

мумом при $d_p \sim 5 \cdot 10^{-8}$ м. Сравнение с этим распределением расчетных значений диаметров частиц позволило аналогично [7] найти зависимость от температуры эмпирического параметра β , входящего в соотношение для скорости образования кластеров критического размера ($\beta = -5,75 + 0,005T$) и согласующего в количественном отношении расчет и эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макчесни Дж. Б., О'Коннор П. Б., Пресби Г. М. Новый метод изготовления оптических волокон с плавным изменением показателя преломления и низкими потерями // ТИИЭР.— 1974.— Т. 62, № 9.
2. Идзива Т., Инагаки Н. Материалы и процессы для изготовления заготовок оптического волокна методом парофазного осевого осаждения // ТИИЭР.— 1980.— Т. 68, № 10.
3. Шульц П. К. Изготовление оптических волокон методом внешнего парофазного осаждения // Там же.
4. Кузнецов А. Е., Нехамкина О. А., Стрелец М. Х. Расчет стационарных дозвуковых течений химически неравновесных газовых смесей в каналах переменного сечения при наличии произвольных конечных изменений плотности // ТВТ.— 1984.— Т. 22, № 6.
5. Хоружников С. Э. Математическая модель MCVD-метода // Энергоперенос в конвективных потоках.— Минск: ИТМО АН БССР, 1985.
6. Стасенко А. Л. Модели дисперсных сред // Модели механики сплошных сред.— Новосибирск, 1983.
7. Горбунов В. Н., Пирумов У. Г., Рыжов Ю. А. Неравновесная конденсация в высокоскоростных потоках газа.— М.: Машиностроение, 1984.
8. Чирихин А. В. Численное исследование неравновесной гетерогенно-гомогенной конденсации в сверхзвуковых соплах // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1977.— № 12.
9. Колпащиков В. Л., Кривошеев Ю. К., Шнип А. И. Математическая модель технологического процесса формирования заготовок для оптического волокна.— Минск, 1983.— (Препр./ИТМО АН БССР; № 9).
10. Walker K. L., Homsy G. M., Geyling F. T. Thermophoretic deposition of small particles in laminar tube flow // J. Colloid Interface Sci.— 1979.— V. 69, N 1.
11. Walker K. L., Geyling F. T., Nagel S. R. Thermophoretic deposition of small particles in the modified chemical vapour deposition (MCVD) process // J. Amer. Ceram. Soc.— 1980.— V. 63, N 9—10.
12. French W. J., Pace L. J., Foermayer V. A. Chemical kinetics of the reaction of SiCl_4 , SiBr_4 , GeCl_4 , POCl_3 and BCl_3 with oxygen // J. Phys. Chem.— 1978.— V. 82, N 20.
13. Жмакин А. И., Макаров Ю. Н. Численное моделирование интенсивного теплового выделения в медленном потоке вязкого газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 6.
14. Головизнин В. П., Жмакин А. И., Фурсенко А. А. Об одном численном методе исследования разрывных течений релаксирующих смесей // ДАН СССР.— 1982.— Т. 264, № 6.

Поступила 23/XI 1987 г.

УДК 532.542 : 536.73

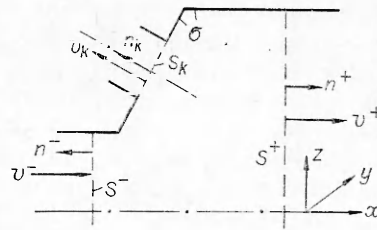
О СВЯЗИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ЗОНАХ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПОТОК

Ю. А. Дубравин

(Пермь)

Законы сохранения гидродинамики в интегральной форме в общем случае внутренних течений при характерных для квазиподномерных приближений допущениях приводят к незамкнутой системе уравнений. В различных приложениях решение этих уравнений традиционно осуществляется с привлечением дополнительных и часто противоречивых гипотез [1—4] или экспериментальных данных [5]. В [2, 6], где рассматривается течение идеального газа в каналах с уступами, отмечается взаимосвязь давления на уступе канала и скачка энтропии. Здесь для замыкания уравнений гидродинамики предлагается гипотеза о независимости термодинамической функции — коэффициента восстановления давления σ_p от скачка сечения канала. Подобная зависимость может проявляться лишь неявно при учете диссипативных эффектов, возникающих в зонах смещения при различного рода локальных воздействиях на поток. Названная гипотеза — следствие качественного анализа первого и второго начал термодинамики и в свою очередь позволяет построить дополнительное уравнение, замыкающее систему уравнений гидродинамики.

1. Законы сохранения гидродинамики записываются для фиксированного объема V части канала, в пределах которого осуществляется воздействие на жидкость и устанавливаются новые гидродинамические параметры потока (рис. 1). Квазиодномерная трактовка течения в канале и в боковых патрубках и типичные для таких задач допущения [7, 8] приводят к системе уравнений для осредненных параметров



Р и с. 1

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & (S\rho v)^+ = (S\rho v)^- - \sum_{k=1}^m (\varepsilon S\rho v_n)_k, \quad (\alpha S\rho v v + Snp)^+ - \\
 & - (\alpha S\rho v v - Snp)^- + p_\sigma \int_{\sigma + \Sigma S_k^-} n dS - \int_{\sigma_T} \tau_n^* dS - \int_{S^- + S^+} P_n dS + \\
 & + \sum_{k=1}^m \left\{ (\alpha S\rho v_n^2)_k \int_{(\varepsilon S)_k} n dS + p_k \int_{S_k} n dS - p_\sigma \int_{S_k^-} n dS - \int_{\sigma_{Tk}} \tau_n^* dS - \int_{S_k} P_n dS \right\} = 0, \\
 & (S\rho v H)^+ - (S\rho v H)^- + \int_{\sigma_T} q_n^* dS + \int_{S^- + S^+} Q_n dS + \\
 & + \sum_{k=1}^m \left\{ (\varepsilon S\rho v_n H)_k + \int_{\sigma_{Tk}} q_n^* dS + \int_{S_k} Q_n dS \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь p, ρ, v — давление, плотность и скорость; $H = \beta v^2/2 + \gamma p/(\gamma - 1)\rho$; α, β учитывают неоднородность исходного поля скорости; ε — коэффициент поджатия потока; \mathbf{n} — вектор нормали; $\tau_n^* = \tau_n + \mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_n = -\rho \langle v'_n v' \rangle$, $\mathbf{q}^* = \mathbf{q} + \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} = \rho \langle v' v'^2 \rangle/2$, τ_n, \mathbf{q} — векторы напряжения сил трения и теплового потока; \mathbf{P}_n, \mathbf{Q} — то же за счет турбулентных пульсаций; индексы $-$ и $+$ присваиваются параметрам состояния в начальном S^- и выходном S^+ сечениях канала, k — в сечении k -го бокового патрубка, σ — параметрам на боковой поверхности канала. Уравнения (1.1) записаны в предположении, что оси патрубков принадлежат плоскостям симметрии канала и ортогональны его боковой поверхности. Для сил трения и тепловых потоков на поверхности канала σ и патрубков σ_k выполняются

соотношения типа $\int_{\sigma + \Sigma \sigma_k} \tau_n dS = \int_{\sigma_T} \tau_n dS + \sum_{k=1}^m \int_{\sigma_{Tk}} \tau_n dS$ (σ_T — поверхность трубки тока потока газа из сечения S^- в S^+ , σ_{Tk} — то же для потока, пересекающего сечение S_k). В уравнении энергии опущены некоторые виды работ, совершаемых в объеме V , например, турбулентными напряжениями. В излагаемом здесь решении последние важны лишь как физический фактор наличия турбулентных пульсаций, уже упомянутых в уравнении энергии. Уравнения (1.1) дополняются уравнением состояния $p = \rho RT$ (T — температура).

С учетом $\int_{\sigma + \Sigma S_k^-} n dS = -(S^+ - S^-) \mathbf{i}$, $\int_{S_k} n dS = \int_{S_k^-} n dS = S_k (n_{kx} \mathbf{i} + n_{kr} \times \times (r_{ky} \mathbf{j} + r_{kz} \mathbf{k}))$ (\mathbf{n}_k — единичный вектор на оси k -го патрубка, \mathbf{r}_k — единичный вектор, принадлежащий плоскости $(\mathbf{n}_k, \mathbf{i})$ и ортогональный оси канала) проекции уравнения движения (1.1) на поперечные координаты (см. рис. 1) приводят к

$$(1.2) \quad p_k + (\varepsilon \rho v_n^2)_k (\alpha_k + \Delta_{\tau k}/n_{kr}) = p_\sigma \quad (k = 1, m),$$

$$\text{где } \Delta_{\tau k} = - \left(\int_{\sigma_{Tk}^k} \tau_{nr}^* dS + \int_{\sigma_{Tk}} \tau_{nr} dS + \int_{(S^- + S^+)_k + S_k} P_{nr} dS \right) / (\varepsilon S \rho v_n^2)_k$$

где $\tau(M) = (1 + (\gamma - 1)M^2/2)^{-1}$; s — энтропия; D — диссипативная функция; κ — коэффициент теплопроводности; P — тензор турбулентных напряжений; p_0 — давление торможения; «начальные» состояния среды, определяемые параметрами ρ_H, ρ_H , в сечениях S^- и S^+ предполагаются одинаковыми. Согласно (3.1), (3.2), давление торможения в зоне перестройки течения может изменяться за счет: подвода тепла и массы (с тем или иным знаком); диссипативных процессов, обусловленных свойством вязкости среды (первые два члена в интеграле по объему в (3.1)); неоднородности полей турбулентных напряжений и потока тепла. Все перечисленные причины изменения механической энергии потока, характеризующей коэффициентом восстановления давления σ_p , ранее были представлены безразмерными параметрами — воздействиями $\Delta_{Gk}, \Delta_Q, \Delta_{Qk}, \Delta_\tau, \Delta_{\tau k}$. Таким образом, первое и второе начала термодинамики с учетом обозначений (2.4) приводят к выводу о существовании термодинамической функции

$$(3.3) \quad \sigma_p^{(1)} = f_1(X),$$

что и послужило основанием для формулировки гипотезы, изложенной выше. В общем случае функция $f_1(X)$ неизвестна и не дает никакой количественной информации.

С другой стороны, соотношения (2.2), следующие из трех законов сохранения гидродинамики, тоже позволяют построить отношение p_0^+/p_0^- как известную функцию воздействий и весового коэффициента среднего давления Φ_p :

$$(3.4) \quad \sigma_p^{(2)} = \frac{\pi(M^-)}{I(n+1)} (K \mp \nu n N) \left(1 - \frac{n-1}{2} \frac{K \pm \nu N}{K \mp \nu n N} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

($\pi(M) = (\tau(M))^{\gamma/(\gamma-1)}$), откуда

$$(3.5) \quad \sigma_p^{(2)} = f_2(X, \Delta_S, \Phi_p(X, \Delta_S)).$$

Зависимость $\sigma_p^{(2)}$ от перечисленных в (2.5) аргументов неоднозначна, как и соотношений (2.2) или (2.5), из которых она получена за счет неопределенности функции $\Phi_p(X, \Delta_S)$.

В соотношениях (3.3), (3.5) воздействия X (2.4) и Δ_S могут рассматриваться как независимые переменные. Но в отличие от прочих воздействия Δ_τ и $\Delta_{\tau k}$ можно представить в виде функции от других воздействий и некоторых переменных параметров λ_i (например, $\Delta_\tau(\Delta_S, \Delta_Q, \Delta_{Qk}, \Delta_{S^k}, M^-, \lambda_i)$). Это объясняется, с одной стороны, тем, что любые воздействия, изменяющие исходное состояние потока, сопровождаются диссипативными эффектами и меняют Δ_τ . Вместе с тем даже при фиксированных воздействиях $\Delta_S, \Delta_Q, \dots, M^-$ значение Δ_τ может варьироваться в широких пределах за счет λ_i (различная форма уступов канала, наличие камер, сеток поперек канала, различная степень шероховатости боковых стенок или начальной интенсивности турбулентности и т. п.), что и оправдывает исходную посылку. Аналогичные рассуждения справедливы и для $\Delta_{\tau k}$, а с некоторыми поправками и для Δ_Q, Δ_{Qk} .

В выражениях (3.2), (3.4) определена одна и та же термодинамическая функция, что позволяет записать для $\sigma_p^{(1)}$ и $\sigma_p^{(2)}$ условие

$$(3.6) \quad \sigma_p^{(1)} = \sigma_p^{(2)} \text{ или } d\sigma_p^{(1)} - d\sigma_p^{(2)} = 0,$$

которое вместе с соотношениями (2.4), (3.3), (3.5) дает

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_i} \right) \right] dx_i + \left[- \left(\frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S} + \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Delta_S} \right) \right] d\Delta_S = 0.$$

Вследствие независимости переменных x_i и Δ_S отсюда вытекает

$$(3.7) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S} + \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Delta_S} = 0.$$

Здесь гидравлические потери отнесены к скорости v^- . В качестве иллюстрации рассмотрим известную задачу Борда о течении жидкости в канале с внезапным расширением площади сечения ($\Delta_S > 0$, $\Delta_{Gk} = 0$, $\Delta_\tau \neq 0$), для которой опытные данные по гидравлическим потерям удовлетворительно описываются выражением $\xi = \Delta_S^2$ [12] и вместе с (4.2) приводят к соотношениям

$$(4.4) \quad \Delta_\tau = \Delta_S^2/2, \quad \varphi_p = 1/2, \quad v^+/v^- = 1 - \Delta_S, \\ p^+/p^- = 1 + \Delta_S(1 - \Delta_S)/Eu^-, \quad p_\sigma/p^- = 1 + \Delta_S(1 - \Delta_S)/2Eu^-.$$

Полученный здесь результат по отношению к $\varphi_p = 1/2$ ($p_\sigma = (p^+ + p^-)/2$) не согласуется с распространенной в гидравлике гипотезой $p_\sigma = p^-$ ($\varphi_p = 0$) [13] и требует экспериментальной проверки (см. п. 6).

Если для течений в каналах без расходных воздействий характерно $p_\sigma \in [p^-, p^+]$ и $0 \leq \varphi_p \leq 1$ (4.3), (4.4), то в задачах с расходными воздействиями значения p_σ и φ_p выходят за рамки этих интервалов. В частности, при взаимной компенсации различных воздействий, когда $p^+ = p^-$, функция $\varphi_p = (p_\sigma - p^-)/(p^+ - p^-)$ испытывает разрыв второго рода, в окрестности которого меняется соотношение между давлениями p_σ , p^- и p^+ . Комбинация воздействий, при которой имеют место эти эффекты, может быть найдена из условия $c_1\Delta_S(2 - \Delta_S) + 2\delta = 0$, следующего из (4.2) при $p^+ = p^-$.

5. Для сжимаемой жидкости уравнение (3.8) решается только численно. Но значение φ_p в точке $\Delta_S = 0$ неизвестно, что затрудняет формулировку задачи Коши для этой функции. В этих условиях удобно переформулировать (3.8) для n , связанной с φ_p соотношением (2.1) и принимающей значение $n = \gamma$ в точке $\Delta_S = 0$. В результате

$$(5.1) \quad a(dn/d\Delta_S) = -b, \quad \Delta_S = 0, \quad n = \gamma, \\ a = [(n - \gamma)(K \mp vnN) \pm v(n^2 - 1)N] [(\gamma - 1)(1 - \Delta_S)(K + vnN) - \\ - (n^2 - 1)], \\ b = \frac{n(n^2 - 1)}{1 - \Delta_S} \{ \pm v(\gamma - 1)^2(1 - \Delta_S)N(K + vnN) - \\ - (n - 1)[(n - \gamma)(K \mp vnN) \pm v(n^2 - 1)N] \}.$$

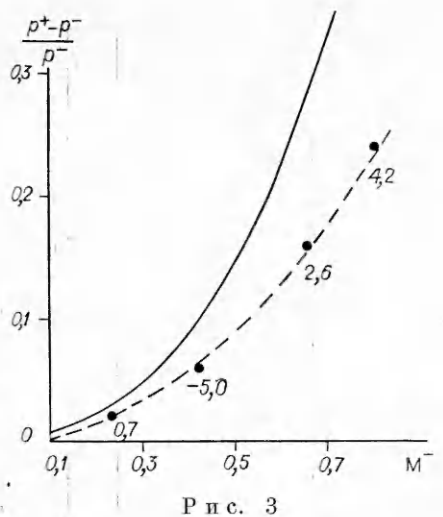
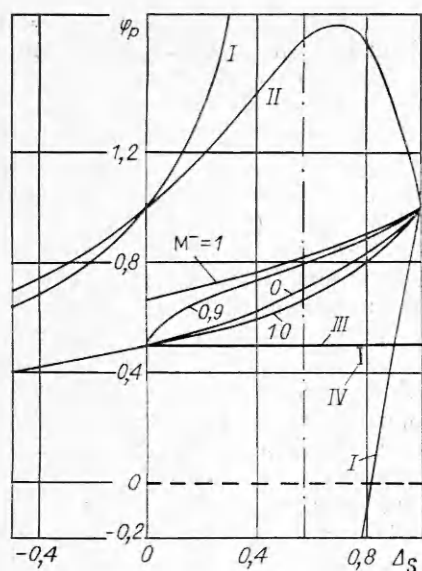
Нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) в точке $\Delta_S = 0$ имеет особенность типа $(dn/d\Delta_S)_{\Delta_S=0} = 0/0$. Устранение ее связано с необходимостью разложения в ряды коэффициентов a и b в (5.1) по степеням малых величин $\delta\Delta_S$, δn в окрестности точки $\Delta_S = 0$, $n = \gamma$, а для трансзвуковых течений — дополнительно по степеням $\delta M^- = 1 - M^-$. Сохраняя линейные члены разложения, приходим к ряду частных случаев:

$$(5.2) \quad \frac{dn}{d\Delta_S} = \begin{cases} -\gamma(\gamma - 1): |\Delta_S| \leq \varepsilon_\Delta, \quad \Psi \neq 0, \\ -\gamma(\gamma - 1)/2: |\Delta_S| \leq \varepsilon_\Delta, \quad \Psi = 0, \quad |M^- - 1| > \varepsilon_M, \\ -2\gamma(\gamma - 1)/3: 0 \leq \Delta_S \leq \varepsilon_\Delta, \quad \Psi = 0, \quad |M^- - 1| \leq \varepsilon_M, \end{cases}$$

где $\Psi = K_0 + \gamma N_0 - (\gamma - 1)$; $K_0 = 1 + \gamma M^{-2}(1 - \Delta_\tau^*)$; $N_0 = [K_0^2 - 2(\gamma + 1)M^{-2}(c_0 + (\alpha^-)^2(\gamma - 1)M^{-2}/2)]^{1/2}$; функция Ψ отлична от нуля, если отношение давлений p^+/p^- в точке $\Delta_S = 0$ отлично от единицы за счет каких-либо воздействий, в противном случае $\Psi = 0$; ε_Δ и ε_M — малые окрестности особых точек.

Интегрирование (5.2) в окрестности $\Delta_S = 0$, (5.1) вне этой окрестности и использование (2.1) дают

$$(5.3) \quad \varphi_p = \{1/(1 - (\gamma - 1)\Delta_S), \quad 1/(2 - (\gamma - 1)\Delta_S), \quad 2/(3 - 2(\gamma - 1)\Delta_S), \\ (\gamma - n)/(\gamma - 1)n\Delta_S\}.$$



Р и с. 2

Р и с. 3

Здесь первые три значения соответствуют (5.2), а последнее — уравнению (5.1), в котором начальные условия корректируются с учетом решения для n в окрестности $\Delta_S = 0$. Для функции n , как и для φ_p , возможно появление особых точек второго рода, не совпадающих друг с другом. Последнее очевидно из соотношения (2.1), где обращение в нуль знаменателя дает конечные значения для функции φ_p при $\Delta_S \neq 0$. Отсюда вытекает способ преодоления особых точек при численном решении, заключающийся в переходе от интегрирования уравнения для n к уравнению для φ_p с помощью (2.1).

Результаты расчета φ_p для адиабатических течений идеальной сжимаемой жидкости ($\Delta_\tau = \Delta_{\tau k} = \Delta_{Gk} = \Delta_Q = \Delta_{Qk} = 0$) в каналах с уступами приведены на рис. 2, где кривая с $M^- = 0$ отвечает формуле (4.3). Как и следовало ожидать, значения φ_p при этих условиях обеспечивают отношения гидродинамических параметров, отвечающих изоэнтропическому течению газа на скачке площади сечения: $p^+/p^- = \pi(M^+)/\pi(M^-)$ и т. п. Эквивалентность изоэнтропических течений в каналах с уступом и с непрерывным изменением площади сечения использовалась в [14] путем замены уравнения движения (1.4) с неизвестным давлением на уступе адиабатой Пуассона. Кривые I и II для $\Delta_G = 0,3$ и $0,6$ соответствуют формуле (4.2), а III — формуле (4.4), при этом $\Delta_\tau = 0$ и подвод массы осуществляется по нормали к оси канала; штриховая линия — гипотеза Зорда $\varphi_p = 0$.

6. Для экспериментальной проверки некоторых полученных выше результатов ограничимся дозвуковыми и несжимаемыми течениями газа в канале с внезапным расширением. Для адекватного описания таких течений необходим учет диссипативных эффектов в зонах смешения [1]. Последние в обоих случаях могут быть описаны с удовлетворительной точностью в рамках модели несжимаемой жидкости [15], где $\Delta_\tau = \Delta_S^2/2$ (4.4). Сравнение расчетных (5.1), (2.2) значений давлений в широкой части канала с экспериментальными [16] для дозвуковых течений воздуха в канале с $\Delta_S = 0,498$ приведено на рис. 3 (штриховая линия и точки соответственно), где цифры у кривой — относительная погрешность опытных и расчетных данных, сплошная кривая — модель идеальной жидкости. Для несжимаемой жидкости опытной проверке был подвергнут результат $\varphi_p = 1/2$ в (4.4). Экспериментальная установка практически воспроизводила условия опыта [16]: распределение давлений определялось путем регистрирования поверхности уступа и широкой части канала. При этом $\Delta_S = 0,77$, $M^- \leq 0,1$, $\gamma = 1,4$; регистрирующая и измерительная аппара-

*

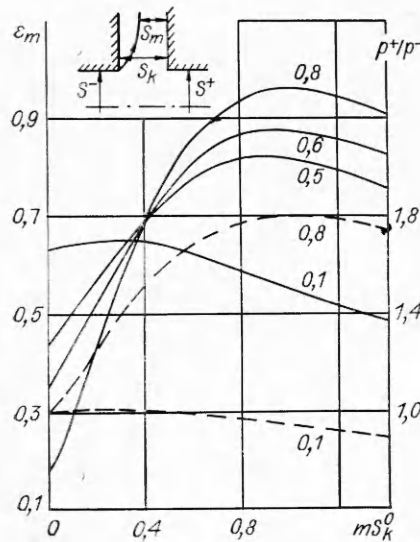


Рис. 4

для жидкости между сечениями S_k и S_m (схема на рис. 4) и приводят к соотношениям

$$(7.1) \quad (\epsilon \rho v^2)_m + p_m = p_\sigma, \quad p_\sigma/p^- = 1 + \Phi_p [(K + nN)/I(n+1) - 1], \\ p_m/p_0^- = \tau_m^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho_m/\rho_0^- = \tau_m^{1/(\gamma-1)}, \quad \tau_m = \tau(M_m), \quad p_\sigma = p_m$$

($\epsilon_m = S_m/S_k$ — коэффициент сужения струи в боковом патрубке). Из определения Δ_G в (1.3) и ϵ_m может быть получена связь

$$(7.2) \quad \Delta_G = m\Delta_{Gk} = -mS_k^0 \mu \epsilon_m, \quad \mu = (M_m/M^-) (\tau_m/\tau^-)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$$

($S_k^0 = S_k/S^-$). Задача по нахождению расходов Δ_G или коэффициентов ϵ_m , сформулированная выше на основе законов сохранения гидродинамики приводит к незамкнутой системе уравнений за счет неопределенной функции $\Phi_p(\Delta_S, \Delta_{Gk})$. Привлечение дополнительно уравнений (5.1)—(5.3) замыкает систему (7.1), (7.2).

Для частного случая $\Delta_S = 0$ (канал постоянного сечения), когда $n = \gamma$, $I = 1$, $\Phi_p = 1$, $p_\sigma = p^+$, задача сводится к решению системы нелинейных уравнений, приводящих к квадратному уравнению для Δ , или ϵ_m . Решение его дает

$$(7.3) \quad \Delta_G = m\Delta_{Gk} = mS_k^0 (A/B - \sqrt{(A/B)^2 + C/B}), \\ A = \gamma(\gamma+1) \{M^- M_m (\tau_m/\tau^-)^{1/2} [(\gamma+1) \pi_m/\pi^- - K_0] - 2\gamma m S_k^0 M^{-2} (\tau^-)^{-1}\}, \\ B = \gamma^2 (\gamma+1) M^{-2} \{(\gamma+1) M_m^{-2} \tau_m/\tau^- + 2(mS_k^0)^2 (\tau^-)^{-1}\}, \\ C = \gamma^2 K_0^2 - [(\gamma+1) \pi_m/\pi^- - K_0]^2 - 2\gamma^2 (\gamma+1) M^{-2} (\tau^-)^{-1}, \quad K_0 = 1 + \gamma M^{-2}.$$

На рис. 4 представлены результаты расчета коэффициента сужения струи ϵ_m при критическом истечении газа ($M_m = 1$, $\gamma = 1,25$) через боковые отверстия mS_k^0 при различных начальных значениях M^- (цифры сплошных линий). При истечении через малые боковые отверстия ($mS_k^0 \ll 1$) коэффициенты ϵ_m и расход $|\Delta_G|$ (7.2) падают с ростом начальной скорости (M^-). Однако с увеличением размеров отверстий увеличиваются $|\Delta_G|$ и ϵ_m , причем в большей степени для газа с большими M^- . Последнее объясняется ростом разности $p_\sigma - p_m$ (7.1) за счет увеличения p_σ при отводе массы из дозвукового потока. Коэффициент ϵ_m достигает максимального значения при отводе всего потока через боковые отверстия, когда $\Delta_G = -1$, $v^+/v^- = 0$ и $\max(p^+/p^-)$ (на рис. 4 графики p^+/p^- — штриховые линии). Дальнейший рост боковых отверстий влечет за собой появлени

тура обеспечивала погрешность измерений, не превышающую 0,1 Па. Опытное значение $\Phi_p = (p_\sigma - p^-)/(p^+ - p^-) = 0,470(1 \pm 0,049)$ (линия IV на рис. 2) с доверительной вероятностью, большей 0,95, и с удовлетворительной погрешностью подтвердило значение $\Phi_p = 1/2$ ($p_\sigma = (p^+ + p^-)/2$).

7. В качестве иллюстрации новых возможностей решений (2.2), (5.1) рассмотрим задачу об адиабатическом истечении дозвукового потока идеальной жидкости из канала через боковые патрубки, ортогональные боковой поверхности канала. В каждом патрубке поток отрывается от стенок и в некотором минимальном сечении трубки тока S_m и на свободной поверхности струи устанавливается давление, равное давлению в окружающей среде p_σ . Уравнения гидродинамики (1.2) и (2.2) для p_σ дополняются законами сохранения

обратного течения в сечении S^+ ($v^+ < 0$) и падение p_c , что уменьшает ϵ_m , причем $\epsilon_m \rightarrow 0$ при $mS_k^0 \rightarrow \infty$. Область применения решения (7.3) ограничена условиями $M^- < 1$, $M^+ < 1$.

Таким образом, для задач гидродинамики внутренних течений с локальными воздействиями на поток сформулированная здесь гипотеза относительно термодинамической функции σ_p обладает большей универсальностью, нежели прежние. Следствие этой гипотезы — дополнительное уравнение (3.8) — расширило область приложения уравнений гидродинамики в интегральной форме для определения интегральных характеристик потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я., Куканова Н. И. Исследование течений со срывными зонами // Обзоры. Переводы. Рефераты.— БНИ ЦАГИ.— 1965.— № 129.
2. Гинзбург И. П. Прикладная гидрогазодинамика.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1958.
3. Соркин Р. Е. Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе.— М.: Наука, 1983.
4. Орлов Б. В., Мазинг Г. Ю. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе.— М.: Машиностроение, 1979.
5. Дулов В. Г. Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия.— 1958.— № 19.
6. Яушев И. К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1967.— № 8, вып. 2.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 2.
8. Мамаев В. А., Одишария Г. Э., Семенов Н. И., Точилин А. А. Гидродинамика газожидкостных смесей в трубах.— М.: Недра, 1969.
9. Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Бунимович А. И., Зверев Н. И. Газовая динамика.— М.: Высш. шк., 1965.
10. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях.— М.: Наука, 1984.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 1.
12. Справочник по гидравлическим расчетам/Под ред. И. Г. Киселева.— М.: Энергия, 1972.
13. Чугаев Р. Р. Гидравлика.— Л.: Энергоиздат, 1982.
14. Честер У. Распространение ударных волн в каналах переменного сечения // Проблемы механики.— 1963.— Вып. 4.
15. Ульянов И. Е., Крумина Н. Н., Вакар Н. В. Проектирование воздухопроводов самолетных силовых установок.— М.: Машиностроение, 1979.
16. Коровин Е. П. Исследование удара газа при внезапном расширении.— Тр. СибНИА, 1954.

Поступила 26/1 1987 г.,
в окончательном варианте — 29/IX 1987 г.

УДК 517.947 + 519.3 + 538.632

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ТЕНЗОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. В. Денисенко
(Красноярск)

В [1, 2] под названием «вариационные» рассмотрены два совершенно различных метода. В первом случае это аналоги принципа Дирихле для уравнения Лапласа, устанавливающие эквивалентность решения краевой задачи и минимизации функционала энергии, иначе их называют энергетическими, во втором — аналоги принципа Липшеца, устанавливающие зависимость качественных характеристик решения от изменений формы области. Принципиально различаются и способы доказательства принципов, однако наиболее просто и полно вариационные принципы обоих типов получаются для решений уравнения Лапласа. Принципы обобщаются на эллиптические системы уравнений с переменными тензорными коэффициентами, которые обязательно должны быть симметричными и положительно определенными. В физических терминах это означает исключение из рассмотрения гиротропных сред, например проводников с холловской проводимостью (плазма или полупроводник в магнитном поле). Эти же среды традиционно исключаются и из формулировки принципов термодинамики [3].

Автором предложена симметричная формулировка задач для гиротропных сред, которая позволила установить энергетические принципы для основных и смешанных, двумерных и трехмерных краевых задач [4—7].