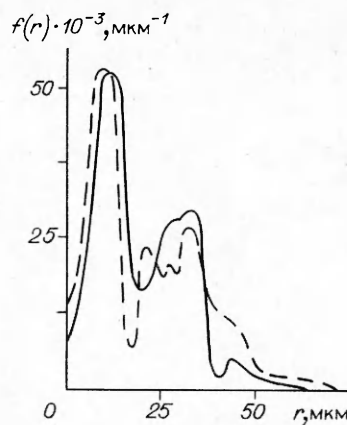


Р и с. 4



Р и с. 5

Таким образом, экспериментальные данные показывают, что электрообработка приводит к существенному изменению структуры порового пространства среды и увеличению ее проводимости. Необходимо отметить, что изменение проводимости капилляров является квазиобъемным и существенно отличается от случая, когда проводимость среды меняется в результате ее электропробоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Селяков В. И. Рост трещины в пористой насыщенной среде при пропускании через нее импульса тока // ПМТФ.— 1984.— № 4.
2. Селяков В. И. Изменение проницаемости среды при пропускании через нее электрического тока // VI Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Тез. докл.— Ташкент: Фан, 1986.
3. Селяков В. И. Изменение проводимости неоднородной среды, связанное с пропусканием через нее электрического тока // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987.
4. Селяков В. И. Проводимость зернистых и кавернозных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1986.— № 12.
5. Глушко С. П. О восстановлении функции плотности распределения капилляров по размерам // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987.

г. Москва

Поступила 15/XII 1988 г.,
в окончательном варианте — 7/VIII 1989 г.

УДК 532.58

В. А. Городцов

ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕЛ В ОДНОРОДНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Анализируется асимптотический вид зависимости от скорости (числа Фруда) потерь энергии (волнового сопротивления) на излучение внутренних волн нелокальными распределениями массовых источников, эквивалентными движущимся телам. Для трехмерных тел, быстро движущихся в безграничной однородно стратифицированной жидкости и в волновом слое конечной глубины, асимптотики оказываются близкими (волновое сопротивление $R \sim \ln Fr / Fr^2$ и $R \sim 1 / Fr^2$ соответственно). Причем для малых тел ведущий член асимптотики зависит только от дипольного момента распределений источников, который может подсчитываться в рамках теории однородной жидкости, и пропорционален объему тела.

Для одномерных распределений источников, вытянутых в направлении движения, имеет место «парадокс бесконечного волнового сопротивления». Логарифмически расходящимися оказываются интеграл по волновым числам в безграничной задаче и ряд по модам в задаче о волноводе из-за логарифмически большого вклада коротких волн (волновых мод с большими номерами).

В плоской задаче для безграничной жидкости волновое сопротивление при больших скоростях обратно пропорционально числу Фруда, в то время как в случае волновода с ростом скорости падает число возбуждаемых мод, а при сверхкритических скоростях излучение исчезает совсем.

1. Горизонтальное движение в безграничной жидкости. Если возмущения, вызываемые движущимся в стратифицированной по плотности несжимаемой тяжелой жидкости телом, можно считать малыми и заменить воздействие тела эквивалентным влиянием некоторого распределения массовых источников m , то возмущения скорости \mathbf{v} , плотности ρ и давления p будут находиться из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{N^2}{g^2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = m,$$

которые записаны в приближении Буссинеска, а плотность невозмущенного состояния после учета частоты плавучести $N(z)$ положена равной единице.

В случае безграничной однородно стратифицированной ($N = \text{const}$) жидкости потеря энергии на единицу пути (волновое сопротивление) горизонтально равномерно движущимся массовым источником представляется в соответствии с этими уравнениями интегральной квадратичной по источнику формой [1, 2]

$$(1.1) \quad R = \frac{1}{v_0} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') m(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}'),$$

$$2\pi^2 v_0 w(\mathbf{r}) = \int_0^N d\omega \sqrt{N^2 - \omega^2} \cos \frac{\omega x}{v_0} F\left(\frac{\omega}{v_0} \sqrt{y^2 + z^2 - \frac{N^2}{\omega^2} z^2}\right).$$

Здесь направление оси x совпадает с направлением движения, функция $F(\xi)$ сводится к цилиндрическим функциям $K_0(\xi)$ при $y^2 + z^2 > N^2 z^2 / \omega^2$ и $-(\pi/2) Y_0(\xi)$ при обратном неравенстве.

При больших скоростях движения источника ядро квадратичной формы можно записать в виде разложения

$$(1.2) \quad w(\mathbf{r}) = \frac{a_1 \ln v_0 + b_1}{v_0} + \frac{a_2 \ln v_0 + b_2}{v_0^2} + O\left(\frac{\ln v_0}{v_0^5}\right),$$

численные коэффициенты которого даются выражениями

$$a_1 = \frac{N^2}{8\pi}, \quad a_2 = \frac{N^4(y^2 - 2x^2 - 3z^2)}{128\pi}, \quad b_1 = -\frac{N^2}{8\pi} I_1,$$

$$b_2 = \frac{N^4}{128\pi} [4z^2 I_1 + (2x^2 - y^2 - z^2) I_2 + y^2 - 3z^2],$$

$$I_n(y, z) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\alpha \sin^2(n\alpha) \ln\left(\frac{\gamma N}{2} \sqrt{|z^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha|}\right).$$

Зависимость волнового сопротивления от скорости будет определяться в дополнение к указанной скоростной зависимости ядра $w(\mathbf{r})$ видом распределения массовых источников. Для распределений, моделирующих обтекаемое несжимаемой жидкостью тело, суммарная интенсивность источников, пропорциональная полному потоку массы, должна обращаться в нуль, и потому слагаемое с a_1 выпадает из формулы для волнового сопротивления. При моделировании тел с помощью распределений дипольного типа

$$(1.3) \quad \int d\mathbf{x} m(\mathbf{r}) = 0, \quad d \equiv \int d\mathbf{r} x m(\mathbf{r}) \neq 0$$

разложение волнового сопротивления по скоростям, соответствующее

(1.2), примет вид

$$(1.4) \quad R = \frac{N^4 d^2}{32\pi v_0^4} (\ln v_0 + C) + O\left(\frac{\ln v_0}{v_0^6}\right),$$

$$Cd^2 = - \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' xx' m(\mathbf{r})m(\mathbf{r}') I_2(y - y', z - z').$$

Замечательно, что главный высокоскоростной вклад здесь определяется такой общей характеристикой распределений источников, эквивалентных телу (часто неизвестных или трудно находимых), как полный дипольный момент d . Однако уже следующий член разложения зависит от гораздо больших деталей этих распределений, а следовательно, и формы тел.

Кроме явно указанной зависимости от скорости имеется еще неявная зависимость вида массовых источников от нее. В однородной несжимаемой жидкости при линейном описании последняя также линейна: $m \sim v_0/l_0$, $d = d_0 \sim v_0 l_0^3$, ... (l_0 — характерный размер тела). В стратифицированной жидкости, характеризуемой частотой плавучести N , возникает безразмерный параметр $Fr = v_0/(Nl_0)$ и зависимость источника от скорости сложнее: $d = v_0 l_0^3 f(Fr) = d_0 f(Fr)/f(\infty)$, ...

Можно ожидать, что при больших скоростях для источников справедливы разложения по скорости, аналогичные обсуждавшимся выше, которые в пределе $Fr \rightarrow \infty$ будут приводить к результату для однородной жидкости (в частности, $d \rightarrow d_0$). Такое ожидание подтверждается примером с обтеканием цилиндра однородно стратифицированной жидкостью. Согласно [3, 4], для коэффициентов эквивалентного круговому цилиндру радиуса l_0 мультипольного разложения массового источника

$$m = - \left[d + q_1 \frac{\partial}{\partial x} + q_2 \left(3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \dots \right] \frac{\partial}{\partial x} \delta(\mathbf{r})$$

при больших Fr справедливы оценки

$$\frac{d}{d_0} = 1 - \frac{1}{2 Fr^2} \left(\ln \frac{2 Fr}{\gamma} + \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{\ln Fr}{Fr^4}\right),$$

$$\frac{q_1}{d_0 l_0} = \frac{1}{12 Fr^3} + O\left(\frac{\ln Fr}{Fr^5}\right), \quad \frac{q_2}{d_0 l_0^2} = O\left(\frac{1}{Fr^3}\right), \dots,$$

так что при точности $o(\ln Fr/Fr^2)$ можно ограничиться дипольным источником с дипольным моментом d_0 , характерным для однородной жидкости. Более того, оказывается [4], что такое приближение неплохо работает вплоть до $Fr \approx 1$.

Таким образом, оставляя только главные члены высокоскоростной асимптотики волнового сопротивления в формуле (1.4), можно подразумевать под характеристиками источников d и C их значения в однородной нестратифицированной жидкости $d_0 = v_0 l_0^3 \Delta_0$ и C_0 . Через Δ_0 , C_0 и Fr формулу для волнового сопротивления перепишем следующим образом:

$$(1.5) \quad R \approx \frac{N^2 l_0^4 \Delta_0^2}{32\pi} \frac{\ln Fr + C_0}{Fr^2}, \quad Fr \gg 1.$$

Для тела произвольной формы отношение $d_0/v_0 = l_0^3 \Delta_0$ складывается из объема тела и присоединенного объема (массы) [5]. В частности, для шара радиуса l_0 получается $d_0/v_0 = 4\pi l_0^3/3 + 2\pi l_0^3/3$, т. е. $\Delta_0 = 2\pi$.

Выражение коэффициента C через массовые источники упрощается при ограничении источниками, локализованными в горизонтальной ($z = 0$) или вертикальной ($y = 0$) плоскостях. Формула (1.4) с учетом

$$I_2(\xi, 0) = I_2(0, \xi) = I_1(0, \xi) - \frac{1}{4} = I_1(\xi, 0) + \frac{3}{4} = \ln \frac{\gamma N |\xi|}{4} + \frac{1}{4}$$

в случае плоских горизонтальных распределений дипольных источников

примет вид

$$(1.6) \quad R = \frac{N^4}{32\pi v_0^4} \int dy dy' \left(\ln \frac{4v_0}{\gamma N |y-y'|} - \frac{1}{4} \right) D(y) D(y'),$$

$$D(y) \delta(z) = \int dx xm(\mathbf{r}).$$

Для источников, размазанных по вертикальной плоскости, справедлива точно такая же формула с заменой $y \rightleftharpoons z$. Своим общим видом она напоминает известную формулу Кармана для волнового сопротивления удлиненного тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью [6]. Однако здесь массовые источники распределены по плоскости, а не только в одном направлении движения. Для одномерных продольных распределений, как ясно из (1.6) и исходной формулы (1.1), волновое сопротивление становится бесконечным. Этот парадокс бесконечного волнового сопротивления обязан преувеличению роли коротких поперечных внутренних волн, дающих логарифмически большие вклады в сопротивление, при таком моделировании тел. При учете же поперечной нелокальности моделирующих источников происходит интерференционное уничтожение этих вкладов.

2. Движение тела в слое конечной глубины. Волновое сопротивление массовых источников, равномерно горизонтально движущихся в горизонтальном волноводе между твердыми крышками $z = 0$ и $z = h$, заполненном стратифицированной жидкостью, представляется в виде суммы независимых вкладов различных волновых мод [1]:

$$(2.1) \quad R = \sum_n R_n = \frac{1}{v_0} \sum_n \int dx dx' w_n(x-x', y-y'; z, z') m(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}'),$$

$$w_n(x, y; z, z') = \int_0^\infty dk \frac{\omega_n^4 H(\kappa_n)}{2\pi k \sqrt{\kappa_n}} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_1} \frac{\partial \psi_n}{\partial z_2} \cos \frac{x\omega_n}{v_0} \cos \frac{y\sqrt{\kappa_n}}{v_0}.$$

Здесь интегрирование по z ведется от нуля до h ; $\kappa_n = k^2 v_0^2 - \omega_n^2$; $H(\kappa_n)$ — функция Хевисайда; $\psi_n = \psi_n(k, z)$ и $\omega_n = \omega_n(k)$ — собственные функции и собственные значения краевой задачи

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 + \frac{k^2}{\omega_n^2} N^2(z) \right] \psi_n(k, z) = 0, \quad \psi_n|_{z=0} = \psi_n|_{z=h} = 0.$$

Для распределений источников дипольного типа (1.3), эквивалентных обтекаемому телу, $w_n(0, y; z, z')$ не будет давать вклада в величину R , так что при оценке сопротивления тел по формуле (2.1) следует заменить w_n на $\delta w_n = w_n(x, y; z, z') - w_n(0, y; z, z')$. В случае больших скоростей движения ($v_0 \gg l_0 N_{\max}$, где $\omega_n < N_{\max} < \infty$) в первом приближении имеем $\delta w_n \approx \partial^2 w_n / \partial x^2|_{x=0} x^2/2$ и формула для волнового сопротивления может быть переписана в виде (ср. (1.6))

$$(2.2) \quad R = -\frac{1}{v_0} \sum_n \int dy dy' \int_0^h dz dz' \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \Big|_{x=0} D(y, z) D(y', z'),$$

$$D(y, z) = \int dx xm(\mathbf{r}).$$

Решение задачи на собственные значения для однородно стратифицированной жидкости является простым:

$$\omega_n^2 = k^2 c_n^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + (\pi n/h)^2}, \quad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{k^2 N^2 h}} \sin \frac{\pi n z}{h},$$

отыскание ядра в формуле для сопротивления (2.2) сводится к вычисле-

нию интеграла от элементарных функций:

$$(2.3) \quad -\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{N^4}{\pi^2 v_0^3 n} \cos \frac{\pi n z}{h} \cos \frac{\pi n z'}{h} I \left(\frac{\pi n |y - y'|}{h}, \frac{Nh}{\pi v_0} \right),$$

$$I(\xi, \eta) \equiv \int_0^\infty dq \frac{q^2 I_0 \left(q \sqrt{1 + q^2 - \eta^2} \right)}{\sqrt{(1 + q^2)^5 (1 + q^2 - \eta^2)}} \cos \left(\xi q \sqrt{\frac{1 + q^2 - \eta^2}{1 + q^2}} \right).$$

Последний особенно прост при $\eta \ll 1$:

$$(2.4) \quad I(\xi, 0) = (\pi/16)(1 + |\xi| - \xi^2) \exp(-|\xi|),$$

что позволяет написать формулу для волнового сопротивления тел, движущихся в волноводе со сверхкритическими скоростями $v_0 \gg \frac{Nh}{\pi} = c_{10} = \lim_{h \rightarrow 0} c_1 \geq c_1 > c_n$, т. е. быстрее всех внутренних волн, следующим образом:

$$(2.5) \quad R = \frac{N^2}{\pi^2 v_0^4} \sum_n \frac{1}{n} \int dy dy' I \left(\frac{\pi n}{h} |y - y'|, 0 \right) M_n(y) M_n(y'),$$

$$M_n(y) = \int_0^h dz \cos \frac{\pi n z}{h} \int dx xm(\mathbf{r}),$$

что дает асимптотическую зависимость сопротивления в волноводе от числа Фруда (при $Fr \gg 1$) степенного типа $R \sim 1/Fr^2$ (рассуждения аналогичны п. 1).

Главный член высокоскоростной асимптотики сопротивления тел в волноводе оказывается в отличие от подобной асимптотики для безграничной жидкости (ср. (1.6), (2.4), (2.5)) гораздо чувствительнее к конкретным особенностям эквивалентных распределений массовых источников и тем самым формы тел.

То, что высокоскоростная асимптотика $R \sim 1/Fr^2$ не переходит при увеличении глубины волновода ($h \rightarrow \infty$) в асимптотику для безграничной жидкости $R \sim \ln Fr/Fr^2$, не удивительно. Асимптотика для волновода является «промежуточной», поскольку получена в предположении $v_0 \pi \gg hN$.

Из (2.3)–(2.5) можно видеть, что вклад высших волновых мод с $n \gg n_0 = [h/(\pi l_0)]$ для распределений источников с поперечной нелокальностью в высокоскоростную асимптотику ($v_0 \gg c_{10}$) сопротивления мал. Имеется экспоненциальное (см. (2.4)) подавление вклада по горизонтали и в силу быстрой осцилляции (см. (2.5)) по вертикали.

Что касается низших мод с $n \ll n_0$ (подразумевается $n_0 \gg 1$), то для них результат (2.5) может быть значительно упрощен, и главный член высокоскоростной асимптотики для тел, малых по сравнению с глубиной волновода ($l_0 \ll h$), оказывается зависящим только от дипольного момента распределения источников. При этом следует помнить, что такое заключение верно только вне окрестностей нулей функций $\cos(\pi n z_0/h)$ (z_0 — координата горизонта движения центра симметрии тела), поскольку упрощение опирается на приближенную оценку

$$\int dy M_n(y) = \int d\mathbf{r} xm(\mathbf{r}) \cos \frac{\pi n z}{h} \approx d \cos \frac{\pi n z_0}{h},$$

требующую уточнения вблизи этих нулей.

В итоге в формуле для волнового сопротивления с приемлемой точностью можно ограничиться конечным числом слагаемых с особенно простым с упомянутой оговоркой видом младших членов суммы

$$(2.6) \quad R = \sum_{n \leq n_0} R_n, \quad R_n \approx \frac{N^4 d^2}{16\pi v_0^4} \frac{1}{n} \cos^2 \frac{\pi n z_0}{h} \quad (n \ll n_0).$$

Если же воспользоваться указанной здесь оценкой для всех членов суммы (а не только при $n \ll n_0$), то придем к приближенной формуле для сопротивления в волноводе:

$$R \approx \frac{N^4 d^2}{32\pi v_0^4} \ln \left(\frac{\gamma n_0}{2} \left| \sin \frac{\pi n z_0}{h} \right| \right) \approx \frac{N^2 l_0^3 \Delta_0^2}{32\pi \text{Fr}^2} \ln \frac{h}{l_0},$$

$$\text{Fr} \gg h/l_0 \gg 1.$$

Совершенно иное получается, если не принимать во внимание поперечной нелокальности моделирующих тело источников. Интеграл из (2.3), (2.5) при $\xi = 0$ сводится к полным эллиптическим интегралам

$$3\eta^4 I(0, \eta) = \begin{cases} \eta(\eta^2 - 1) K \left(\frac{1}{\eta} \right) - \eta(\eta^2 - 2) E \left(\frac{1}{\eta} \right), & \eta > 1, \\ 2(\eta^2 - 1) K(\eta) - (\eta^2 - 2) E(\eta), & \eta < 1 \end{cases}$$

и становится не зависящей от номера константой $I(0, 0) = \pi/16$ при $\eta = Nh/(\pi v_0 n) \ll 1$, т. е. для мод с большими номерами. Поэтому волновое сопротивление (см. (2.5)) для одномерных продольных распределений источников представляется логарифмически расходящимся при больших номерах рядом по модам (ср. (2.6)):

$$R \approx \frac{N^4 a^2}{i 6\pi v_0^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos^2 \frac{\pi n z_0}{h}.$$

Это аналогично ситуации в безграничной жидкости. В волноводном слое однородно стратифицированной жидкости конечной глубины вертикальная компонента волнового вектора k_z квантована ($k_z = \pi n/h$). Поэтому логарифмически большому вкладу с большими вертикальными компонентами волновых векторов в безграничной среде (п. 1) здесь соответствует логарифмически большой вклад высоких мод. В обоих случаях «парадокс бесконечного волнового сопротивления» обязан преувеличению вклада коротких поперечных волн при моделировании тел одномерными продольными распределениями.

3. Плоская задача. Еще резче проявляются различия между безграничной жидкостью и волноводом конечной глубины в двумерной задаче. Теперь формулу для волнового сопротивления в безграничной жидкости можно записать в виде интегральной квадратичной формы, аналогичной (1.1), с нижеследующим ядром $w(x, z)$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1}{2\pi v_0} \int_0^N d\omega \sqrt{N^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega x}{v_0} \cos \frac{z \sqrt{N^2 - \omega^2}}{v_0}.$$

Для распределений источников типа (1.3) при больших числах Фруда ($\text{Fr} = v_0/(Nl_0) \gg 1$) главный член асимптотики оказывается зависящим только от их дипольного момента, причем в рамках той же точности можно использовать дипольный момент из теории однородной жидкости:

$$(3.1) \quad R \approx \frac{N^3 d^2}{6\pi v_0^3} \approx \frac{N^2 l_0^3 \Delta_0^2}{6\pi \text{Fr}}, \quad \text{Fr} \gg 1.$$

Здесь $\Delta_0 = d_0/(v_0 l_0^2)$ — безразмерный дипольный момент распределения массовых источников, эквивалентного обтекаемому телу в однородной жидкости. Для кругового цилиндра радиуса l_0 он равен 2π .

При поперечном горизонтальном движении цилиндрического тела в волноводном слое конечной глубины волновое сопротивление эквивалентного телу распределения массовых источников представляется сум-

мой независимых вкладов конечного числа мод [1]:

$$R = \sum_n \bar{R}_n = \frac{1}{v_0} \sum_n \int dx dx' \int_0^h dz dz' w_n(x-x'; z, z') m(x, z) m(x', z'),$$

$$w_n(x; z, z') = \frac{v_0^5}{2} \left| \frac{\partial c_n^2}{\partial k^2} \right|_{k=k_n}^{-1} \cos k_n x \frac{\partial \psi_n(k_n, z)}{\partial z} \frac{\partial \psi_n(k_n, z')}{\partial z'} H(c_{n0} - v_0)$$

(k_n — единственный корень уравнения $c_n(k) = v_0$ с фиксированным номером). Из формулы для w_n ясно, что ряд по модам обрывается на слагаемом, для которого $c_{n+1,0} < v_0 < c_{n0}$. В силу монотонности уменьшения скоростей внутренних волн с ростом номера моды очевидно, что с увеличением скорости движения тела убывает число возбуждаемых волновых мод.

В случае однородно стратифицированной ($N = \text{const}$) жидкости волновое сопротивление тел, моделируемых распределениями типа (1.3), при больших числах Фруда ($\text{Fr} = v_0/(Nl_0) \gg 1$) запишем в упрощенном виде

$$R = \frac{\pi^2}{h^3} \sum_{n=1}^{n_m} n^2 M_n^2 H(c_{n0} - v_0),$$

$$M_n = \int_0^h dz \cos \frac{\pi n z}{h} \int dx x m(x, z), \quad n_m \equiv \left[\frac{Nh}{\pi v_0} \right].$$

Далее, поскольку условие излучения волн в плоской задаче подразумевает $n_m \geq 1$, в рамках той же точности можно перейти от величины M_n к дипольному моменту d ($M_n \approx d \cos \pi n z_0/h$) с такой же оговоркой относительно узловых точек, что и в п. 2. После этого сумма по модам легко вычисляется:

$$(3.2) \quad R = \frac{\pi^2 d^2}{12h^3} \left\{ n_m(n_m + 1)(2n_m + 1) - \frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \frac{\sin(2n_m + 1)\zeta}{\sin \zeta} \right\},$$

$$n_m = \left[\frac{Nh}{\pi v_0} \right] \geq 1, \quad \zeta \equiv \frac{\pi z_0}{h}.$$

Здесь асимптотическая формула получена для произвольного распределения источников дипольного типа (1.3) в пределе больших значений Fr . Она совпадает с точной формулой для точечного диполя, верной для него при любых Fr [1].

При $n_m \gg 1$ формула сопротивления для волновода (3.2) переходит в формулу для безграничной жидкости (3.1). Это происходит благодаря выполнению здесь условий $Nh/\pi \gg v_0 \gg Nl_0$. С ростом скорости движения тела число возбуждаемых мод в плоской задаче падает (при $Nh > \pi v_0 > Nh/2$ возбуждается только одна первая мода), и при сверхкритических скоростях (в однородно стратифицированной жидкости при $v_0 > c_{10} = Nh/\pi$) излучение вообще будет отсутствовать. В этом отличительная особенность плоской задачи о волноводе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Городцов В. А., Теодорович Э. В. К теории волнового сопротивления (поверхностные и внутренние волны) // Н. Е. Кочин и развитие механики. — М.: Наука, 1984.
2. Городцов В. А. Излучение внутренних волн быстро движущимися источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // ДАН СССР. — 1981. — Т. 256, № 1.
3. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Обтекание цилиндра потоком однородно стратифицированной жидкости // Современные проблемы механики сплошных сред. — М.: МФТИ, 1985.

4. Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В. Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. — М., 1986. — (Препр./АН СССР, Ин-т пробл. механики; № 282).
 5. Ламб Г. Гидродинамика. — М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
 6. Карман Т. Сверхзвуковая аэродинамика. — М.: ГИТЛ, 1948.

г. Москва

Поступила 11/XII 1989 г.

УДК 532.517.4 + 532.526

О. Б. Буднева, О. А. Лихачёв

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО КРУПНОМАСШТАБНОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ СЛЕДЕ

В работе представлены результаты теоретического исследования отклика турбулентного плоского следа на внешнее гармоническое возмущение. Идейные предпосылки и используемый подход к данной проблеме изложены в [1]. Кроме иной, чем в [1], геометрии течения, здесь рассматривается влияние изменения турбулентной вязкости поперек потока на развитие крупномасштабных возмущений.

1. Автомодельный турбулентный плоский след. Согласно [1], для автомодельного следа введем турбулентное число Рейнольдса

$$(1.1) \quad \text{Re}_\tau = u_0 b / \nu_\tau (\equiv \text{const}),$$

где $\nu_\tau(X) \sim u_0 b$ — характерная турбулентная вязкость в поперечном сечении следа при продольной координате $X = (x - x_0)$, отсчитываемой от фиктивного начала x_0 ; u_0 , b — локальные масштабы скорости и длины. Последний вводится соотношением

$$(1.2) \quad b = (\nu_\tau X / U_\infty)^{1/2}.$$

Сила сопротивления тела при его обтекании потоком со скоростью U_∞ имеет вид

$$(1.3) \quad F = \rho \int_{-\infty}^{\infty} U(U - U_\infty) dy \quad (\equiv \rho U_\infty^2 \theta)$$

(θ — толщина потери импульса). Среднюю скорость течения в дальних автомодельных следах представим как

$$(1.4) \quad U = U_\infty [1 - \varepsilon \varphi_0(\eta)], \quad V = U_\infty \varepsilon^2 \gamma_0(\eta)$$

($\varepsilon = u_0 / U_\infty \ll 1$, $\eta = y/b$ — безразмерная поперечная координата). Соотношение (1.3) перепишем следующим образом:

$$(1.5) \quad \theta = \varepsilon b J_1 - \varepsilon^2 b J_2, \quad J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^n(\eta) d\eta, \quad n = 1, 2.$$

Пренебрегая в (1.5) членом порядка $O(\varepsilon^2)$ и используя соотношения (1.1) и (1.2), получим выражения для локальных масштабов

$$(1.6) \quad u_0 / U_\infty = C(X / \text{Re}_\tau)^{-1/2}, \quad b = C(X / \text{Re}_\tau)^{1/2}, \quad C = (\theta / J_1)^{1/2}.$$

Представим Re_τ в виде, удобном для экспериментального определения:

$$(1.7) \quad \text{Re}_\tau = (X u_0) / (b U_\infty).$$

Согласно условию автомодельности потока, рейнольдсовы напряжения имеют вид

$$(1.8) \quad \overline{u'v'} = u_0^2 \sigma(\eta).$$

Пренебрегая вязкими напряжениями и членами порядка $O(\varepsilon^2)$ и используя соотношения (1.7) и (1.8), из осредненных уравнений движения по-