ПМТФ, № 6, 1970

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИНВАРИАНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Н. С. Ерохин

(Харьков)

Рассматривается связь законов сохранения с инвариантами дифференциальных уравнений в задачах трансформации волн в плазме, а также связь инвариантов с устойчивостью запертых в неоднородной среде колебаний и устойчивостью колебаний связанных осцилляторов, параметры которых меняются случайным образом во времени.

В неоднородной среде при решении различных задач линейной теории часто возникает необходимость исследования уравнения четвертого порядка

$$\alpha y^{\mathrm{IV}} + u_2(x;\,\omega)\, y^{\mathrm{II}} + u_1(x;\,\omega)\, y = 0 \tag{0.1}$$

с малым параметром α. В случае слабой неоднородности оно описывает распространение двух мод с волновыми векторами

$$k_{1,2} = (u_2/4\alpha + \sqrt{u_1/4\alpha})^{1/2} \pm (u_2/4\alpha - \sqrt{u_1/4\alpha})^{1/2} \tag{0.2}$$

и в области взаимодействия $u_2 \approx 0$ дает полный переход мод одной в другую [1,2] (т. е. падающая на область взаимодействия волна в зависимости от условий задачи может либо отражаться обратно, либо проходить дальше в виде волны с другими дисперсионными свойствами). Причем, как показано в [3], полный переход не связан с малостью параметра α. Требуется отсутствие в области взаимодействия точек отсечки $k(x) = 0$, полюсов u_1, u_2 и прочих особенностей. Следует подчеркнуть, что результат [1] нетривиален. Представим, например, k_1 в виде

$$k_1 = \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{2}$$

Тогда, как уже отмечалось в [4], можно было бы ожидать при падении на область взаимодействия моды k_1 появления волн с волновыми векторами $k = -k_1$, $k = -k_2$. Однако расчет для случая простого нуля функции u_2 дает только переход $k_1 \leftrightarrow k_2$.

В связи с этим в данной работе рассмотрены энергетические соотношения при аномальной трансформации волн в плазме. Оказывается, сохранение потока энергии во время трансформации обеспечивается некоторым инвариантом соответствующего дифференциального уравнения. Далее рассматривается связь инварианта с устойчивостью запертых в неоднородной среде колебаний и с устойчивостью колебаний связанных осцилляторов, параметры которых меняются случайным образом во времени.

1. Рассмотрим трансформацию плазменной и необыкновенной волн в области частот верхнего гибридного резонанса. Ионы создают положительный фон заряда и слабую неоднородность основного магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Для электронной компоненты плазмы имеем уравнения для возмущений

$$mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -en\mathbf{E}_0 - en_0\mathbf{E} - T_e\nabla n - en_0\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{H}_0\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} + 4\pi e n_0 \mathbf{v}, \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\, n_0\mathbf{v} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = -4\pi e n, \quad e\mathbf{E}_0 + T_e\nabla \ln n_0 = 0$$

Из (1.1) вытекает закон сохранения энергии

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{S} = 0 \tag{1.2}$$

$$W = \frac{mn_0\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} + \frac{T_e n^2}{2n_0}, \qquad \mathbf{S} = T_e n\mathbf{v} + \frac{c}{2\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

При поперечном распространении волн

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(x)\, e_z, \qquad n_0 = n_0(x)$$

и возмущения можно представить в виде

$$f(x, t) = \mathrm{Re}\, f(x)\, e^{i\omega t}$$

Введем обозначения

$$u = (\omega_{He}/\omega)^2, \quad v = (\omega_{pe}/\omega)^2, \quad \xi = \omega x / c, \quad T_e / mc^2 = \beta^2 \ll 1$$

Из (1.1) получаем для компонент электрического поля

$$\frac{d^2E_y}{d\xi^2} + (1-v)E_y = -iu^{1/2}E_x$$

$$\beta^2\left(\frac{d^2E_x}{d\xi^2} - \frac{d\ln v}{d\xi}\frac{dE_x}{d\xi}\right) + (1-u-v)E_x = ivu^{1/2}E_y \tag{1.3}$$

Как следствие (1.2) система уравнений (1.3) имеет инвариант

$$\bar{E}_y\frac{dE_y}{d\xi} - E_y\frac{d\bar{E}_y}{d\xi} + \frac{\beta^2}{v}\left(\bar{E}_x\frac{dE_x}{d\xi} - E_x\frac{d\bar{E}_x}{d\xi}\right) = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

В квазиклассическом приближении, отбрасывая члены порядка β^2, для плазменной волны получаем

$$k_1^2 = \frac{1-u-v}{\beta^2}, \quad E_x = A\left(\frac{v}{k_1}\right)^{1/2} e^{i\theta_1}, \quad E_y = E_x\frac{u^{1/2}}{k_1^2}$$

$$H_z = -E_x\frac{u^{1/2}}{k_1}, \quad v_x = \frac{ieE_x}{m\omega v}, \quad v_y = \frac{eE_x}{m\omega v} \tag{1.5}$$

$$n = \frac{\omega k_1 E_x}{4\pi u e c}, \quad \theta_1(\xi) = \int^{\xi} k_1(\zeta)\, d\zeta, \quad A = \mathrm{const}$$

Из (1.5) для потока энергии в плазменной волне имеем

$$S_x^{(1)} = c\beta^2\frac{|A|^2}{8\pi}$$

Аналогично для необыкновенной волны следует:

$$k_2^2 = \frac{(1-v)^2 - u}{1-u-v}, \quad E_y = \frac{B}{\sqrt{k_2}}e^{i\theta_2}, \quad E_x = \frac{ivu^{1/2}E_y}{1-u-v} \tag{1.6}$$

$$H_z = -k_2E_y, \quad v_x = \frac{ik_2u^{1/2}E_y}{m\omega(1-u-v)}, \quad v_y = \frac{ieE_y(1-v)}{m\omega(1-u-v)}$$

$$n = \frac{\omega v k_2 u^{1/2}E_y}{4\pi e c(1-u-v)}, \quad \theta_2(\xi) = \int^{\xi} k_2(\zeta)\, d\zeta, \quad B = \mathrm{const}$$

Из (1.6) для потока энергии в необыкновенной волне получим

$$S_x^{(2)} = c\frac{|B|^2}{8\pi}$$

Таким образом, в данном приближении волны распространяются независимо. Для определения связи между постоянными A и B нужно решить (1.3) в области резонанса. Пусть электромагнитная волна падает из вакуума на плазму. В однородном магнитном поле точка отсечки $v_- = 1 - \sqrt{u}$ расположена ближе точки резонанса $v_0=1-u$ к краю плазмы и коэффициент трансформации, вообще говоря, экспоненциально мал. Однако в неоднородном магнитном поле, как впервые было указано в [5], они могут поменяться местами. Действительно, положим u, v линейными функциями

$$u(\xi) = u_0(1 - \xi/\rho_1), \qquad v(\xi) = v_0(1-\xi/\rho_2)$$
$$u_0 + v_0 = 1 \qquad (\rho_1, \rho_2 \gg 1)$$

При условии $(u_0 / \rho_1) > (v_0 / \rho_2)$ в области между вакуумом и резонансным слоем отсечка отсутствует. Множитель $(uv)^{1/2}$ регулярен в области резонанса, поэтому, как видно из (1,5), (1.6), нужно найти связь между B и $A\ (u_0v_0)^{1/2}$. После этого из (1.3) следует уравнение Вазова [6]

$$\beta^2 \frac{d^4E_y}{d\xi^4} + a\xi \frac{d^2E_y}{d\xi^2} - u_0v_0E_y = 0, \qquad a = \frac{u_0}{\rho_1} - \frac{v_0}{\rho_2} \tag{1.7}$$

Используя асимптотические формулы [6], получаем $B = -\beta A$. Отсюда $S_x^{(1)} = S_x^{(2)}$, т. е. потоки энергии в плазменной и необыкновенной волнах равны. Легко показать, что уравнение (1.7) (так же как (1.3)) имеет инвариант

$$\beta^2\left(\bar\psi\frac{d\psi}{d\xi} - \psi\frac{d\bar\psi}{d\xi}\right) + u_0v_0\left(\bar E_y\frac{dE_y}{d\xi} - E_y\frac{d\bar E_y}{d\xi}\right) = \mathrm{const}$$
$$\psi \equiv \frac{d^2E_y}{d\xi^2} \tag{1.8}$$

Фактически уже из (1.8) можно определить $|B / A|$. Как здесь, так и в общем случае имеет место соответствие инварианта сохранению потока энергии. Действительно, в отсутствие диссипации должен быть закон сохранения энергии в виде (1.2). Тогда в стационарном состоянии дивергенция потока энергии равна нулю. Следовательно, существует инвариантная билинейная форма возмущенных величин. Для плоскослоистой неоднородной среды инвариантом является компонента потока энергии вдоль неоднородности. Таким образом, для получения правильных результатов необходимо, чтобы используемая в области трансформации упрощенная система уравнений обладала инвариантом. Разумеется, здесь предполагается регулярность полей волн, так как даже в отсутствие диссипации возможно конечное поглощение энергии в области особенности поля волны [7].

2. Понятие инварианта оказывается полезным и при исследовании спектра колебаний неоднородной среды. Так, ниже будет показано, что отсутствие инварианта может привести к неустойчивости запертых в неоднородной среде колебаний. Пусть колебания описываются уравнением

$$y^{\mathrm{IV}} + \lambda^2(u_2y^{\mathrm{II}} + u_1y) = 0 \tag{2.1}$$

где λ^2 — большой вещественный параметр. Рассмотрим бездиссипативный случай, когда u_1, u_2 являются вещественными функциями переменной x и параметра ω. Найдем квазиклассические правила квантования уравнения (2.1) в условиях, когда $u_2(x;\omega)$ обращается в нуль в точках x_1, x_2, и $u_1 > 0$. Предполагается, что нули $u_1(x;\omega)$ и прочие возможные точки ветвления расположены далеко в комплексной плоскости x.

Так как в окрестности точек x_1, x_2 моды уравнения (2.1) полностью переходят друг в друга, то в области прозрачности нужно выбрать решение в виде суммы двух волн с одинаковым направлением фазовой скорости. В этом данная задача отличается от задачи квантования уравнения четвертого порядка в теории гидродинамической устойчивости, которая впервые была рассмотрена в [8]. Согласно [9], в окрестности точек x_1, x_2 следует положить $u_2(x) = u_2'(x_{1,2})(x - x_{1,2})$ и $u_1 = u_1(x_{1,2})$. Таким образом, (2.1) переходит в уравнение Вазова [6]. Используя результаты [6], напишем для точек x_1, x_2 соответственно

$$y(x) \approx \begin{cases} |k_2|^{-1/2} \exp(-|J_2(x, x_1)|) & (x < x_1) \\ k_1^{-1/2} \Psi_-^{(2)}(x, x_1) - k_1^{-5/2} \lambda \sqrt{u_1(x_1)}\, \Psi_+^{(1)}(x, x_1) & (x > x_1) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$y(x) \approx \begin{cases} C k_2^{-1/2} \Psi_+^{(2)}(x, x_2) - C k_1^{-5/2} \lambda \sqrt{u_1(x_2)}\, \Psi_-(x, x_2) & (x < x_2) \\ C|k_2|^{-1/2} \exp(-|J_2(x, x_2)|) & (x > x_2) \end{cases}$$

$$J_\nu(x, \xi) = \int_\xi^x k_\nu(\zeta)\, d\zeta, \quad \Psi_\pm^{(\nu)} = \exp[\pm {}^1/_4 i\pi + J_\nu(x, x_1)], \; C = \mathrm{const}, \; (\nu = 1, 2)$$

В (2.2) интегралы $J_{1,2}(x, x_1)$ понимаются в смысле

$$\int_a^x \frac{k_1 + k_2}{2} dx \pm \int_b^x \frac{k_1 - k_2}{2} dx$$

и аналогично для точки x_2 (a, b — точки ветвления).

Производя сшивку в формулах (2.2), получаем правило квантования

$$-\left[\frac{u_1(x_1; \omega)}{u_1(x_2; \omega)}\right]^{1/2} = \exp(\pm 2i\delta) \qquad \left(\delta = \frac{1}{4} \oint \frac{k_1 - k_2}{2} dx\right) \tag{2.3}$$

Для «симметричного» потенциала $u_1(x_1; \omega) = u_1(x_2; \omega)$ из (2.3) следует:

$$\oint \frac{k_1 - k_2}{2} dx = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{2.4}$$

Как видно из (2.3), для «несимметричного» потенциала u_1 всегда имеется неустойчивость, т. е. $k_{1,2}$ обязательно имеет мнимую часть. Аналогичное явление было обнаружено в [10] при квантовании уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} + 2p(x)y^{\mathrm{II}} + 2\varepsilon(x)y^{\mathrm{I}} + q(x)y = 0$$

когда имеются две точки ветвления.

Отметим, что в отличие от уравнения второго порядка [11] здесь уравнение (2.1) квантуется не обязательно на линии действительной фазы $\int {}^1/_2 (k_1 \sim k_2)\, dx$. Как видно из (2.3), это обязательно выполняется для несимметричного потенциала u_1. Кроме того, здесь волновые векторы k_1, k_2 могут иметь не малые мнимые части. Для симметричного u_1 мнимые части k_1, k_2 равны (по крайней мере для больших n в формуле (2.4)).

Очевидно, что уравнение (2.1) не всегда обладает законом сохранения, а лишь при некоторых ограничениях на его коэффициенты (например, когда u_1, u_2 вещественны и $u_1 = \mathrm{const}$). Можно ожидать, что найденные в [10] и в данной работе неустойчивости связаны с отсутствием инварианта у исходных дифференциальных уравнений.

В рассматриваемом случае неустойчивость развивается следующим образом. Пусть мода k_2 распространяется от точки x_1 к точке x_2. В окрестности x_2 она переходит в моду k_1 и возвращается обратно к x_1. Нетрудно видеть из (2.2), что за один цикл в амплитуде мод появится множитель $[u_1(x_2)/u_1(x_1)]^{1/2}$. Если изменить знак фазовой скорости, получим множитель $[u_1(x_1)/u_1(x_2)]^{1/2}$.

Таким образом, амплитуды мод будут либо нарастать, либо убывать в зависимости от знака фазовой скорости. Энергия возмущений увеличивается за счет неоднородности вследствие отсутствия закона сохранения. Ясно, однако, что отсутствие закона сохранения еще не означает неустойчивости колебаний. Примером может быть случай, когда изменение потока энергии в волне между точками трансформации x_1, x_2 равно нулю. Найденное выше правило квантования было приближенным. В связи с этим представляет интерес отыскание точных финитных решений уравнения четвертого порядка.

Приведем точное правило квантования для уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} + \lambda^2 [(1 - x^2)\, y^{\mathrm{II}} + \beta y] = 0 \tag{2.5}$$

Решая методом Лапласа, получаем для $y(x)$

$$y(x) = \mathrm{const} \int\limits_{C(y)} s^{\nu-2} \Phi(\alpha, \gamma; s^2) \exp\left(i\eta s - \frac{s^2}{2}\right) ds \tag{2.6}$$

$$\eta = x\sqrt{\lambda}, \quad 2\nu = 1 + \sqrt{1 + 4\beta}, \quad \gamma = \nu + {}^1/_2, \quad \alpha = {}^1/_4(2\gamma - \lambda)$$

Здесь $\Phi(\alpha, \gamma; s^2)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [12], а контур $C(y)$ охватывает разрез в секторе $|\arg s| < {}^1/_4\,\pi$. При условии $\alpha = -n$ из формул асимптотического разложения функций параболического цилиндра [13] следует, что в секторе

$$-{}^5/_4\pi < \arg(x\lambda^{1/2}) < {}^1/_4\pi$$

решение $y(x)$ ведет себя, как $x^{1-\nu}$ при $|x| \to \infty$. Здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $y(x)$ финитно на вещественной оси x, если $\mathrm{Re}\,\nu > 1$ и $|\arg\lambda| < {}^1/_2\,\pi$.

Правило квантования имеет вид

$$\lambda = \sqrt{1 + 4\beta} + 2(2n + 1) \tag{2.7}$$

Если ввести

$$k_{1,2} = {}^1/_2\lambda\left(\sqrt{1 + \sigma\lambda^{-1} - x^2} \pm \sqrt{1 - \sigma\lambda^{-1} - x^2}\right) \qquad (\sigma = \sqrt{4\beta - 1})$$

то формула (2.7) следует из (2.4). Таким образом, точное и квазиклассическое правила квантования совпадают.

3. Остановимся на связи инварианта с устойчивостью колебаний связанных осцилляторов. Пусть имеется система линейных связанных осцилляторов, параметры которых медленно меняются со временем. В такой системе при прохождении резонансов $\Omega_l = \Omega_k$ происходит трансформация нормальных колебаний $\Omega_l(t)$, $\Omega_k(t)$. В дальнейшем прохождение через резонанс аналогично [14] будем называть столкновением.

Если столкновения происходят случайным образом, естественно задать вопрос об эволюции нормальных колебаний после большого числа столкновений. С формальной точки зрения эта задача аналогична движению заряженной частицы в случайном внешнем поле или трансформации волн в среде со случайными неоднородностями. Направление эволюции (устойчивость, неустойчивость) зависит от вида инварианта дифференциального уравнения, описывающего систему осцилляторов. Действительно, между столкновениями решение для нормальных колебаний имеет вид

$$\sum_n \frac{A_n}{\Omega_n^{1/2}} \exp\left[i\int^t \Omega_n(\tau)\, d\tau\right]$$

где постоянные A_n меняются скачком в результате столкновения. В таком случае инвариант является квадратичной формой из постоянных A_n

$$\sum_n s_n |A_n|^2 = \mathrm{invar} \qquad (s_n = \pm 1) \tag{3.1}$$

Если сигнатура квадратичной формы (3.1) равна ее рангу, $|A_n|$ ограничен сверху, т. е. движение осцилляторов финитно в фазовом пространстве. В противном случае система может быть неустойчива и вторые моменты кинетического уравнения для координат и импульсов осцилляторов могут экспоненциально нарастать во времени. Строгое доказательство этого утверждения в общем виде затруднительно, однако в приведенных ниже частных примерах оно подтверждается.

Для одного осциллятора в случайном внешнем поле резонансами являются точки $\Omega(t) = 0$. Инвариант имеет вид

$$|A_+|^2 - |A_-|^2 = \mathrm{invar}$$

Таким образом, можно ожидать, что движение будет неустойчиво. Решение в [14] подтверждает этот вывод. В [15] рассматривалась трансформация волн в среде со случайными неоднородностями. Формально ситуация эквивалентна системе двух связанных осцилляторов с резонансами $\Omega_1 = \Omega_2$. Инвариант имел вид

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = \mathrm{invar}$$

Было найдено, что независимо от начальных условий система приближается к равновесию, в котором $|A_1| = |A_2|$ (в согласии со сказанным выше).

Здесь будет рассмотрено одновременное прохождение через резонансы $\Omega_1 = \Omega_2$, $\Omega_1 = -\Omega_2$ двух связанных осцилляторов в случайные моменты времени.

Пусть $X_\pm$, $Y_\pm$ — нормальные колебания с частотами Ω_1, Ω_2. Введем вектор-столбец Z с компонентами $z_{1,2} = X_\pm$, $z_{4,3} = Y_\pm$ и аналогично [14,15] рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dZ}{dt} = \iota KZ + \sum_n Q_n Z\delta(t - t_n) \tag{3.2}$$

где K — диагональная матрица $K_{11} = -K_{22} = \Omega_1$, $K_{44} = -K_{33} = \Omega_2$, а Q_n — некоторые матрицы четвертого порядка.

Решение (3.2) испытывает скачки в моменты времени t_n, причем

$$Z(t_n + 0) = \exp(Q_n) Z(t_n - 0)$$

Таким образом, если матрица $\exp(Q_n)$ совпадает с матрицей перехода между нормальными колебаниями при столкновении, можно рассматривать эквивалентную задачу усреднения решений системы (3.2). При этом t_n имеют случайное распределение. Аналогично [15] выберем решение вещественным $z_2 = \bar{z}_1$, $z_3 = \bar{z}_4$ и перейдем к вещественным переменным $\xi_{1,2} = \operatorname{Re} z_{1,4}$, $\eta_{1,2} = \operatorname{Im} z_{1,4}$. Как обычно [16], получаем кинетическое уравнение для функции распределения $f(t; \xi_1, \eta_1, \eta_2, \xi_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega_1\left(\xi_1\frac{\partial f}{\partial \eta_1} - \eta_1\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right) + \Omega_2\left(\xi_2\frac{\partial f}{\partial \eta_2} - \eta_2\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right) = S(f) \tag{3.3}$$

$$S(f) = -\nu f + \nu\iint w(\sigma, \lambda) f^* d\sigma d\lambda, \quad f^* \equiv f(t; \xi_1^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \xi_2^*)$$

Здесь ν = частота столкновений, распределение которых предполагалось пуассоновским; σ, λ = параметры столкновения со случайным распределением $w(\sigma, \lambda)$; точка фазового пространства $(\xi_1^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \xi_2^*)$ в результате столкновения переходит в точку $(\xi_1, \eta_1, \eta_2, \xi_2)$.

Матрица перехода от $(\xi_1, \eta_1, \eta_2, \xi_2)$ к $(\xi_1^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \xi_2^*)$ приведена в приложении, формула (A.6). Из (3.3) легко получаются уравнения для десяти вторых моментов функции распределения. Для упрощения вычислений рассмотрим случай $\varepsilon_1 \to \infty$, а также $w(\varepsilon_2) = \delta(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_0)$ (см. приложение). При этом осцилляторы проходят только через резонанс $\Omega_1 = \Omega_2$, а инвариант в отличие от [15] имеет вид

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2 - \xi_2^2 = \text{const} \tag{3.4}$$

Из (3.4), согласно сказанному выше, следует ожидать неустойчивости движения осцилляторов. Для отыскания инкремента неустойчивости введем обозначения

$$I = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_2^2, \quad I_1 = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2, \quad I_2 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$$

Тогда из (3.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle I\rangle &= 2\nu\rho^2\langle I\rangle + 4\nu\rho\chi\langle I_1\rangle - 4\nu\rho\gamma\langle I_2\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle I_1\rangle &= -\nu\rho\chi\langle I\rangle - 2\nu\chi^2\langle I_1\rangle + \nu(q + 2\gamma\chi)\langle I_2\rangle \qquad \left(q = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\nu}\right) \\ \frac{d}{dt}\langle I_2\rangle &= -\nu\rho\gamma\langle I\rangle - \nu(q + 2\gamma\chi)\langle I_1\rangle + 2\nu(\gamma^2 - 1)\langle I_2\rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

где ρ, γ, χ даны в приложении. Отметим, что найденная в приложении матрица перехода имеет смысл, если столкновения редкие $|q| \gg 1$. Ищем решение (3.5) в виде

$$\exp\left[\nu\int_0^t \omega(\tau)\,d\tau\right]$$

Для ω из (3.5) получим

$$\omega^3 + 4(1 - \gamma^2)\omega^2 + [q^2 + 4q\gamma\varkappa + 4(\varkappa^2 - \rho^2)]\omega - 2\rho^2 q^2 = 0 \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) всегда имеет положительный корень, который обозначим через ω_1. Для слабых столкновений $2\varepsilon_0 \gg 1$ из (3.6) имеем $\omega_1 \approx 2\exp(-2\varepsilon_0)$. Таким образом, время развития неустойчивости $1/\nu\exp(2\varepsilon_0)$ велико по сравнению со временем между столкновениями.

В другом предельном случае сильных столкновений $2\varepsilon_0 \ll 1$ из (3.6) получим $\omega_1 \approx 2$, т. е. инкремент неустойчивости порядка частоты столкновений.

В заключение отметим, что, хотя в [14] и в данной работе при $\varepsilon_1 \to \infty$ исследовался одинаковый резонанс $\Omega_1 = \Omega_2$, результаты прямо противоположные. В рассмотренном здесь случае неустойчивость, а значит и иной в сравнении с [14] тип инварианта, получилась вследствие разных знаков масс осцилляторов. Действительно, возьмем следующую систему осцилляторов:

$$-\frac{\ddot{x}}{\beta} - (t^2 + \lambda)\frac{x}{\beta} = y, \quad \ddot{y} = x \qquad (\lambda, \beta > 0)$$

Отсюда для осциллятора y следует уравнение (А.1), которое дает матрицу перехода между нормальными колебаниями. Таким образом, данная неустойчивость относится к классу неустойчивостей отрицательной массы.

Приложение. В качестве матрицы перехода между нормальными колебаниями при резонансах $\Omega_1 = \Omega_2$, $\Omega_1 = -\Omega_2$ возьмем матрицу перехода для решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^4y}{dt^4} + (t^2 + \lambda)\frac{d^2y}{dt^2} + \beta y = 0 \tag{A.1}$$

где λ, $\beta > 0$. Приведем окончательный результат. Частоты нормальных колебаний

$$\Omega_{1,2}(t) = \tfrac{1}{2}[(t^2 + \lambda + \sigma)^{1/2} \pm (t^2 + \lambda - \sigma)^{1/2}] \qquad (\sigma = \sqrt{4\beta - 1})$$

При $\lambda > \sigma > 0$ на вещественной оси t будет $\Omega_{1,2} > 0$. Определим нормальные колебания

$$X_{\pm} = \Omega_1^{-1/2} \exp\left(\pm \iota \int^t \Omega_1\, dt\right), \quad Y_{\pm} = \Omega_2^{-1/2} \exp\left(\pm \iota \int^t \Omega_2\, dt\right)$$

Общее решение при $t \to \pm\infty$ можно написать в виде $F_{\pm} Z$, где F вектор-строка из произвольных постоянных. Тогда $F_+ = F_- M$. Матрица перехода M имеет представление

$$M = \iota V \mathrm{H} V e^{-1/2\,\pi\lambda} \tag{A.2}$$

Здесь V — диагональная матрица с элементами

$$V_{11} = \overline{V}_{22} = e^{\iota\alpha_1}, \qquad V_{33} = \overline{V}_{44} = e^{\iota\alpha_2}$$

Для элементов матрицы H имеем

$$\begin{gathered}
\mathrm{H}_{11} = -\mathrm{H}_{22} = (1 + e^{\varepsilon_1})^{1/2} (1 + e^{\varepsilon_2})^{1/2} \operatorname{cth} {}^1/_2\, \pi\sigma \\
\mathrm{H}_{43} = -\mathrm{H}_{34} = 1, \quad \mathrm{H}_{33} = -\mathrm{H}_{44} = (1 + e^{\varepsilon_1})^{1/2} (1 + e^{\varepsilon_2})^{1/2} \\
\mathrm{H}_{21} = -\mathrm{H}_{12} = \operatorname{ch} {}^1/_2\, \pi\sigma + e^{1/2\pi\lambda} \operatorname{csch} {}^1/_2 \pi\sigma \\
\mathrm{H}_{42} = \mathrm{H}_{24} = (1 + e^{\varepsilon_2})^{1/2} (\operatorname{cht} {}^1/_2\, \pi\sigma)^{1/2} \\
\mathrm{H}_{13} = \mathrm{H}_{31} = -\mathrm{H}_{42} \\
\mathrm{H}_{14} = \mathrm{H}_{32} = (1 + e^{\varepsilon_1})^{1/2} (\operatorname{cth} {}^1/_2\, \pi\sigma)^{1/2} \\
\mathrm{H}_{41} = \mathrm{H}_{23} = -\mathrm{H}_{14}, \quad \varepsilon_{1,2} = {}^1/_2 \pi (\lambda \pm \sigma)
\end{gathered} \tag{A.3}$$

Фазы $\alpha_{1 2_2}$ равны

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = \frac{1}{2} \arg \left[\frac{\Gamma({}^1/_2 + \iota\varepsilon_1/2\pi)\, \Gamma({}^1/_2 - \iota\varepsilon_2/2\pi)}{\Gamma(1 + {}^1/_2\, \iota\sigma)\, \Gamma({}^1/_2 (\iota\sigma - 1))}\right] + \frac{\lambda}{8} \ln \frac{\lambda + \sigma}{\lambda - \sigma} - \frac{\sigma}{4} \left[1 + \ln \frac{4}{\sqrt{\lambda^2 - \sigma^2}}\right] \\
\alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arg \left[\frac{\Gamma({}^1/_2 + \iota\varepsilon_1/2\pi)}{\Gamma({}^1/_2 - \iota\varepsilon_2/2\pi)}\right] - \frac{\sigma}{8} \ln \frac{\lambda + \sigma}{\lambda - \sigma} + \frac{\lambda}{4} \left[1 + \ln \frac{4}{\sqrt{\lambda^2 - \sigma^2}}\right]
\end{gathered} \tag{A.4}$$

Отметим, что

$$\varepsilon_{1,2} = \oint \frac{\Omega_1 \pm \Omega_2}{2}\, dt$$

Используя (A.2), (A.3), (A.4), можно показать

$$\det M = 1, \quad \Lambda = M^+ \Lambda M \tag{A.5}$$

где плюс означает операцию транспонирования и комплексного сопряжения, а Λ — диагональная матрица: $\Lambda_{11} = \Lambda_{44} = 1$, $\Lambda_{22} = \Lambda_{33} = -1$. Из (A.5) следует инвариант:

$$|F_1|^2 + |F_4|^2 - |F_2|^2 - |F_3|^2 = \mathrm{invar}$$

Устремим $\varepsilon_1 \to \infty$. Тогда для вектор-столбца R $R_1 = \xi_1$, $R_2 = \eta_1$, $R_3 = \eta_2$, $R_4 = \xi_2$ получим

$$R = \begin{Vmatrix} S & D \\ D & S \end{Vmatrix} R^* \tag{A.6}$$

Для матриц S, D имеем

$$\begin{gathered}
S_{11} = S_{22} = \gamma = (1 + e^{-2\varepsilon_0})^{1/2} \cos\mu, \quad S_{21} = -S_{12} \equiv \chi = (1 + e^{-2\varepsilon_0})^{1/2} \sin\mu \\
D_{22} = -D_{11} \equiv \rho = e^{-\varepsilon_0}, \quad D_{21} = D_{12} = 0 \\
\mu = (\varepsilon_0/\pi) - (\varepsilon_0/\pi) \ln(\varepsilon_0/\pi) - \Gamma({}^1/_2 - \iota\varepsilon_0/\pi)
\end{gathered}$$

Автор благодарит С. С. Моисеева за ценные советы и В. Д. Шапиро за обсуждение.

Поступила 25 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев С. С. Применение асимптотических методов в теории устойчивости и трансформации волн в магнитной гидродинамике. In: Phenomena in ionized gases, vol. 2, Beograd, Gradevinska Knjiga, 1966.
2. Stix T. H. Radiation and absorption via mode conversion in a inhomogeneous collision-free plasma. Phys. Rev. Letters, 1965, vol. 15, No. 23, p. 878.
3. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. Некоторые особенности задач магнитогидродинамической теории устойчивости, приводимых к дифференциальному уравнению с произвольным параметром при старшей производной. ПМТФ, 1966, № 2, стр. 25.
4. Моисеев С. С. Об одной возможности аномальной трансформации волн в плазме. ПМТФ, 1966, № 3, стр. 3.
5. Wong A. Y., Kuckes A. F. Observation of microwave radiation from plasma oscillations at the upper hybrid frequency. Phys. Rev. Letters, 1964, vol. 13, No. 9, pp. 306—308.
6. Wasow W. A study of the solutions of the differential equation $y^{IV} + \lambda^2 (xy^{II} + y) = 0$ for large values of λ. Ann. Mathem., 1950, vol. 52, No. 2, p. 350.
7. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967, стр. 349.
8. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости. ПМТФ, 1964, № 5.
9. Lin C. C., Rabenstein A. L. On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order. I. Trans. American Math. Soc., 1960, vol. 94, No. 1, pp. 24—57.
10. Рухадзе А. А., Саводченко В. С., Тригер С. А. Метод геометрической оптики для дифференциальных уравнений четвертого порядка в приложениях к низкочастотным колебаниям плазмы. ПМТФ, 1965, № 6, стр. 58.
11. Галеев А. А. Теория устойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6, стр. 1920.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965, т. 1, стр. 243.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1966, т. 2, стр. 129.
14. Заславский Г. М. О кинетическом уравнении для осциллятора в случайном внешнем поле. ПМТФ, 1966, № 6, стр. 76.
15. Заславский Г. М., Филоненко Н. Н. Трансформация волн в среде со случайными неоднородностями. ПМТФ, 1967, № 1, стр. 21.
16. Frisch H. L., Lloyd S. P. Electron levels in a one-dimensional random lattice. Phys. Rev., 1960, vol. 120, No. 4, p. 1175.