

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Кумулятивный заряд и принцип его работы.— УМН, 1957, т. 12, вып. 4(76).
2. Birkhoff G., Mac Dougall D. P., Pugh E., Taylor G. Explosives with lined cavities.— J. Appl. Phys., 1948, vol. 19.
3. Титов В. М. Возможные режимы гидродинамической кумуляции при схлопывании облицовки.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 5.
4. Эйчельбергер Р., Кайнике Дж. Высокоскоростной удар.— В сб.: Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. М., Мир, 1971.
5. Лёконт К. Высокоскоростное метание.— В сб.: Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. М., Мир, 1971.
6. Chou P. C., Carleone J., Karpp R. R. Criteria for jet formation from impinging shells and plates.— J. Appl. Phys., 1976, vol. 47, N 7.
7. Титов В. М., Швецов Г. А. Лабораторные методы высокоскоростного метания твердых тел взрывом.— ФГВ, 1970, № 3.

УДК 539.2 : 539.4

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕН ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗКАХ

В. В. Болотин

(Москва)

Прогнозирование времен до достижения элементом конструкции некоторого состояния (например, разрушения) представляет интерес как с точки зрения проектирования вновь создаваемых конструкций, так и с точки зрения контроля текущего состояния конструкций в процессе их эксплуатации. В последнем случае результаты прогнозирования служат для решения вопроса о целесообразности или безопасности дальнейшей эксплуатации данной конструкции, о необходимых профилактических мерах и т. п. С позиций механики прогнозирование времен до разрушения является комплексной задачей, включающей описание процесса накопления повреждений и процесса развития макроскопических трещин в конструкции, оценку снижения несущей способности поврежденной конструкции и ее живучести в условиях нагружения, которое, как правило, носит случайный характер и задается некоторыми априорными распределениями. В данной статье развивается модель накопления повреждений в элементах конструкций, условно разделяемая на две стадии — инкубационную и стадию распространения магистральных трещин. При этом постулируется связь между феноменологической мерой повреждения, зависящей от процесса нагружения, и математическим ожиданием числа макроскопических трещин, зародившихся в некотором эталонном объеме. Другим существенным элементом развиваемого подхода служит применение центральной предельной теоремы для асимптотической оценки распределений нестационарных случайных процессов, характеризующих накопление повреждений в элементе конструкции и его остаточную несущую способность.

1. Рассмотрим тело объемом  $V$ , которое подвергается длительному действию случайных медленно изменяющихся или циклических нагрузок. Относительно последних будем предполагать, что их параметры меняются достаточно медленно, так что процесс циклического нагружения можно приближенно рассматривать как протекающий непрерывно в «медленном» времени  $t$ . Поле номинальных напряжений в теле будем описывать при помощи вектора-функции  $s(x, t)$ , где  $x$  — радиус-вектор точек тела. Разобьем тело на части, объем которых имеет порядок  $V_0$ . Эти части выберем так, чтобы размер каждой из них был достаточно велик по сравнению с масштабом структуры материала и с характерным размером  $l_*$  зародышевой макроскопической трещины. С другой стороны, размеры

этих частей должны быть достаточно малы по сравнению с характерными масштабами изменения макроскопических напряжений и макроскопических свойств тела по объему  $V_0$ . В объеме  $V_0$  поле  $s(\mathbf{x}, t)$  будем считать не зависящим от  $\mathbf{x}$  и просто обозначать через  $s(t)$ . Для упрощения будем также предполагать, что характерный размер  $l$  развитой макроскопической трещины не выходит за пределы объема  $V_0$  до момента, когда этот размер достигает предельно допустимого или критического размера  $l_{**}$ . В дальнейшем объем  $V_0$  будем называть эталонным. Некоторые из этих ограничений вводятся лишь для упрощения формул и могут быть без особых затруднений сняты.

Рассмотрим первую (инкубационную) стадию, в течение которой в слабейших или наиболее напряженных элементах структуры образуются зародыши макроскопических трещин с характерными размерами  $l_*$ . Степень подготовки материала к образованию зародыша в эталонном объеме  $V_0$  будем характеризовать при помощи скалярной меры повреждения  $\psi$ . Эта мера — неубывающая функция  $t$  и в каждый момент времени является функционалом от истории нагружения на отрезке  $[0, t]$ . Поскольку  $s(t)$  — случайный процесс, то  $\psi(t)$  тоже будет случайным процессом. Распределение его значений в каждый момент времени характеризуется функцией распределения  $F_\psi(\psi; t)$  и соответствующей плотностью вероятности  $p_\psi(\psi; t)$ . Методы вычисления этих характеристик при заданной связи между мерой повреждения и процессом нагружения в общем известны [1], некоторые подробности будут рассмотрены ниже.

Обозначим количество макроскопических трещин или их зародышей в эталонном объеме  $V_0$  через  $k$ . Это количество — целочисленный случайный процесс  $k(t)$ . Экспериментатор констатирует окончание инкубационной стадии, обнаружив в образце первую макроскопическую трещину. Поэтому естественно постулировать связь между мерой повреждения  $\psi(t)$  и математическим ожиданием  $\nu(t) = E[k(t)]$  количества макроскопических трещин или их зародышей. При этом математическое ожидание  $E(\cdot)$  берется по статистическому ансамблю аналогичных объемов  $V_0$ , находящихся в статистически однородных условиях. Итак, примем

$$(1.1) \quad \nu = f(\psi), \quad 0 \leq \psi < \infty,$$

где  $f(\psi)$  — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям  $f'(\psi) > 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . В отличие от общепринятой трактовки здесь мера повреждения аналитически продолжается на отрезке  $(1, \infty)$ . Из приведенных соображений видно, что эталонный объем должен иметь порядок объема стандартных образцов при испытаниях на циклическую или длительную прочность.

Образование зародышей макроскопических трещин — достаточно редкое событие. Характерный размер зародышей таков, что с вероятностью, близкой к единице, допустимо пренебречь их взаимным влиянием и принять для их количества  $k$  распределение Пуассона. Тогда вероятность того, что в объеме  $V_0$  появится ровно  $k$  макроскопических трещин или их зародышей при условии, что мера повреждения равна заданному значению  $\psi$ , определяется как

$$(1.2) \quad Q_k = \frac{f^k(\psi)}{k!} \exp[-f(\psi)], \quad k = 0, 1, \dots$$

Аналогично для вероятности появления в объеме  $V_0$  хотя бы одной трещины или ее зародыша имеем формулу

$$(1.3) \quad Q(\psi) = 1 - \exp[-f(\psi)].$$

Здесь функции  $Q_k(\psi)$  и  $Q(\psi)$  имеют смысл условных вероятностей. Если

для заданного процесса нагружения  $s(t)$  найдена функция распределения  $F_\psi(\psi; t)$  меры  $\psi$  при  $0 \leq t < \infty$ , то можно вычислить вероятность события, состоящего в том, что в момент  $t$  в объеме  $V_0$  возникает хотя бы одна макроскопическая трещина:

$$(1.4) \quad Q(t) = \int_0^\infty \{1 - \exp[-f(\psi)]\} dF_\psi(\psi; t).$$

Момент  $t_*$  возникновения первой трещины естественно трактовать как окончание инкубационной стадии. В самом деле, поскольку напряженное состояние в  $V_0$  по предположению однородно, то трещина, которая образовалась первой, имеет предпочтительные шансы на дальнейшее развитие и, как правило, станет причиной разрушения. При этом мы намеренно отвлекаемся от осложнений, которые вносит учет взаимодействия трещин, их ветвления и т. п. Если принять эту точку зрения, то формула (1.4) дает функцию распределения времен окончания инкубационной стадии:

$$(1.5) \quad F_*(t_*) = \int_0^\infty \{1 - \exp[-f(\psi)]\} dF_\psi(\psi; t_*).$$

Стадия развития макроскопических трещин описывается уравнениями механики разрушения [2]. Если процесс нагружения  $s(t)$  случайный, то результатом решения этих уравнений будет построение функции распределения  $F_l(l; t|t_*)$  размеров  $l$  трещин, зародившихся в момент  $t_*$ . В свою очередь,  $t_*$  — случайная величина с функцией распределения (1.5). Отсюда для безусловного распределения размера  $l$  трещины, которая зародилась первой, получаем формулу

$$(1.6) \quad F_l(l; t) = \int_0^t F_l(l; t|t_*) dF_*(t_*).$$

Пусть критический (или предельный) размер трещины не зависит от  $s$  и равен заданному значению  $l_{**}$ . Тогда для момента  $t_{**}$  достижения трещиной, зародившейся в момент  $t_*$ , критического размера  $l_{**}$  имеем условную функцию распределения

$$(1.7) \quad F_{**}(t_{**}|t_*) = 1 - F_l(l_{**}; t_{**}|t_*).$$

Безусловная функция распределения определяется по формуле

$$(1.8) \quad F_{**}(t_{**}) = \int_0^{t_{**}} F_{**}(t_{**}|t_*) dF_*(t_*).$$

Обычно критический размер  $l_{**}$  зависит от уровня номинальных напряжений на фронте трещины в данный момент времени. Это несколько усложняет задачу нахождения распределения для  $t_{**}$ , поскольку требует совместного рассмотрения двух стохастически связанных процессов  $l(t)$  и  $l_{**}(t)$ . Момент  $t_{**}$  находится из условия пересечения этих двух процессов.

2. Приведенные выше соображения носят общий характер. Укажем теперь класс задач, для которых сравнительно легко получается приближенное (в асимптотическом смысле) решение. Пусть процесс накопления повреждений описывается дифференциальным уравнением

$$(2.1) \quad d\psi/dt = f_1(\psi) f_2(s),$$

где  $f_1(\psi)$  и  $f_2(s)$  — непрерывные функции меры повреждения  $\psi$  и вектора

нагружения  $s$  соответственно. При этом  $f_1(\psi) > 0$ ,  $f_2(s) \geq 0$ . Начальные условия для уравнения (2.1) берутся в виде  $\psi(0) = 0$  для неповрежденного материала и в виде  $\psi(0) = \psi_0$ , если при  $t = 0$  материал имеет повреждение  $\psi_0$ . Пусть развитие характерного размера трещины  $l$  описывается уравнением аналогичной структуры

$$(2.2) \quad \frac{dl}{dt} = g_1(l)g_2(s),$$

где  $g_1(l) > 0$  и  $g_2(s) \geq 0$  — непрерывные функции размера трещины  $l$  и вектора напряжения  $s$  соответственно. Начальное условие для уравнения (2.2) ставится в момент  $t_*$  зарождения макроскопической трещины:  $l(t_*) = l_*$ . Процесс  $l(t)$  определяется при  $t_* \leq t < \infty$ . Однако поскольку рост трещины ограничен по соображениям надежности предельной величиной  $l_{**}$ , то верхняя граница интервала берется равной  $t_{**}$ , где  $l(t_{**}) = l_{**}$ . В этом разделе величину  $l_{**}$  будем считать заданной; случай, когда размер  $l_{**}$  зависит от значений вектора нагружения  $s(t)$  в данный момент времени  $t$ , будет рассмотрен ниже.

Тип уравнений (2.1), (2.2) выбран так, чтобы переменные в них разделялись. Большинство феноменологических уравнений, описывающих накопление повреждений при длительном или циклическом нагружении [1], укладывается в схему (2.1). Среди уравнений механики разрушения к типу (2.2) относится, например, уравнение Пэриса — Эрдогана [2], описывающее субкритический рост трещин при циклическом нагружении:

$$(2.3) \quad \frac{dl}{dt} = \frac{c}{\tau_0} (\Delta K)^n,$$

где  $c$  и  $n$  — некоторые положительные эмпирические постоянные;  $\tau_0$  — постоянная времени;  $\Delta K$  — размах коэффициента интенсивности напряжений  $K$ . В свою очередь,  $K = \gamma s \sqrt{l}$ , где  $s$  — номинальное напряжение на фронте трещины;  $\gamma$  — коэффициент порядка единицы. Напротив, уравнения [3], которые учитывают пороговое значение коэффициента интенсивности, не принадлежат к типу (2.2).

Сводя уравнения (2.1), (2.2) к квадратурам, с учетом начальных условий получаем

$$(2.4) \quad U(\psi) = u(t), \quad W(l) = w(t|t_*).$$

В левых частях соотношений (2.4) стоят функции

$$(2.5) \quad U(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{f_1(\psi)}, \quad W(l) = \int_{l_*}^l \frac{dl}{g_1(l)},$$

а в правых частях — функции

$$(2.6) \quad u(t) = \int_0^t f_2[s(\tau)] d\tau, \quad w(t|t_*) = \int_{t_*}^t g_2[s(\tau)] d\tau.$$

При ограничениях на функции, входящие в уравнения (2.1), (2.2), все интегралы в (2.4), (2.5) существуют. Области изменения левых и правых частей в уравнениях (2.4), вообще говоря, не совпадают, что должно учитываться при дальнейших вычислениях.

Поскольку  $s(t)$  — случайный процесс, функции  $u(t)$  и  $w(t|t_*)$ , определяемые согласно (2.6), также будут случайными процессами. При некотором комплексе условий, накладываемых на подынтегральные выражения в (2.6), на функции  $u(t)$  и  $w(t|t_*)$  распространяется центральная предельная теорема для интегралов от случайных процессов. Условия этой теоремы, точную формулировку которой можно найти в [4], содержат, по-

мимо обычно выполняемых ограничений на моменты от подынтегральных выражений, также требования достаточно хорошей перемешанности процессов. В свою очередь, условие хорошей перемешанности можно свести к требованию, чтобы характерное время  $\tau_c$  корреляции подынтегральных выражений было достаточно мало по сравнению с отрезком времени, на котором производится интегрирование. Без существенных ограничений можно принять, что  $\tau_c$  имеет порядок характерного времени корреляции процесса нагружения  $s(t)$ . Поскольку центральная предельная теорема применяется главным образом для оценки вероятностей, относящихся к моментам времени  $t_*$  и  $t_{**}$ , то требование перемешанности естественно представить в виде

$$(2.7) \quad \tau_c \ll \min \{t_*, t_{**} - t_*\}.$$

Пусть условия центральной предельной теоремы из [4] выполнены. Тогда для функции распределения  $F_\psi(\psi; t)$  меры повреждения  $\psi$  в момент времени  $t$  имеет место асимптотическое представление

$$(2.8) \quad F_\psi(\psi; t) \sim \Phi \left\{ \frac{U(\psi) - E[u(t)]}{\sqrt{D[u(t)]}} \right\},$$

где  $D(\cdot)$  — дисперсия;  $\Phi(u)$  — стандартная функция нормального распределения

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz.$$

Математическое ожидание  $E[u(t)]$  и дисперсия  $D[u(t)]$  вспомогательного процесса  $u(t)$  вычисляются как

$$(2.9) \quad E[u(t)] = \int_0^t E\{f_2[s(\tau)]\} d\tau,$$

$$D[u(t)] = \int_0^t \int_0^t E\{f_2^*[s(\tau_1)] f_2^*[s(\tau_2)]\} d\tau_1 d\tau_2.$$

При этом  $f_2^*[s(\tau)]$  — соответствующий центрированный процесс. Аналогичное асимптотическое соотношение получаем для функции распределения  $F_l(l; t|t_*)$  размера  $l$  трещины, зародившейся в момент времени  $t_*$ :

$$(2.10) \quad F_l(l; t|t_*) \sim \Phi \left\{ \frac{W(l) - E[w(t|t_*)]}{\sqrt{D[w(t|t_*)]}} \right\}.$$

При фиксированном  $t$  правые части в формулах (2.8) и (2.10), вообще говоря не стремятся к единице при  $\psi \rightarrow \infty$  и  $l \rightarrow \infty$  соответственно. Это означает, что при конечных  $t$  вероятность обнаружения сколь угодно больших значений  $\psi$  или  $l$  может быть отлична от нуля. Вероятности этих событий определяются как дополнения функций распределения  $F_\psi(\psi; t)$  и  $F_l(l; t|t_*)$  до единицы при  $\psi \rightarrow \infty$  и  $l \rightarrow \infty$  соответственно.

3. Для иллюстративного примера возьмем циклическое нагружение с номинальными напряжениями, представляющими собой одномерный узкополосный нормальный процесс с математическим ожиданием, равным нулю, дисперсией  $\sigma^2$  и характерным (эффективным) периодом  $\tau_0$ . Амплитуды этого процесса  $s \geq 0$  следуют распределению Рэлея с плотностью вероятности

$$(3.1) \quad p(s) = \frac{s}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right)$$

и автокорреляционной функцией  $K_s(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau)$ . Здесь  $\rho(\tau)$  — функция, медленно изменяющаяся за время порядка  $\tau_0$ . Для меры повреждения  $\psi$  возьмем уравнение типа (2.1)

$$(3.2) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{N_c \tau_0} \left( \frac{s}{r} \right)^m,$$

где  $N_c$  — базовое число циклов;  $m$  — показатель кривой усталости;  $r$  — характерное напряжение, имеющее смысл предела усталости. Для размера трещины  $l$  возьмем уравнение Пэриса — Эрдогана (2.3). Поскольку размах  $\Delta K$  коэффициента интенсивности напряжений связан с амплитудой  $s$  и размером трещины  $l$  соотношением  $\Delta K = 2\gamma s \sqrt{l}$ , уравнение (2.3) сохраняет структуру (2.2)

Вычисляя по формулам (2.5) левые части в соотношениях (2.4), получим

$$(3.3) \quad U(\psi) = \psi, \quad W(l) = \frac{1 - (l_*/l)^{\frac{1}{2}n-1}}{\frac{1}{2}n - 1}.$$

При этом выражение для  $W(l)$  пригодно при  $n \neq 2$ . Если  $n = 2$ , то  $W(l) = \ln(l/l_*)$ . Правые части в соотношениях (2.4), согласно (2.6), имеют вид

$$(3.4) \quad u(t) = \frac{1}{T_c} \int_0^t \left[ \frac{s(\tau)}{r} \right]^m d\tau, \quad w(t|t_*) = \frac{1}{T_{c_1}} \int_{t_*}^t \left[ \frac{s(\tau)}{r} \right]^n d\tau,$$

где в целях сокращения формул введены обозначения для постоянных времени

$$(3.5) \quad T_c = N_c \tau_0, \quad T_{c_1} = \tau_0 \left[ c (2\gamma r)^n l_*^{\frac{1}{2}n-1} \right]^{-1}.$$

Математические ожидания в дисперсии процессов  $u(t)$  и  $w(t|t_*)$  определяются по формулам (2.9). В частности, для процесса  $u(t)$  с учетом (3.1) получаем [5]

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}[u(t)] &= \frac{t}{T_c} \left( \frac{\sigma}{r} \right)^m 2^{\frac{1}{2}m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}m\right), \\ \mathbf{D}[u(t)] &\approx \frac{t}{T_c^2} \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{2m} 2^m \sum_{j=1}^{\infty} B_{j,m}^2 \tau_j. \end{aligned}$$

Во второй из формул (3.6) использованы обозначения

$$(3.7) \quad \begin{aligned} B_{j,m} &= \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k j!}{(k!)^2 (j-k)!} \Gamma\left(1 + k + \frac{1}{2}m\right), \\ \tau_j &= 2 \int_0^{\infty} \rho^{2j}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

причем эта формула приближенная, погрешность которой быстро уменьшается с ростом  $t/\tau_c \gg 1$ . Сходимость ряда во второй формуле (3.6) может быть доказана с учетом того, что его коэффициенты выражаются через коэффициенты разложения двухточечной плотности вероятности релеевского процесса в ряд по полиномам Лагерра. При четных  $m$  верхний предел суммирования в первой формуле (3.7) будет  $j = m/2$ .

Аналогично для процесса  $w(t|t_*)$  получаем

$$(3.8) \quad E[w(t|t_*)] = \frac{t-t_*}{T_{c_1}} \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n 2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}n\right),$$

$$D[w(t|t_*)] \approx \frac{t-t_*}{T_{c_1}^2} \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{2n} 2^n \sum_{j=1}^{\infty} B_{j,n}^2 \tau_j.$$

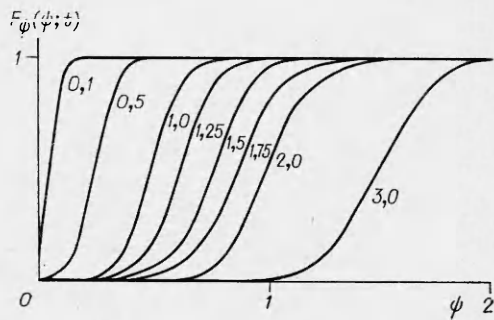
При этом в правой части второй формулы, которая будет тем точнее, чем сильнее неравенство  $(t-t_*)/\tau_c \gg 1$ , стоят коэффициенты  $B_{j,n}$ , вычисляемые по соответствующей формуле (3.7) с заменой  $m$  на  $n$ .

Некоторые результаты вычислений с учетом формул (1.5)–(1.8), (2.8), (2.10) и (3.6)–(3.8) приведены ниже. Для примеров взяты следующие исходные данные:  $m = n = 4$ ,  $T_c = T_{c_1}$ ,  $\beta = 2$ ,  $\rho(\tau) = \exp(-|\tau|/\tau_c)$ , где  $\tau_c = 10^{-2}T_c$ . На фиг. 1, 2 показаны графики для функции распределения  $F_\psi(\psi; t)$  меры повреждения  $\psi$  и для функции распределения  $F_l(l; t|t_*)$  размера трещины  $l$ , зародившейся в момент времени  $t_*$ . Все графики построены для безразмерного уровня напряжений  $\sigma/r = 0,5$  и для различных относительных времен  $t/T_c$  и  $(t-t_*)/T_{c_1}$  соответственно. Значения этих времен указаны у кривых.

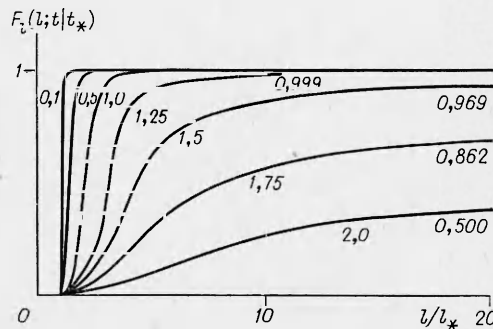
При  $l \rightarrow \infty$  и фиксированных  $t-t_*$  функция распределения  $F_l(l; t|t_*)$  стремится к пределу, вообще говоря, отличному от единицы. Дополнение этого предельного значения до единицы равно вероятности неограниченного роста трещины при заданном  $t-t_*$ . Заметим, что при  $n \leq 2$  область изменения функции  $W(l)$  есть полуось  $[0, \infty]$ , так что асимптотическое значение функции распределения при  $l \rightarrow \infty$  оказывается равным единице. Очевидно, что поведение функции распределения  $F_l(l; t|t_*)$  существенно зависит от того, как

изменяется скорость  $dl/dt$  с увеличением размера трещины. Это проиллюстрировано на фиг. 3, где графики функции  $W(l)$  при  $n = 2, 3$  и  $4$  совмещены с графиком плотности вероятности  $p_w(w; t|t_*)$  для значений процесса  $w(t|t_*)$ . Заштрихованная область соответствует пределу функции  $F_l(l; t|t_*)$  при  $n = 2, l \rightarrow \infty$ . Вместе с тем, поскольку формулы (2.8), (2.10) сами носят асимптотический характер, достоверность численных результатов может заметно уменьшаться как раз на «хвостах» распределений.

На фиг. 4 представлены графики для функций распределения  $F_*(t_*)$  и  $\bar{F}_{**}(\bar{t}_{**}|\bar{t}_*)$ , построенные по формулам (1.5), (1.7). По оси абсцисс отложены соответственно безразмерные времена  $\tau = t_*/T_c$  и  $\tau = (t_{**} - t_*)/T_{c_1}$ . Числа у кривых для  $F_{**}(t_{**}|t_*)$  указывают на принятые отношения  $\bar{t}_{**}/l_*$ . Распределение времен  $\bar{t}_{**} - t_*$  ока-

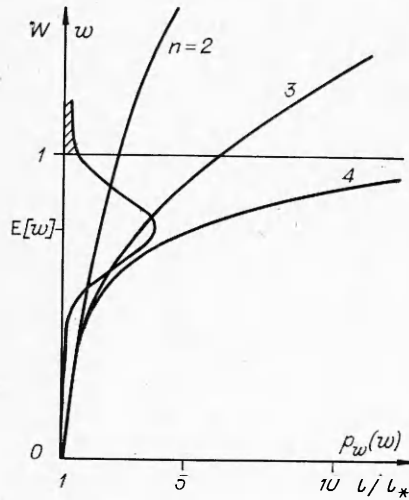


Ф и г. 1

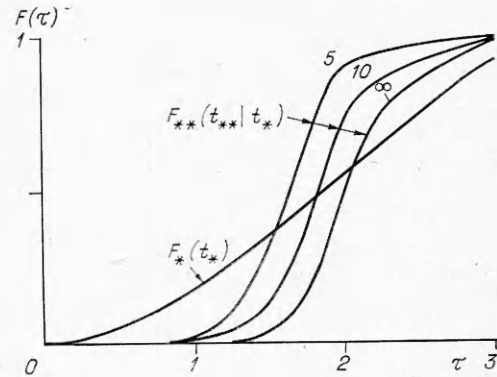


Ф и г. 2





Ф и г. 3



Ф и г. 4

зывается намного более компактным, чем времен  $t_*$ . Это является следствием того, что механизмы накопления начальных повреждений и распространения магистральных трещин существенно различны. Если статистический разброс времен  $t_*$  порождается как случайным распределением дефектов в материале, так и случайным характером нагружения, то разброс времен  $t_{**} - t_*$  (в рамках принятой модели) вызван исключительно случайным характером нагружения.

4. До сих пор предполагалось, что критический или предельно допустимый размер  $l_{**}$  является заданной величиной. С точки зрения линейной механики разрушения критический размер трещины существенно образом зависит от уровня номинальных напряжений на фронте трещины. Возьмем условие неразрушения в виде

$$(4.1) \quad K_{\max} = \gamma s_{\max} \sqrt{l} < K_{**},$$

где  $s_{\max}$  — максимальное номинальное напряжение на фронте трещины;  $K_{**}$  — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений. При этом критический размер  $l_{**}(t)$  — случайная функция времени, зависящая от процесса нагружения  $s(t)$ . Это обстоятельство в значительной степени осложняет решение задачи об отыскании законов распределения времен до разрушения, требуя привлечения методов теории выбросов случайных процессов. Задача этого типа рассматривалась в [6] в предположении, что в некоторый начальный момент времени  $t_0$  размер макроскопической трещины  $l_0$  задан как детерминистическая величина. Теперь покажем, как учесть влияние случайного механизма зарождения макроскопической трещины на распределении времен до достижения ею критического размера.

Как и в статье [6], сформулируем задачу в терминах номинальных напряжений, задавая последние при помощи одномерного случайного процесса  $s(t)$ . Соответствующее критическое напряжение для трещины, зародившейся в момент времени  $t_*$ , определяется, согласно (4.1), как

$$(4.2) \quad s_{**}(t | t_*) = K_{**} / \gamma \sqrt{l(t | t_*)}.$$

Определим вероятность события, состоящего в том, что на отрезке времени  $[t_*, t]$  неравенство (4.1) ни разу не будет нарушено. Эта вероятность имеет смысл показателя надежности вероятности безотказной работы на указанном отрезке:



$$(4.3) \quad R(t|t_*) = \mathbf{P}\{s(\tau) < s_{**}(\tau|t_*); \tau \in [t_*, t]\}.$$

Трудность вычисления этой вероятности связана с тем, что неравенство (4.1) вовсе не обязательно должно нарушаться к концу рассматриваемого отрезка времени, когда размер трещины достигнет наибольшего значения. Из-за выбросов процесса  $s(t)$  неравенство (4.1) может оказаться нарушенным еще на ранних этапах развития трещины. Если такие выбросы — относительно редкие события, то допустимо использовать приближенное (при определенных условиях — асимптотически точное) соотношение, связывающее функцию  $R(t|t_*)$  с математическим ожиданием  $\lambda(t|t_*)$  числа выбросов процесса  $s(t)$  за уровень  $s_{**}(t|t_*)$  в единицу времени:

$$R(t|t_*) \approx \exp \left[ - \int_{t_*}^t \lambda(\tau|t_*) d\tau \right].$$

Для вычисления математических ожиданий числа выбросов, в свою очередь, имеются разработанные методы [1, 7].

Условная функция распределения времен до первого нарушения неравенства (4.1) находится, очевидно, как дополнение вероятности (4.3) до единицы, а безусловная функция распределения вычисляется по формулам типа (1.8):

$$F_{**}(t_{**}) = \int_0^{t_{**}} [1 - R(t_{**}|t_*)] dF_*(t_*).$$

Вычисление математического ожидания числа нарушений неравенства  $s(t) < s_{**}(t|t_*)$  в единицу времени требует знания совместного распределения значений процессов  $s(t)$  и  $s_{**}(t|t_*)$ , а также их первых производных по времени. Однако на временах порядка  $t_{**} - t_* \gg \tau_0$  процесс  $s(t)$  допустимо трактовать как быстро изменяющийся по сравнению с процессом  $s_{**}(t|t_*)$ , причем с высокой точностью можно пренебречь стохастической зависимостью между значениями этих процессов в совпадающие моменты времени. Эти допущения будут выполняться тем лучше, чем сильнее выполняется неравенство (2.7). При сделанных предположениях для характеристики  $\lambda(t|t_*)$  имеем приближенную формулу

$$\lambda(t|t_*) \approx \int_0^\infty \int_0^\infty p_1(s, \dot{s}; t) p_2(s_{**}; t|t_*) \dot{s} ds ds_{**}.$$

Здесь  $p_1(s, \dot{s}; t)$  — совместная плотность вероятности для процесса  $s(t)$  и его первой производной  $\dot{s}(t)$  в совпадающие моменты времени;  $p_2(s_{**}; t|t_*)$  — плотность вероятности для процесса  $s_{**}(t|t_*)$  в те же моменты времени. Задание плотности  $p_1(s, \dot{s}; t)$  входит в описание процесса нагружения, в то время как функция распределения значений процесса  $s_{**}(t|t_*)$ , согласно формуле (4.2), выражается через функцию распределения значений процесса  $l(t|t_*)$ .

Поступила 26 III 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1965.
2. Разрушение. Под ред. Г. Либовица. Т. 3. М., Мир, 1976.
3. Mc Cartney L. M., Cooper P. M. A new method of analysing fatigue crack propagation data. — Engineering Fracture Mechanics, 1979, vol. 9, N 2.
4. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., Наука, 1965.

5. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979.  
 6. Болотин В. В. О безопасных размерах трещин при случайном нагружении. — Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1980, № 1.  
 7. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., Наука, 1970.

УДК 539.3

## О НЕКОТОРЫХ ФОРМАХ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

*Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин*  
(Москва)

1. Уравнения, описывающие нелинейную статическую деформацию упругих систем, как правило, содержат параметр (обычно это параметр нагрузки). Ниже будут рассмотрены алгебраические и трансцендентные уравнения. Обобщение на случай функциональных и операторных уравнений не составляет принципиальных трудностей.

Рассмотрим содержащую параметр  $\lambda$  систему нелинейных уравнений для вектора  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$

$$(1.1) \quad F(\mathbf{x}, \lambda) = 0,$$

где  $F = \{F_1(\mathbf{x}, \lambda), \dots, F_m(\mathbf{x}, \lambda)\}$  — нелинейная относительно  $\mathbf{x}$  и  $\lambda$  вектор-функция, которую будем считать непрерывной и достаточное число раз дифференцируемой по  $\mathbf{x}$  и  $\lambda$ .

Пусть при  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_n]$  уравнение (1.1) имеет решение  $\mathbf{x}(\lambda)$  и пусть при  $\lambda = \lambda_0$  такое решение  $\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{x}(\lambda_0)$  известно, т. е.

$$(1.2) \quad F(\mathbf{x}_{(0)}, \lambda_0) = 0.$$

Введем  $(m+1)$ -мерное векторное пространство  $E_{m+1} : \{\mathbf{x}, \lambda\}$ . В этом пространстве точка, соответствующая решению (1.1), описывает непрерывную кривую  $K$ , которая проходит через точки  $\mathbf{x}_{(0)}$ ,  $\lambda_{(0)}$  и  $\mathbf{x}_{(n)}$ ,  $\lambda_{(n)}$ . Идея метода продолжения по параметру состоит в построении последовательности решений  $\mathbf{x}_{(k)} = \mathbf{x}(\lambda_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) на основе известного решения  $\mathbf{x}_{(0)}$  при движении вдоль кривой  $K$ . Известны две формы метода продолжения по параметру: непрерывное продолжение [1] и дискретное продолжение [2].

2. Процесс непрерывного продолжения основан на том, что дифференцирование уравнений (1.1) по параметру  $\lambda$  приводит к линейной для  $d\mathbf{x}_i/d\lambda$  системе уравнений

$$(2.1) \quad J \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \quad J = \left\{ F_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\} \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Если при  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_n]$  якобиан  $\det(J) \neq 0$ , то процесс построения решений системы (1.1) сводится к интегрированию задачи Коши по параметру  $\lambda$

$$(2.2) \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = -J^{-1} \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \mathbf{x}(\lambda_0) = \mathbf{x}_{(0)}.$$

Для интегрирования могут быть использованы известные явные и неяв-