ПМТФ, № 2, 1975

УДК 533.6.011

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ РАДИАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ ГАЗА В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО ОТ ВНЕЗАПНО ВКЛЮЧЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО ИСТОЧНИКА

С. Ф. Чекмарев

(*Новосибирск*)

В работе рассматривается задача о радиальном расширении газа в среду низкого давления от внезапно включенного стационарного источника с $M \geqslant 1$. Рассмотрение касается главным образом неустановившегося течения газа на начальном этапе расширения. Для начального этапа расширения с помощью простого приближенного решения задачи установлены закономерности движения поверхностей сильного разрыва, определяющих структуру области течения. Предложен метод и получено численное решение задачи для вязкого теплопроводного газа в общей постановке.

Обозначения

t — радиус,
r — время,
T — температура,
p — давление,
ρ — плотность,
u — скорость газа,
$\varkappa$ — отношение теплоемкостей,
M — число Маха,
x — расстояние от среза сопла вдоль оси струи,
V_α — скорость перемещения поверхности α,
$m_{\alpha,\beta}$ — масса газа, заключенного в области (r_α, r_β),
c — скорость звука,
μ — динамическая вязкость.

Индексы

$\nu=1, 2$ — цилиндрическая и сферическая симметрия,
$'$ — размерная величина,
$-(+)$ — левая (правая) сторона поверхности сильного разрыва,
∞ — условия в затопленном пространстве,
0 — условия адиабатического торможения,
$*$ — звуковая поверхность,
1 — поверхность источника

Стационарные сверхзвуковые течения нагретого газа в соплах и свободных струях за недорасширенными соплами широко используются в лабораторной практике для проведения физических и аэродинамических исследований. При этом нередко нагрев газа в форкамере газодинамического источника осуществляется с помощью импульсного электрического разряда или ударного сжатия газа [1,2]. В этих случаях истечение газа из форкамеры в расширяющуюся часть сопла или в свободное пространство начинается в результате резкого повышения давления в форкамере. В критическом сечении сопла быстро устанавливается стационарный режим течения, и дальнейшее развитие течения газа в расширяющейся части сопла или в свободном пространстве происходит уже при наличии в критическом сечении сопла стационарного источника газа с параметрами p_*, T_*, u_*, соответствующими параметрам торможения газа в форкамере p_0 и T_0. Если p_0 и T_0 остаются постоянными достаточно продолжительное время, то в сопле или в струе устанавливается соответствующее стационарное течение. В реальном случае [1, 2] время, в пределах которого p_0 и T_0 можно считать постоянными, невелико. Поэтому важно знать, как формируется стационарное течение, особенно в центральной области потока, обычно используемой для проведения исследований.

Течение газа в центральной области струй, истекающих из осесимметричного или плоского сопла с сильным недорасширением потока, а также течение в осесимметричных или плоских соплах с прямолинейным контуром (при условии пренебрежения трением на стенках сопла) близко к радиальному течению (соответственно со сферической или цилиндрической симметрией) [1—3]. Идеализация исходной задачи приводит к задаче о радиальном (неустановившемся) расширении газа от внезапно включенного стационарного источника.

Для случая расширения газа в вакуум (в приложении к течению в соплах) задача была решена в [1]. В работе [3] (в приложении к струйным течениям) была исследована асимптотика течения при $t\to\infty$ для расширения газа в затопленное пространство. В работах [1,3] рассмотрение проводилось в рамках теории идеальной жидкости.

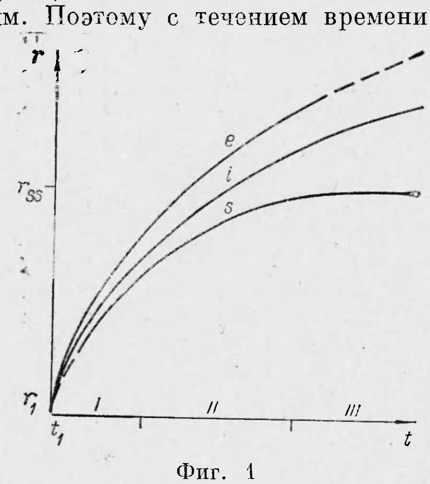
1. Постановка задачи. Пусть в бесконечном объеме покоящегося газа с известными параметрами состояния (p_∞, T_∞) выделена сферическая или цилиндрическая поверхность радиуса $r_1\neq 0$. Требуется определить развитие течения газа в области (r_1, ∞) с течением времени, если в некоторый момент $t=t_1$ параметры газа на поверхности $r=r_1$ скачком приобретают заданные значения $p_1>p_\infty$, T_1, $u_1\geqslant 0$ ($M_1\geqslant 1$), не меняющиеся с течением времени.

2. Общая картина течения. Проследим процесс развития течения при радиальном расширении газа (идеальной жидкости) в затопленное пространство от внезапно включенного стационарного источника с $M_1\geqslant 1$. При этом частично будем пользоваться результатами работ [1,3]. Качественная картина течения для $\nu=1$ и $\nu=2$ аналогична.

На фиг. 1 показаны пути движения поверхностей сильного разрыва, определяющих структуру области течения. Буквами i, e, s обозначены соответственно контактная поверхность, разделяющая газ источника и окружающий газ, ударная волна в окружающем газе, ударная волна в газе источника.

В начальный момент времени $t=t_1$ скорость движения контактной поверхности $V_i=u_1$. Газ источника воздействует на окружающий подобно расширяющемуся цилиндрическому или сферическому поршню, и, поскольку по условиям задачи $u_1>0$ достигается мгновенно, волна сжатия в окружающем газе в момент t_1 будет центрированной. Поэтому следует считать, что сжатие окружающего газа с самого начала истечения будут происходить с участием ударной волны (e).

С ростом r_i масса окружающего газа, вытесняемого «поршнем» и приводимого им в движение, и противодействие окружающего давления возрастают, тогда как движущий импульс, поставляемый источником в единицу времени, остается неизменным. Поэтому с течением времени движение поверхности i замедляется, что в свою очередь мешает свободному расширению газа, вытекающего из источника, и ведет к его накоплению перед поверхностью i и сжатию. В начальный период истечения процесс сжатия газа будет изэнтропическим, поскольку при $t=t_1$ скорость поверхности i равна скорости «натекающего» на нее газа и разница в скоростях растет во времени непрерывно. Со временем волна изэнтропического сжатия переходит в ударную волну, путь движения которой показан сплошной кривой s; штриховой участок кривой соответствует стадии изэнтропического



Фиг. 1

сжатия. Течение газа в области (r_1, r_s) (под сплошной кривой) не возмущено и совершается так, как если бы газ истекал в вакуум.

При $t\to\infty$ r_i, $r_e\to\infty$. При этом $V_i\to 0$ и волна e вырождается в слабое возмущение. Одновременно давление окружающего газа p_∞ становится определяющим в области (r_s, r_i), в результате чего ударная волна s стремится к некоторому фиксированному положению $r_s=r_{ss}$, определяемому величиной $\sim r_1(p_{01}/p_\infty)^{1/\nu}$ [3].

В дальнейшем будем пользоваться следующей терминологией (см. фиг. 1): I — начальный этап расширения $(r_e-r_i\ll r_i;\ r_i-r_s\ll r_i;\ r_i\ll r_{ss})$; II — промежуточный этап расширения; III — заключительный этап расширения $(t\to\infty;\ r_i\to\infty;\ r_e\to\infty;\ r_s\to r_{ss})$.

3. Основные закономерности движения поверхностей сильного разрыва на начальном этапе расширения газа в затопленное пространство. Ограничимся рассмотрением в рамках теории идеальной жидкости модельной задачи о расширении газа от внезапно включенного стационарного источника с $M_1^2\gg 1$. Условия в затопленном пространстве возьмем типичными для практики: $\rho_\infty\ll\rho_1$; $T_\infty\ll T_{01}$. В предельном случае расширения газа в вакуум задача имеет простое решение: газ (в частности, его передний фронт, т. е. контактная поверхность) движется с почти постоянной скоростью $u\simeq u_{\max}\simeq u_1$, а распределения p, ρ и T в области (r_1, r_i) близки к таковым при стационарном расширении [1].

Исходя из закона сохранения импульса, определим движение контактной поверхности. Пользуясь соображениями теории тонкого сжатого слоя [4,5], будем считать, что на начальном этапе расширения масса газа, сосредоточенного в сжатом слое (r_s, r_e), движется в среднем со скоростью $V_i=\frac{dr_i}{dt}$. Поскольку по условиям задачи $M_1^2\gg 1$ и толщина сжатого слоя мала, воздействием давления за счет уширения трубок тока на движение газа можно пренебречь. Кроме того, можно пренебречь и противодавлением p_∞, так как для достаточно малых T_∞ (или, точнее, для $c_\infty^2\ll V_i^2$) торможение истекающего газа будет происходить в основном за счет вовлечения в движение вытесненного окружающего газа. С учетом этого уравнение сохранения импульса запишется в виде

$$\frac{d}{dt'}\left[(m'_{s,i}+m'_{i,e})\frac{dr'_i}{dt'}+2\nu\pi\int_{r'_1}^{r'_s}\rho' u' r'^{\nu}dr'\right]=2\nu\pi\rho'_1 u_1'^2 r_1'^{\nu},\tag{3.1}$$

где штрих обозначает размерную переменную, а $m'_{s,i}$ и $m'_{i,e}$ — соответственно массу газа в областях (r_s, r_i) и (r_i, r_e).

Ясно, что $m'_{i,e}$ приближенно равна массе вытесненного окружающего газа. В частности, для $r'_i\gg r'_1$

$$m'_{i,e}=\frac{2\nu}{\nu+1}\pi\rho'_\infty r_i'^{\nu+1}.\tag{3.2}$$

Для определения величины $m'_{s,i}$ воспользуемся уравнением сохранения массы истекающего газа. При $t'\gg t'_1$ приближенно

$$m'_{s,i}=2\nu\pi\rho'_1 u'_1 r_1'^{\nu} t'-2\nu\pi\int_{r'_i}^{r'_s}\rho' r'^{\nu}dr'.\tag{3.3}$$

В области (r_1, r_s) течение газа совершается так, как если бы газ расширялся в вакуум. В частности, когда $M_1^2 \gg 1$, имеем $u' \simeq u_1'$ и

$$\rho' r'^{\nu} = \rho_1' r_1'^{\nu}, \tag{3.4}$$

чем и воспользуемся для вычисления интегралов, входящих в (3.1) и (3.3). Заменив, кроме того, верхние пределы интегрирования в указанных интегралах на близкую величину r_i, после подстановки (3.2) и (3.3) в (3.1) и двухкратного интегрирования получим закон движения контактной поверхности:

$$(r_i - t)^2 = b r_i^{\nu+2} + C_1 t + C_2, \quad b \equiv \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} \rho_\infty, \tag{3.5}$$

где $r_i = r_i'/r_1'$; $t = t'u_1'/r_1'$; $\rho_\infty = \rho_\infty'/\rho_1'$. При r_i, $t = 0(1)$ из (3,5) и соответствующего ему дифференциального выражения первого порядка для постоянных интегрирования следует оценка C_1, $C_2 \leqslant 0$ (ρ_∞). Поэтому для r_i, $t \gg 1$ окончательно имеем

$$t = r_i + \sqrt{b}\, r_i^{\frac{\nu+2}{2}}. \tag{3.6}$$

При $r_i \ll b^{-1/\nu}$ (3.6) дает $r_i = t$, что соответствует решению для расширения газа в вакуум [1].

Влияние затопленного пространства начинает проявляться при $r_i = 0(b^{-1/\nu})$. Рассмотрим полученное решение при $r_i \gg b^{-1/\nu}$, где

$$r_i = b^{-1/\nu+2}\, t^{2/\nu+2}. \tag{3.7}$$

Возращаясь в (3.7) к размерным переменным

$$r_i' = \left[\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\, \frac{\rho_1' u_1'^2 r_1'^{\nu}}{\rho_\infty'}\right]^{-\frac{1}{\nu+2}} t'^{\frac{2}{\nu+2}}, \tag{3.8}$$

видим, что движение контактной поверхности для каждого $\nu = 1, 2$ определяется лишь двумя величинами — ρ_∞' и импульсом источника в единицу времени $I_1' = 2\pi\nu\rho_1' u_1'^2 r_1'^{\nu}$. При пренебрежении давлением p_∞' состояние газа в окружающем пространстве определяется одной, не равной нулю размерной величиной ρ_∞'. Поэтому и сам процесс течения газа в области (r_i, ∞) определяется лишь двумя размерными величинами — I_1' и ρ_∞'. Так как их размерности независимы, то в области (r_i, ∞) имеется автомодельное решение задачи, зависящее от ν, $\varkappa$ и единственной переменной [6]

$$\lambda = \left(\frac{I_1'}{\rho_\infty'}\right)^{-\frac{1}{2+\nu}} r' t'^{-\frac{2}{\nu+2}}. \tag{3.9}$$

Поверхностям сильного разрыва при этом соответствуют некоторые фиксированные значения λ.

Это решение сводится к известному решению задачи о вытеснении газа расширяющимся цилиндрическим или сферическим поршнем, движущимся по степенному закону $r_i' = C' t'^{n+1}$ (3.8). В частности, имеем

$$r_e(t) = \frac{\lambda_e}{\lambda_i} r_i(t); \quad \frac{\lambda_e}{\lambda_i} = a(n, \varkappa, \nu), \tag{3.10}$$

где $n=-\nu/(\nu+2)$. Для $\varkappa=1{,}4$ численные значения $a=a(n,\varkappa,\nu)$ даны в [7].

Для оценки величины $r_e(t)$ формулой (3.10) можно пользоваться и при $r_i\lesssim 0(b^{-1/\nu})$, поскольку величина a слабо зависит от показателя степени n (чего нельзя сказать о самом распределении параметров в области $(r_i,\ r_e)$). Так, например, для $\varkappa=1{,}4$ при максимальном изменении n для (3.6) (от 0 до $-\nu/(\nu+2)$) величина a для $\nu=1$ и $\nu=2$ меняется в пределах 5% возле некоторого $a_{\text{ср}}=1{,}13$ [7].

Найдем приближенный закон движения ударной волны s. Полагая, что в области $(r_s,\ r_i)$ $\rho'\simeq\rho'_{s-}(\varkappa+1)/(\varkappa-1)$, из (3.3) с помощью (3.4) получим

$$\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\frac{r_i^{\nu+1}-r_s^{\nu+1}}{r_s^{\nu}}=(\nu+1)(t-r_s),$$

где $t=t'u_1'/r_1'$, $r_\alpha=r_\alpha'/r_1'$. Или с учетом $r_i-r_s\ll r_i$

$$r_s=\frac{\varkappa+1}{2}\left(r_i-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,t\right). \tag{3.11}$$

Для расширения газа в вакуум, когда $r_i=t$, (3.11) дает верный результат: $r_s(t)=r_i(t)$.

Заметим, что формулы (3.6), (3.10), (3.11), определяющие законы движения поверхностей сильного разрыва i, e, s на начальном этапе расширения, позволяют перейти к новым переменным

$$\tau=\left(\frac{\rho_\infty'}{\rho_1'}\right)^{1/\nu}\frac{t'u_1'}{r_1'};\quad \xi_\alpha=\left(\frac{\rho_\infty'}{\rho_1'}\right)^{1/\nu}\frac{r_\alpha'}{r_1'};\quad \alpha=i,e,s,$$

в которых движение указанных поверхностей для различных ρ_∞'/ρ_1' будет дано едиными зависимостями.

Результаты проведенного выше рассмотрения позволяют объяснить некоторые закономерности движения поверхностей сильного разрыва при истечении ударно нагретого газа из плоской щели (аналог — $\nu=1$) и круглого отверстия ($\nu=2$) [2].

Предварительно заметим следующее. Условие $r_i\gg b^{-1/\nu}$ эквивалентно условию, что масса вытесненного окружающего газа $m_{i,e}'\left(\sim\rho_\infty' r_i'^{\nu+1}(t)\right)$ много больше массы газа, поступившего через источник, $m_{1,e}'\left(\sim\rho_1'u_1'r_1'^{\nu}t'\right)$. Это дает физическое объяснение тому факту, что закон движения контактной поверхности $r_i'=r_i'(t)$ определяется здесь лишь величинами ν, I_1' и ρ_∞'.

Разумно предположить, что и в случае расширения газа от источника с $M_1=1$, как это имеет место в экспериментах [2], на участке начального этапа расширения, где $m_{i,e}'\gg m_{1,i}'$ и $r_i'\gg r_1'$, движение контактной поверхности будет по-прежнему определяться двумя размерными величинами — $I_1'=2\nu\pi\left(\rho_1'u_1'^2+p_1'\right)r_1'^{\nu}$ и ρ_∞'. Тогда здесь справедливы рассуждения, которые выше привели к (3.9) — (3.10).

В [2] были экспериментально определены и представлены в виде зависимостей $x_\alpha=C_\alpha t^{n_\alpha}$ $(x'\simeq r')$ законы движения фронта истекающего газа $(\alpha=i)$ и ударной волны в окружающем газе $(\alpha=e)$. Анализ условий эксперимента показывает, что практически на всем начальном этапе рас-

		Эксперимент			Теория
		$\varkappa=9/7$	$\varkappa=7/5$	$\varkappa=5/3$	$\varkappa=9/7;\ 7/5;\ 5/3$
$\nu=1$	n_i	0,68	0,71	0,65	0,67
	n_e	0,71	0,71	0,69	
$\nu=2$	n_i	—	0,54	0,52	0,5
	n_e	—	0,66	0,63	

ширения условие $m'_{i,e} \gg m'_{1,i}$ выполнено. В таблице дано сравнение значений показателей степени n_α с теоретическими.

Для $\varkappa=1{,}4$ известны численные значения величины a из (3.10) [7]. Поэтому можно сравнить величину x_e/x_i с теоретической. Для истечения N_2 ($\varkappa=1{,}4$) из щели, где $n_e=n_i \simeq 0{,}67$, имеем $x_e/x_i=1{,}19$ и $r_e/r_i=1{,}16$.

4. Численный метод решения задачи для вязкого теплопроводного газа. Неустановившееся радиальное течение вязкого теплопроводного сжимаемого совершенного газа описывается следующей системой уравнений [8]:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\varkappa M_1^2}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{\mathrm{Re}_1}\left\{\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}(r^\nu u)-2\nu\frac{u}{r}\frac{\partial \mu}{\partial r}\right]\right\}; \tag{4.1}$$

$$\rho\frac{\partial T}{\partial t}+\rho u\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial r}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}_1}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\nu\mu\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}(\varkappa-1)M_1^2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2-\nu\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\left(\frac{u}{r}\right)^2\right]\right\}; \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}(r^\nu\rho u)=0; \tag{4.3}$$

$$p=\rho T, \tag{4.4}$$

где все величины отнесены к соответствующим при $r'=r'_1$; $t=t'u'_1/r'_1$; $\mathrm{Re}_1=\rho'_1u'_1r'_1/\mu'_1$, $M_1=u'_1/c'_1$; число Прандтля σ и отношение теплоемкостей $\varkappa$ предполагаются постоянными.

Исходя из общей постановки задачи и принимая во внимание характер системы уравнений (4.1)— (4.4), запишем граничные условия в следующем виде:

при $t=1$ $u=1$, $T=1$, $\rho=1$ для $r=1$;
$u=0$, $T=T_\infty$, $\rho=\rho_\infty$ для $1<r\leqslant\infty$;

при $t>1$ $u=1$, $T=1$, $\rho=1$ для $r=1$;
$u=0$, $T=T_\infty$ для $r=\infty$.

Для нахождения значений u, T и ρ в области $(1, \infty)$ при $t>1$ предполагается использовать соответственно уравнения (4.1) — (4.3). Исключив из (4.1) — (4.2) с помощью (4.4) давление p и заметив появляющуюся при этом в (4.2) производную $\partial\rho/\partial t$ с помощью уравнения неразрывности (4.3), запишем систему уравнений в следующем линейном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_2\frac{\partial u}{\partial y}+A_3u=A_4; \tag{4.5}$$

$$(4.6)\qquad \frac{\partial T}{\partial t}+B_1\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+B_2\frac{\partial T}{\partial y}+B_3T=B_4;$$

$$(4.7)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+C_2\frac{\partial \rho}{\partial y}+C_3\rho=C_4,$$

где $y=y(r)$ — преобразование, переводящее $[1,\infty]\ni r$ в $[0,1]\ni y$; A_k, B_k, C_k — комплексы, остающиеся после выделения линейной части. Если учесть, что члены, содержащие произведения $u\frac{\partial u}{\partial y}$ и $T\frac{\partial T}{\partial y}$, включались соответственно в группы $A_2\frac{\partial u}{\partial y}$ и $B_2\frac{\partial T}{\partial y}$, запись (4.5) — (4.7) однозначно определяет вид A_k, B_k, C_k.

Как показывает опыт предыдущей работы [9], для решения задачи с приемлемой точностью и разумным объемом вычислений необходимо иметь конечно-разностную схему с точностью по пространству y не ниже $0(h^2)$. При аппроксимации уравнений (3.7), (3.8) конечными разностями можно воспользоваться неявной разностной схемой [9], имеющей точность аппроксимации $0(\tau+h^2)$ и для соответствующих линейных уравнений устойчивой при любом конечном τ/h^2, где τ и h — соответственно шаг по времени и по пространству y. В частности, для (4.5)

$$(4.8)\qquad \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}+A_{1i}^j\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+A_{2i}^j\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_{i-1}^{j+1}}{2h}+$$
$$+A_{3i}^j u_i^{j+1}=A_{4i}^j+0(\tau+h^2),$$

где i — номер разбиения по y $(0\leqslant i\leqslant N)$; j — номер временного слоя $(j\geqslant 0)$. Значения A_{ki}^j вычисляются следующим образом: величины, входящие в A_k алгебраически, полагаются равными своим значениям в узле (t^{j+1}, y_i), а производные по y вычисляются в точке i j-го слоя с помощью центральных разностей $0(h^2)$.

Аналогичным образом аппроксимируется и уравнение (4.6).

Несколько сложнее обстоит дело с уравнением гиперболического типа (4.7) (предполагаем, что C_k нам известны). Неявная разностная схема с естественной, в данном случае— правосторонней, аппроксимацией пространственной производной приводит к точности по пространству лишь $0(h)$ [10]. Поэтому поступим следующим образом. Из разложения ρ по y в окрестности точки (t^{j+1}, y_i) в ряд Тейлора имеем

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_i^{j+1}=\frac{\rho_{i+1}^{j+1}-\rho_i^{j+1}}{h}-\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_i^{j+1}\frac{h}{2}+0(h^2).$$

Заменив $\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_i^{j+1}$ соответствующей на j-ом слое, получаем

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_i^{j+1}=\frac{\rho_{i+1}^{j+1}-\rho_i^{j+1}}{h}-\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_i^{j}\frac{h}{2}+0(\tau+h^2).$$

Таким образом, разностная схема для (4.7) может быть записана в виде

$$(4.9)\qquad \frac{\rho_i^{j+1}-\rho_i^j}{\tau}+C_{2i}^j\frac{\rho_{i+1}^{j+1}-\rho_i^{j+1}}{h}+C_{3i}^j\rho_i^{j+1}+C_{4i}^j=$$
$$=C_{2i}^j\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_i^j\frac{h}{2}+0(\tau+h^2),$$

где $\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_i^j = \frac{\rho_{i+1}^j - 2\rho_i^j + \rho_{i-1}^j}{h^2}$, а C_{ki}^j вычисляются аналогично A_{ki}^j, B_{ki}^j.

Нетрудно убедиться [10], что при $C_\kappa = \text{const}$ (т. е. для линейного уравнения) схема (4.9) устойчива при любом конечном τ/h.

Величины u_i^{j+1} для $j \geqslant 0$ определялись с помощью метода прогонки [10] из системы уравнений $u_0^{j+1} = 1$, (4.8) для $1 \leqslant i \leqslant N-1$, $u_i^{j+1} = 0$. Аналогичным образом вычислялись и T_i^{j+1}. Величины ρ_i^{j+1} определялись из (4.9) с начальным условием $\rho_0^{j+1} = 1$. Необходимая для этого при $j \geqslant 1$ величина ρ_N^j определялась с помощью экстраполяции по $\rho_i^j (N-3 \leqslant i \leqslant N-1)$. В проведенных расчетах ρ_N^j совпадала с $\rho_N^0 = \rho_\infty$ с точностью до 5 значащих цифр.

В качестве $y = y(r)$ в расчетах использовалась функция $y = (2/\pi) \operatorname{arctg}[(r-1)/l]$, где $l = 0(r_{ss})$. Шаг по пространству h был принят равномерным, а величина шага по времени τ, в связи с тем, что скорость развития процесса по времени меняется с течением времени весьма значительно, выбиралась из соотношения

$$\tau^{j+1} A^j = \tau^1 A^0, \quad A^j = \max_{1<i<N-1} \left\{ \left(\frac{\partial \ln u}{\partial t}\right)_i^j, \left(\frac{\partial \ln T}{\partial t}\right)_i^j, \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)_i^j \right\}.$$

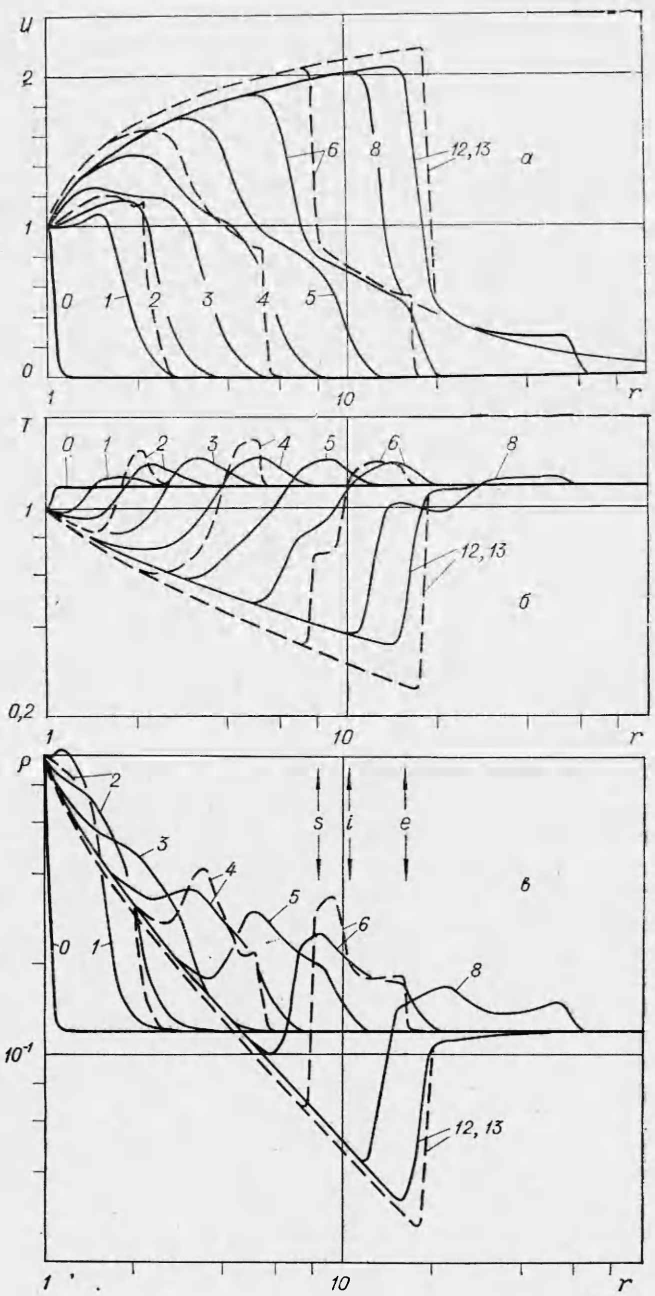
Процесс считался установившимся, если $A^j \leqslant \varepsilon$. Величины τ^0, h, ε подбирались экспериментально так, чтобы при их изменении в 5 раз, отличие в распределении параметров в сходные моменты времени не отличалось на величину, большую чем 2—3%.

5. Результаты численного решения задачи для вязкого теплопроводного газа. На фиг. 2 в качестве примера, иллюстрирующего развитие течения вязкого теплопроводного газа, даны распределения параметров потока для расширения газа от внезапно включенного цилиндрического источника ($\nu=1$) с $M_1 = M_* = 1$ в среду с $\rho_\infty = 0{,}12$, $T_\infty = T_{0*} = 1{,}2$. Здесь $\varkappa = 7/5$, $\sigma = 3/4$, $\mu = T$.

Цифрой 0 помечены распределения параметров, соответствующие моменту $t_0 = 1$. Эти распределения, представляющие собой сглаженные разрывы, задавались в расчетах в качестве исходных. Цифрами *1—13* помечены моменты по времени $t_\kappa = 1 + 0{,}32 \cdot 2^\kappa$. Сплошные линии соответствуют $\mathrm{Re}_* = 25$, штриховые — $\mathrm{Re}_* = 200$. Стрелочками с индексами s, i, e показаны условные в пределах 5—7% положения соответствующих поверхностей сильного разрыва для момента $t_6 = 11{,}28$ (здесь и далее термин «поверхность» будет употребляться в случае, когда рассматриваются интегральные характеристики ударных волн или контактной зоны: положение, перепад параметров и т. д.).

Общая картина течения соответствует изложенной в п. 2. Ударная волна e формируется практически сразу после начала истечения газа. Так, в момент t_2 отличие в величине $T/\rho^{\varkappa-1}$ «до» и «после» волны уже составляет 30% (для $\mathrm{Re}_* = 200$). Процесс сжатия газа перед внутренней поверхностью «поршня» i в течение некоторого времени продолжает быть изэнтропическим. Например, для того же Re_* в момент t_4 поведение ρ и T в области от $r = 1$ до точки с максимальным значением ρ еще подчиняется закону $T = \rho^{\varkappa-1}$ с точностью 5%. В момент времени t_6 ударная волна s уже сформирована.

Течение газа в области $(1, r_s)$ совершается так же, как при расширении в вакуум. Причем, поскольку в данном случае ρ_∞ и p_∞ достаточно велики, контактная поверхность движется медленнее, чем граница области

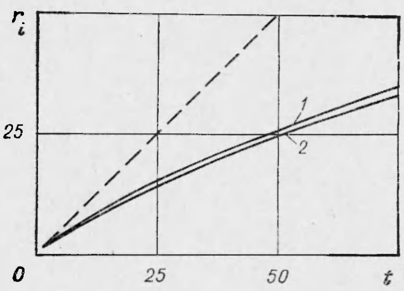


Фиг. 2

стационарного течения при расширении газа в вакуум [1]. Поэтому течение газа в области (1, r_s) стационарно. Оно обладает свойствами, присущими стационарному радиальному течению при расширении газа в вакуум [9]. Заметим, что влияние Re_*, $\varkappa$, σ и зависимости $\mu=\mu(T)$ для $\nu=1$ и $\nu=2$ проявляется здесь аналогичным образом.

Поведение параметров потока в области (r_i, r_e) на начальном этапе расширения (до $t=0$ (t_6)) качественно соответствует поведению параметров в задаче о поршне [7].

При $t \to \infty$ r_e, $r_i \to \infty$ и $r_s \to r_{ss}$. При этом в результате вырождения ударной волны e в слабое возмущение $T_{i+} \to T_\infty$. В то же время T_{i-} стремится к температуре торможения истекающего газа T_{0*}, в данном случае равной T_∞. Следовательно, $T_{i+} \to T_{i-}$. Поскольку на контактной поверхности, кроме того, $u_{i+}=u_{i-}$ и $p_{i+}=p_{i-}$, перепад параметров на ней при $t \to \infty$ исчезает, и течение приходит к стационарному режиму.



Фиг. 3

Следует отметить, что уменьшение общей сплошности потока (уменьшение Re_*), приводящее к значительному изменению параметров во всей области течения, на мгновенном положении ударных волн и контактной поверхности сказывается довольно слабо.

Качественная картина течения для случая сферического $(\nu=2)$ расширения вязкого теплопроводного газа в затопленное пространство с $T_\infty = T_{0*}$ вполне аналогична описанной выше. Существенное различие между случаями $\nu=1$ и $\nu=2$ проявляется при $T_\infty \neq T_{0*}$ и касается в основном заключительного этапа расширения. Этот вопрос требует специального рассмотрения и в данной статье обсуждаться не будет.

На фиг. 3 дано сравнение зависимостей $r_i = r_i(t)$ для начального этапа расширения газа при $\nu=1$, найденных с помощью приближенного рассмотрения п. 3 (формула (3.6), кривая *1*) и по результатам численного расчета (кривая *2*). Здесь $\varkappa=7/5$; $M_1=5$; $\rho_\infty'/\rho_1'=0{,}123$; $T_\infty'/T_1'=0{,}145$. Для достижения лучшей точности приближенного решения в (3.2) вместо r_i' была введена, согласно (3.10), величина $r_e'=ar_i'$, по физическому смыслу соответствующая $m_{i,e}'$. Это привело к новому виду величины в (3.6): $b = \dfrac{2a^{\nu+1}}{(\nu+1)(\nu+2)}\rho_\infty$, $a=1{,}13$. Дополнительные условия для численного расчета: $\sigma=3/4$; $\mu=T$; $\mathrm{Re}_1=400$. Штриховой линией для наглядности показана зависимость $r_e=t$, соответствующая расширению в вакуум.

Приближенные зависимости $r_e(t)$ и $r_s(t)$, определяемые формулами (3.6), (3.10) с $a=1{,}13$, (3.11), согласуются с теми же по результатам численного расчета с точностью 5—10%.

Автор благодарит А. К. Реброва за полезные обсуждения.

Поступила 4 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гусев В. Н.** К вопросу о запуске сверхзвуковых сопел.— «Инж. журн»., 1961, № 1.
2. **Набоко И. М., Белавин В. А., Голуб В. В., Опара А. И.** Исследование нестационарной структуры потока при истечении ударно нагретого газа.— ПМТФ, 1973, № 5.
3. **Simons G. A.** The large time behavior of a steady spherical source expanding into an arbitrary ambient gas.— «AIAA Paper», 1970, N 70—232.
4. **Черный Г. Г.** Задача о точечном взрыве.— «Докл. АН СССР», 1957, т. 112, № 2.
5. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
6. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965.
7. **Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В.** Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
8. **Широков М. Ф.** Физические основы газодинамики. М., Физматгиз, 1958.
9. **Ребров А. К., Чекмарев С. Ф.** Сферическое истечение вязкого теплопроводного газа в затопленное пространство.— ПМТФ, 1971, № 3.
10. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.