

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Чэнь Чжун-сян (Москва)

Одномерное движение двухфазной жидкости с произвольными массовыми силами в однородной пористой среде было исследовано И. А. Чарным. В настоящей работе эта задача рассматривается для более общего случая, когда пористая среда является неоднородной по направлению фильтрации.

1. Одномерная фильтрация двух несмешивающихся жидкостей обычно описывается обобщенным законом Дарси (капиллярное давление не учитывается)

$$Q_1 = - \frac{k_1(\sigma) k(x) s(x)}{\mu_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_1 X \right) \quad Q_2 = - \frac{k_2(\sigma) k(x) s(x)}{\mu_2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_2 X \right) \quad (1.1)$$

Здесь $Q_1, Q_2, \mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$ — соответственно расходы, вязкости и плотности первой и второй фаз; x — координата в направлении движения; $k(x), s(x)$ — проницаемость и поперечное сечение пористой среды, они предполагаются известными функциями от x ; p — давление; $k_1(\sigma), k_2(\sigma)$ — относительные фазовые проницаемости, которые предполагаются известными функциями насыщенности σ порового пространства первой фазой; X — проекция ускорения существующих массовых сил на направление движения x . В общем случае X может зависеть от x и времени t .

Предполагая жидкости несжимаемыми, имеем уравнения неразрывности

$$- \frac{\partial Q_1}{\partial x} = m(x) s(x) \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad - \frac{\partial Q_2}{\partial x} = m(x) s(x) \frac{\partial (1 - \sigma)}{\partial t} \quad (1.2)$$

Здесь $m(x)$ — пористость среды предполагается известной функцией. Из (1.2) следует

$$\frac{\partial (Q_1 + Q_2)}{\partial x} = 0, \quad \text{или} \quad Q_1 + Q_2 = Q(t) \quad (1.3)$$

Здесь $Q(t)$ — суммарный расход, зависящий только от времени t . Исключая $\partial p / \partial x$ и Q_2 из уравнений (1.1), (1.3), получим

$$Q_1 = Q(t) f_1(\sigma) - v(x, t) k(x) s(x) f_2(\sigma) \quad (1.4)$$

Здесь

$$f_1(\sigma) = \frac{\mu_0 k_1(\sigma)}{\mu_0 k_1(\sigma) + k_2(\sigma)}, \quad f_2(\sigma) = \frac{k_1(\sigma) k_2(\sigma)}{\mu_0 k_1(\sigma) + k_2(\sigma)}, \quad v(x, t) = \frac{(\rho_2 - \rho_1) X}{\mu_1}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Подстановка $\partial Q_1 / \partial x$ из (1.4) в уравнение (1.2) приводит к квазилинейному не однородному уравнению первого порядка с частными производными

$$\begin{aligned} & [Q(t) f_1'(\sigma) - v(x, t) k(x) s(x) f_2'(\sigma)] \frac{\partial \sigma}{\partial x} + m(x) s(x) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \\ & = [v_x'(x, t) k(x) s(x) + v(x, t) k'(x) s(x) + v(x, t) k(x) s'(x)] f_2(\sigma) \end{aligned} \quad (1.5)$$

(Функция $k(x)$ предполагается непрерывной функцией, в случае, когда в пласте в некоторых сечениях проницаемость изменяется скачкообразно, то решение следует проводить отдельно по каждому участку, где функция $k(x)$ непрерывна, и принимать величины на концевом сечении предыдущего участка за величины на начальном сечении следующего участка.)

Уравнение (1.5) нужно решить, используя начальное условие

$$\sigma = \sigma(x) = \sigma_0(x_0) \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad (1.6)$$

Напишем систему уравнений характеристик для уравнения (1.5)

$$\frac{dx}{L(x, t, \sigma)} = \frac{dt}{M(x)} = \frac{d\sigma}{N(x, t, \sigma)} \quad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L(x, t, \sigma) &= Q(t) f_1'(\sigma) - v(x, t) k(x) s(x) f_2'(\sigma) \\ M(x) &= m(x) s(x) \end{aligned} \quad (1.8)$$

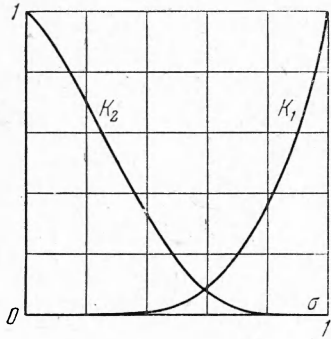
$$N(x, t, \sigma) = [v_x'(x, t) k(x) s(x) + v(x, t) k'(x) s(x) + v(x, t) k(x) s'(x)] f_2(\sigma)$$

Как известно^[1] решение уравнения (1.5) при начальном условии (1.6) представляет собой некоторую поверхность $\sigma = \sigma(x, t)$, которая образуется из совокупности линий характеристик, проходящих через каждую точку заданной кривой (1.6).

Можно построить численным методом линии характеристик, а следовательно, и искомую поверхность из системы уравнений (1.7) через каждую точку кривой (1.6).

Типичные кривые $k_1(\sigma), k_2(\sigma), f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ показаны на фиг. 1, 2, 3 (данные взяты из рассматриваемого ниже численного примера).

В некоторых областях плоскости xt функция σ может иметь несколько корней. Многозначность σ от x при фиксированном t физически невозможна и ее можно устранить введением скачка насыщенности, как это обычно делается в механике сплошных сред. Местоположение скачка насыщенности для каждого времени можно определить, приравнявая количество вытесняющей фазы, вошедшей в пласт до этого момента, приращению содержания данной фазы в пласте за это же время. Таким образом, в пространстве образуется некоторая перпендикулярная к плоскости xt цилиндрическая поверхность скачков насыщенности. При некоторых условиях таких поверхностей может образоваться не одна, а несколько [2]. Рассмотрим частные случаи.



Фиг. 1

2. Пусть $v(x, t) = v(x)$. В этом случае систему уравнений (1.7) можно решить методом, который для решения данной задачи в случае однородной пористой среды предложил И. А. Чарный.

Составим из (1.7) выражения для $dt/d\sigma$ и $dx/d\sigma$; при этом введем новую функцию

$$\omega = \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{f_2(\sigma)} \quad (2.1)$$

Здесь σ_1 — некоторое фиксированное значение насыщенности, не приводящее к $f_2(\sigma) = 0$. В результате получим

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{M(x)}{R(x)} = F(x), \quad \frac{dx}{d\omega} = \frac{L(x, t, \sigma)}{R(x)} \quad \left(R(x) = \frac{N(x, \sigma)}{f_2(\sigma)} \right) \quad (2.2)$$

Здесь $L(x, t, \sigma)$, $M(x)$, $N(x, \sigma)$ берутся согласно (1.8). Из первого уравнения (2.2) имеем

$$x = x(\tau) \quad \left(\tau = \frac{dt}{d\omega} \right) \quad (2.3)$$

Согласно (2.1) и (2.3)

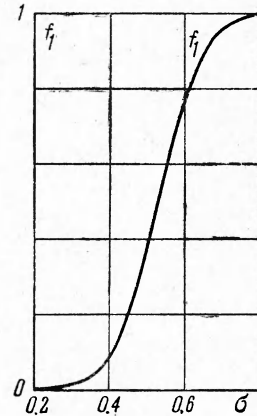
$$\sigma = \sigma(\omega), \quad \frac{dx}{d\omega} = x'(\tau) \frac{d\tau}{d\omega}$$

Следовательно, второе уравнение (2.2) можно представить в виде

$$\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{L(x, t, \sigma)}{R(x) x'(\tau)} = \Psi(\omega, t, \tau) \quad (2.4)$$

Согласно (1.6), (2.1) и первому уравнению (2.2) имеется следующее начальное условие для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (2.4)

$$\sigma = \omega_0 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \frac{d\sigma}{f_2(\sigma)}, \quad t = t_0, \quad \tau = \tau_0 = F(x_0) \quad (2.5)$$



Фиг. 2

Интегрируя уравнение (2.4) при начальном условии (2.5), найдем первый частный интеграл системы уравнений (2.2)

$$t = t(\omega) = t[\omega(\sigma)] \quad (2.6)$$

Подставляя $\tau = dt/d\omega$ из (2.6) в (2.3), получим и другой частный интеграл $x = x(t)$.

3. Рассмотрим случай $v(x, t) = v(x)$, $Q(t) = Q = \text{const}$. Составим из (1.7) выражения

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{L(x, \sigma)}{N(x, \sigma)}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{M(x)}{L(x, \sigma)} \quad (3.1)$$

Первое из этих уравнений (3.1) есть обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} + \frac{f_2'(\sigma)}{f_2(\sigma)} \lambda = \frac{Q f_1'(\sigma)}{f_2(\sigma)} \quad (\lambda = \lambda(x) = v(x) k(x) s(x)) \quad (3.2)$$

Решение его имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{f_2(\sigma)} [C - Q f_1(\sigma)] \quad (C = \text{const}) \quad (3.3)$$

Из начального условия $\sigma = \sigma_0, \lambda = \lambda_0 = \lambda(x_0)$ при $t = t_0$ определим постоянную интегрирования $C = \lambda_0 f_2(\sigma_0) + Q f_1(\sigma_0)$ (3.4)

Подставляя (3.4) в (3.3) и выражая λ через x , получим семейство кривых зависимости $x = x(\sigma)$, проходящих через каждую точку кривой $\sigma = \sigma(x) = \sigma_0(x_0)$ при $t = t_0$

$$v(x) k(x) s(x) = \frac{1}{f_2(\sigma)} \{v(x_0) k(x_0) s(x_0) f_2(\sigma_0) + Q [f_1(\sigma_0) - f_1(\sigma)]\} \quad (3.5)$$

Подставляем зависимость $\sigma = \sigma(x)$ из (3.5) во второе уравнение системы (3.1) и интегрируя, получим другое семейство кривых зависимости $t = t(x)$, также проходящих через каждую точку кривой $\sigma_0 = \sigma_0(x_0)$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{m(x) s(x)}{Q f_1'[\sigma(x)] - v(x) k(x) s(x) f_2'[\sigma(x)]} dx \quad (3.6)$$

Таким образом, найдена каждая искомая характеристика.

В том случае, когда рассматривается задача о-сегрегации двух жидкостей в поле силы тяжести, очевидно, что

$$Q = 0, v(x) = v = -\frac{g i (\rho_2 - \rho_1)}{\mu_1} \left(i = \frac{dz}{dx} \right)$$

где g — ускорение силы тяжести, z — вертикальная координата.

Предположим, что $m(x) = m = \text{const}$, $s(x) = s = \text{const}$ и проницаемость представляет линейную функцию от x , т. е. $k'(x) = k' = \text{const}$. Тогда формула (3.5) примет вид

$$\frac{k(x)}{k(x_0)} = \frac{f_2(\sigma_0)}{f_2(\sigma)} \quad (3.7)$$

Из (3.4) имеем

$$\frac{dt}{m} = \frac{d\sigma}{v k' f_2(\sigma)}, \quad \text{или} \quad t - t_0 = \frac{m}{v k'} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{f_2(\sigma)} \quad (3.8)$$

Формулы (3.7) и (3.8) представляют собой искомые зависимости между σ , x и t .

4. Рассмотрим фильтрацию в горизонтальном пласте ($i = 0, v = 0$). Для этого случая система уравнений характеристик согласно (1.7) будет

$$\frac{dx}{Q(t) f_1'(\sigma)} = \frac{dt}{s(x) m(x)} = \frac{d\sigma}{0} \quad (4.1)$$

Как видим, в систему дифференциальных уравнений (4.1) не входит проницаемость пласта $k(x)$. Это означает, что неоднородность проницаемости по направлению фильтрации не оказывает влияния на характер распределения насыщенности в переходной зоне.

Решение системы уравнений (4.1) при начальном условии (1.6) получается в следующем виде:

$$\int_{x_0}^x m(x) s(x) dx = f_1'(\sigma_0) \int_{t_0}^t Q(t) dt \quad (4.2)$$

Формула (4.2) показывает, что переменная пористость пласта играет такую же роль, как и переменное поперечное сечение фильтрационного потока.

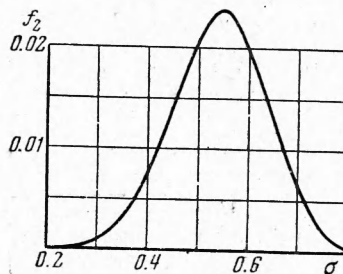
Для вытеснения одной фазы другой в пористой среде, полностью заполненной вначале вытесняемой фазой, по формуле (4.2) будем иметь

$$\int_0^x m(x) s(x) dx = f_1'(\sigma) \int_0^t Q(t) dt \quad (4.3)$$

(начало координат x положено на первоначальном сечении раздела двух жидкостей. Время t отсчитано от начала вытеснения.)

Легко установить, что в этом случае насыщенность на фронте вытеснения σ_Φ определяется таким же равенством, как и в случае однородной пористой среды (вытесняющая фаза считается первой)

$$\sigma_\Phi f_1'(\sigma_\Phi) - f_1(\sigma_\Phi) = 0$$



Фиг. 3

5. *Пример.* Рассмотрим задачу о вытеснении нефти водой из круговой залежи с наклоном α . Начало координат x принимаем в центре залежи. В этом случае

$$v(x, t) = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g \sin \alpha}{\mu_1} = v, \quad s(x) = Ax \quad (A = \text{const})$$

Положим, что $k(x) = Bx$, $m(x) = Cx$, $Q = Dt$, где B , C , D — некоторые постоянные; будем полагать, что пласт вначале полностью заполнен нефтью, т. е. что

$$\begin{aligned} x = x_0, & \quad 0 \leq \sigma \leq 1 & \text{при } t = t_0 = 0 \\ x < x_0, & \quad \sigma = 0 & \text{при } t = t_0 = 0 \quad (\text{законтурное заводнение}) \\ x > x_0, & \quad \sigma = 0 & \text{при } t = t_0 = 0 \quad (\text{центральная закачка}) \end{aligned}$$

Система уравнений (2.2) принимает вид

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{cx}{2vB}, \quad \frac{dx}{d\omega} = \frac{Dt f_1'(\sigma) - vABx^2 f_2'(\sigma)}{2vABx} \quad \left(\omega = \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{f_2(\sigma)} \right) \quad (5.1)$$

Из первого уравнения системы (5.1) имеем

$$x = \frac{2vB}{C} \tau, \quad \frac{dx}{d\omega} = \frac{2vB}{C} \frac{d\tau}{d\omega} \quad \left(\tau = \frac{dt}{d\omega} \right) \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) во второе уравнение (5.1) и выражая σ через ω , получим

$$\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{\theta t}{\varepsilon^2} \frac{f_1'[\sigma(\omega)]}{\tau} - \frac{f_2'[\sigma(\omega)]}{2} \tau \quad \left(\varepsilon = \frac{2vB}{C}, \theta = \frac{D}{2vAB} \right) \quad (5.3)$$

Введя безразмерные переменные

$$\vartheta = \frac{\varepsilon^2}{\theta} t, \quad \xi = \frac{\varepsilon}{\theta} x \quad (5.4)$$

представим уравнения (5.2) и (5.3) в виде

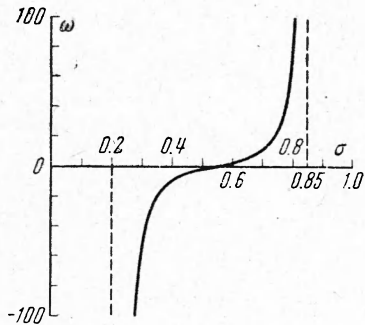
$$\xi = \frac{d\vartheta}{d\omega}, \quad \frac{d^2\vartheta}{d\omega^2} = \frac{\vartheta f_1'[\sigma(\omega)]}{d\vartheta/d\omega} - \frac{f_2'[\sigma(\omega)]}{2} \frac{d\vartheta}{d\omega} \quad (5.5)$$

Систему уравнений (5.5) нужно решить при начальном условии

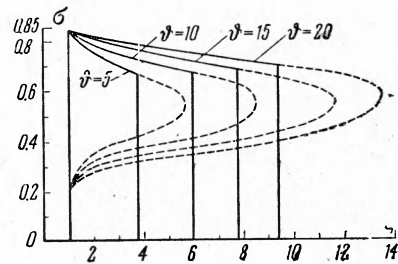
$$\omega = \omega_0 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \frac{d\sigma}{f_2(\sigma)}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \frac{\varepsilon^2}{\theta} t_0 = 0, \quad \frac{d\vartheta}{d\omega} = \left(\frac{d\vartheta}{d\omega} \right)_0 = \xi_0 = \frac{\varepsilon}{\theta} x_0 = 1 \quad (5.6)$$

(предполагается, что $x_0 = \theta / \varepsilon$ при $t_0 = 0$)

Решение системы (5.5) с начальным условием (5.6) можно провести численно. Для кривых характеристик, из которых составляется искомая интегральная поверхность, было построено два семейства кривых зависимостей $\vartheta = \vartheta(\omega)$, $\xi = \xi(\omega)$, а следовательно, и $\sigma = \sigma(\vartheta)$, $\sigma = \sigma(\xi)$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Вид функции ω согласно (2.4) показан на фиг. 4. (Было выбрано такое σ_1 , при котором $f_2(\sigma)$ имеет максимальное значение. Для рассматриваемого численного примера $\sigma_1 = 0.545$. Пунктирная линия является асимптотой для ω .)

В таблице приведена зависимость $\sigma = \sigma(\vartheta)$ и $\sigma = \sigma(\xi)$, соответствующая различным значениям σ_0 . При помощи этой таблицы была построена кривая распределения насыщенности в пласте для каждого фиксированного времени (фиг. 5). Кривые фиг. 5 показывают двузначную зависимость $\sigma(\xi)$. Как обычно, двузначность устраняется введением скачка насыщенности. Очевидно, текущую координату фронта вытеснения x_{Φ} , где происходит скачок насыщенности, можно определить из равенства

$$\int_0^t Q(t) dt = \int_{x_0}^{x_{\Phi}} m(x) s(x) \sigma dx \quad (5.7)$$

Таблица

$\sigma_0 = 0.2$	σ	0.2	0.2						
	ϑ	0	∞						
$\sigma_0 = 0.4$	ξ	1	1						
	σ	0.4	0.405	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46
$\sigma_0 = 0.5$	ϑ	0	0.671	1.606	4.725	9.905	16.765	25.465	35.205
	ξ	1	1.239	1.879	3.78	6.58	9.56	12.8	16.26
$\sigma_0 = 0.545$	σ	0.5	0.505	0.51	0.52	0.54	0.56	0.58	0.6
	ϑ	0	0.326	0.588	1.592	4.164	9.399	17.809	33.809
$\sigma_0 = 0.6$	ξ	1	1.172	1.449	2.570	4.890	8.328	12.783	19.323
	σ	0.545	0.55	0.56	0.57	0.58	0.6	0.62	0.64
$\sigma_0 = 0.6$	ϑ	0	0.268	0.633	1.491	2.744	8.251	18.14	36.4
	ξ	1	1.142	1.723	2.573	3.698	7.452	12.038	18.617
$\sigma_0 = 0.6$	σ	0.6	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.68
	ϑ	0	0.603	1.519	3.234	5.798	10.88	16.908	44.08
$\sigma_0 = 0.7$	ξ	1	1.411	2.252	3.47	5.085	7.189	9.859	17.489
	σ	0.7	0.71	0.72	0.73	0.74			
$\sigma_0 = 0.7$	ϑ	0	2.02	8.385	25.835	61.83			
	ξ	1	1.786	4.183	8.408	14.408			
$\sigma_0 = 0.85$	σ	0.85	0.85						
	ϑ	0	∞						
$\sigma_0 = 0.85$	ξ	1	1						

или в рассматриваемом случае

$$\frac{D}{2} t^2 = AC \int_{x_0}^{x\Phi} x^2 \sigma dx \quad (5.8)$$

Представим (5.8) в безразмерном виде

$$\frac{\vartheta^2}{2} = \int_{\xi_0}^{\xi\Phi} \xi^2 \sigma d\xi \quad (5.9)$$

По условию (5.9) были построены скачки насыщенности (фиг. 5). Видно, что насыщенность на фронте вытеснения увеличивается с течением времени.

При численном расчете было принято $\mu_0 = 3$. Относительные фазовые проницаемости были вычислены по эмпирическим формулам, качественно хорошо удовлетворяющим опытным данным

$$k_1(\sigma) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \sigma < 0.2$$

$$k_1(\sigma) = \left(\frac{\sigma - 0.2}{0.8} \right)^{3.5} \quad \text{при } 0.2 \leq \sigma \leq 1$$

$$k_2(\sigma) = \left(\frac{0.85 - \sigma}{0.85} \right)^{2.8} (1 + 2.4\sigma) \quad \text{при } 0 \leq \sigma \leq 0.85$$

$$k_2(\sigma) = 0 \quad \text{при } 0.85 < \sigma \leq 1$$

Автор благодарит И. А. Чарного за руководство при выполнении работы.

Поступила 23 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматиз, 1958.
2. Бузинов С. Н., Чарный И. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, ОИИ, 1957, № 7.