препр./ФТИ АН СССР; № 918).

г. Москва

Поступила 5/III 1990 г.,  
в окончательном варианте — 15/V 1990 г.