N, мн	D, мм	Параметры оптимальных проектов						
		x_1, мм	x_2	x_3	x_4, мм	x_5, мм	x_6, год	G, кг/год
100	1	4,8	18	6	8,0	7,0	8	7,02
100	2	4,9	18	6	8,2	7,2	8	7,35
100	3	5,0	18	6	8,5	7,3	8	7,68
300	1	6,0	19	8	8,0	7,0	7	9,88
300	2	6,3	19	8	8,2	7,2	7	10,42
300	3	6,5	19	8	8,5	7,3	7	10,84
500	1	7,1	21	9	8,0	7,0	6	13,01
500	2	6,9	21	9	7,8	6,8	6	12,37
500	3	6,6	21	9	7,5	6,5	6	11,44
1000	1	9,2	24	11	8,0	7,0	4	23,63
1000	2	8,8	24	11	7,6	6,6	4	21,45
1000	3	8,5	24	11	7,3	6,3	4	19,83

ходит равномерное уменьшение толщины обшивки, ширины стрингеров и шпангоутов; при этом их количество в отдельности, а также долговечность всей конструкции остаются постоянными. Это объясняется, видимо, тем, что рост механических напряжений в металле изменяет его структуру, ослабляет силы сцепления между его частицами, что при достижении нагрузкой определенного значения ведет к отслоению корродируемого металла, а с ростом максимальной глубины разрушения — к уменьшению толщины оболочки, ширины стрингеров и шпангоутов. Оптимальная долговечность оболочек, как и следовало ожидать, снижается с увеличением их нагруженности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иноземцев В. К., Синева Н. Ф.** Расчет на устойчивость тонкостенных элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой // Работоспособность материалов и элементов конструкций при воздействии агрессивных сред.— Саратов: Политехн. ин-т, 1986.
2. **Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С.** Ребристые цилиндрические оболочки.— Киев: Наук. думка, 1973.
3. **Амиро И. Я., Заруцкий В. А.** Методы расчета оболочек: В 5 т. Теория ребристых оболочек.— Киев: Наук. думка, 1980.— Т. 2.
4. **Криворучко Т. М., Почтман Ю. М.** Моделирование процесса потери устойчивости ребристых цилиндрических оболочек, подвергающихся коррозионному износу // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы моделирования и управления системами с распределенными параметрами».— Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1987.
5. **Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.** Обобщенная термомеханика.— Киев: Наук. думка, 1976.
6. **Овчинников И. Г.** О математическом прогнозировании коррозии металлических элементов конструкций.— Саратов, 1982.— Деп. в ВИНИТИ 28.04.82, № 2061—82.
7. **Гурвич И. Б., Захарченко В. Г., Почтман Ю. М.** Рандомизированный алгоритм для решения задач нелинейного программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1979.— № 5.

Поступила 11/I 1988 г.

УДК 534.222.2

ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОГО РАЗУПРОЧНЕНИЯ НА ПРОЦЕСС СХЛОПЫВАНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. В. Аттетков, В. В. Селиванов, В. С. Соловьев

(Москва)

В последние годы исследованию проблемы кумуляции энергии в процессе схлопывания несжимаемых оболочек различной геометрии уделяется все большее внимание. Результаты анализа процессов тепловой диссипации при схлопывании вязких оболочек нашли отражение в [1—3], жесткопластических — в [4], вязкопластических— в [5—10]. Возможность достижения значительных температурных градиентов и возникновения фазовых превращений (плавление, испарение) в слоях материала оболочки, примыкающих к внутренней поверхности,— основной вывод выполненных работ. Исследования [1—10] проведены в рамках феноменологической теории пластичности. При этом считалось, что необратимые деформации в элементе материала возникают, когда напряженное состояние этого элемента достигает предельной поверхности (поверхности текучести). Значит, использование при анализе постоянных вязкости η и предела текучести Y неявно предполагает оперирование с усредненными значениями этих величин.

Решение проблемы кумуляции тепловой энергии с учетом термического разупрочнения материала оболочки в настоящее время не имеет однозначной трактовки. Так, в [10] температурную зависимость вязкости предлагается учитывать путем выделения «нагретого» подслоя оболочки с соответствующим уменьшенным значением вязкости материала. При этом в уравнении движения зависимость Y и η от температуры не учитывается. В [11] данный вопрос анализируется применительно к задаче схлопывания сферической вязкопластической оболочки. Показано, что с учетом эффектов термического разупрочнения задача определения скорости движения внутренней поверхности сферической оболочки сводится к решению интегродифференциального уравнения. Выражение для внутренней энергии получено на основе ее ассоциации с энергией, затрачиваемой на сжатие оболочки.

Рассмотрим альтернативный способ получения замкнутой системы уравнений, а также обсудим возможные способы учета эффектов термического разупрочнения в задачах схлопывания несжимаемых вязкопластических оболочек. Пусть цилиндрическая или сферическая оболочка деформируется под действием постоянного внешнего давления P (a и b — внутренний и внешний радиусы оболочки). Материал оболочки предполагается однородным, изотропным, несжимаемым, подчиняющимся определяющим соотношениям вязкопластической среды.

Уравнения неразрывности, движения, притока тепла и определяющие соотношения с учетом принятых допущений запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\nu} v\right)=0; \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right); \tag{2}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+v\frac{\partial e}{\partial r}=\frac{c\varkappa}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\nu}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\Phi; \tag{3}$$

$$\sigma_r-\sigma_\theta=Y+2\eta\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right). \tag{4}$$

Здесь t — время; r — эйлерова координата; v — скорость радиального движения; ρ — плотность; e — внутренняя энергия; T — температура; c — удельная теплоемкость; $\varkappa=\lambda/(c\rho)$ — температуропроводность; ν — параметр геометрии, равный 1 и 2 для цилиндрической и сферической симметрии соответственно; σ_r и σ_θ — главные напряжения, причем $\sigma_z=(\sigma_r+\sigma_\theta)/2$ при $\nu=1$ — плоскодеформированное состояние, $\sigma_\varphi=\sigma_\theta$ при $\nu=2$.

Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$t=0:\ r(0)=r_0,\ v(r)=0,\ T(r)=T_0,\ e(r)=e_0,\ Y(r)=Y_0,\ \eta(r)=\eta_0; \tag{5}$$

$$r=a:\ v=\dot{a},\ \sigma_r=0,\ \partial T/\partial r=0;\ r=b:\ \sigma_r=-P,\ \partial T/\partial r=0,$$

где $\dot{a}=da/dt$ — скорость движения внутренней поверхности; индекс 0 относится к начальным значениям величин; точка здесь и далее означает дифференцирование по времени.

Функция Φ в правой части уравнения (3) характеризует мощность диссипации, т. е. скорость образования тепла в единице массы вещества вследствие перехода механической энергии в тепловую. Учитывая, что мощность внутренней диссипации пропорциональна интенсивности скоростей деформации, можно записать

$$\Phi=\sigma_i\dot{\varepsilon}_i/\rho. \tag{6}$$

Здесь σ_i, $\dot{\varepsilon}_i$ — интенсивность напряжений и скоростей деформации: $\sigma_i = \frac{(\sqrt{3})^\nu}{\nu+1}(\sigma_r - \sigma_\theta)$, $\dot{\varepsilon}_i = -\frac{\nu(\nu+1)}{(\sqrt{3})^\nu}\frac{v}{r}$. С учетом последних соотношений выражение (6) преобразуется:

$$\Phi = -\frac{\nu Y}{\rho}\frac{v}{r} + 2\nu(\nu+1)\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{v}{r}\right)^2. \tag{7}$$

Таким образом, для рассматриваемых реологических моделей материалов существуют два источника внутренней диссипации, первый из которых связан с внутренними изменениями структуры, вызванными пластическими деформациями, а второй — с реологическими или вязкими свойствами.

Для определения закона движения оболочки введем среднее давление $p = -(\sigma_r + \nu\sigma_\theta)/(\nu + 1)$. С учетом данного равенства выражение для радиальных напряжений может быть представлено в форме

$$\sigma_r = -p + \frac{\nu}{\nu+1}(\sigma_r - \sigma_\theta). \tag{8}$$

Используя соотношения (4), (8) и принимая во внимание значение первого интеграла (1)

$$v = \dot{a}(a/r)^\nu, \tag{9}$$

преобразуем уравнение движения (2):

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{\nu+1}\frac{\partial Y}{\partial r} + \nu\frac{Y}{r} - 2\nu\frac{\dot{a}a^\nu}{r^{\nu+1}}\frac{\partial\eta}{\partial r}. \tag{10}$$

Импульс вязких сил в данном случае отличен от нуля. Следовательно, влияние вязкости на процесс будет сказываться не только через граничные условия, как это имеет место в модели с постоянными вязкостью и пределом текучести. Граничные условия определяются из (8) с учетом выражений (4), (5), (9) и относительно среднего давления имеют вид

$$p(a, t) = \frac{\nu}{\nu+1}Y(a, t) - 2\nu\frac{\eta(a, t)\dot{a}}{a}, \tag{11}$$

$$p(b, t) = P + \frac{\nu}{\nu+1}Y(b, t) - 2\nu\frac{\eta(b, t)\dot{a}a^\nu}{b^{\nu+1}}.$$

Интегрируя (10) по радиусу от a до r с учетом (9) и граничного условия (11) при $r = a$, получим распределение давлений

$$p(r, t) = -\rho\left\{(\ddot{a}a^\nu + \nu\dot{a}^2a^{\nu-1})f - \frac{\dot{a}^2}{2}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{2\nu}\right]\right\} - 2\nu\frac{\eta(a, t)\dot{a}}{a} +$$

$$+ \frac{\nu}{\nu+1}Y(r, t) + \nu\int_a^r\frac{Y(r', t)}{r'}dr' - 2\nu\dot{a}a^\nu\int_a^r\frac{\partial\eta(r', t)}{\partial r'}\frac{1}{r'^{(\nu+1)}}dr',$$

где $f = \begin{cases}\ln(r/a) & \text{при } \nu = 1,\\ (r-a)/(ar) & \text{при } \nu = 2.\end{cases}$ Отсюда с учетом (11) при $r = b$ запишем закон движения внутренней поверхности оболочки

$$\ddot{a} = \left\{\frac{1}{2Fa^\nu}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu}\right] - \frac{\nu}{a}\right\}\dot{a}^2 - \frac{2\nu\eta(a, t)\dot{a}}{\rho Fa^{\nu+1}}\left[1 - \frac{\eta(b, t)}{\eta(a, t)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\nu+1}\right] + \tag{12}$$

$$+ \frac{1}{\rho Fa^\nu}\left\{\nu\int_a^b\left[\frac{Y(r, t)}{r} - \frac{2\dot{a}a^\nu}{r^{\nu+1}}\frac{\partial\eta(r, t)}{\partial r}\right]dr - P\right\}.$$

Здесь $F = \begin{cases}\ln(b/a) & \text{при } \nu = 1,\\ (b-a)/(ab) & \text{при } \nu = 2;\end{cases}$ $Y(r, t)$ и $\eta(r, t)$ в последнем уравнении являются функциями температуры

$$Y = Y_0\varphi(T),\ \eta = \eta_0 g(T), \tag{13}$$

для определения которых необходимо привлекать дифференциальное уравнение притока тепла ($\varphi(T)$, $g(T)$ — известные безразмерные функции, описывающие зависимость предела текучести и вязкости от температуры).

Последовательно подставляя в уравнение (3) соотношения (7), (9) и учитывая, что $e = cT$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{\nu}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\varkappa}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\nu}\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \nu\frac{Y(r,\ t)\,\dot{a}a^{\nu}}{c\rho r^{\nu+1}} + 2\nu(\nu+1)\frac{\eta(r,\ t)\,\dot{a}^2a^{2\nu}}{c\rho r^{2(\nu+1)}}. \tag{14}$$

Краевые условия задачи (12)—(14) преобразуются к виду

$$t = 0\colon r(0) = r_0,\ \dot{a} = 0,\ T(r) = T_0,\ Y(r) = Y_0,\ \eta(r) = \eta_0; \tag{15}$$
$$r = a\colon \partial T/\partial r = 0;\ r = b\colon \partial T/\partial r = 0.$$

Система (12)—(15) замкнута и описывает нелинейные колебания несжимаемой вязкопластической оболочки. Учитывая, что при $t = 0$ $\dot{a} = 0$, $\ddot{a} \leqslant 0$, имеем $P \geqslant Y_*$, $Y_* = \nu Y_0 \ln(b_0/a_0)$ (Y_* — эффективный предел текучести материала при сжатии).

Рассмотренный подход приводит к отличной от [11] форме динамического слагаемого, описывающего реологические (вязкие) эффекты в уравнении движения вязкопластической оболочки. Это существенно и в практически важном случае, рассмотренном в [1, 2], где исследовался процесс кумуляции тепловой энергии при коллапсе вязкой цилиндрической оболочки. Очевидно, что и в задаче схлопывания вязкой оболочки учет температурной зависимости вязкости материала приводит к отличию в виде динамического слагаемого, описывающего реологические эффекты. В частном случае ($\eta = \eta_0 = \mathrm{const}$) уравнение (12) преобразуется к полученному в [1, 2]. При этом вязкость можно интерпретировать не только как усредненную характеристику материала, но и как величину, определяющую реологию поведения внутреннего слоя материала оболочки.

Альтернативный путь усовершенствования теории, учитывающей эффект термического разупрочнения материала, связан с использованием понятий усредненных характеристик $\langle Y\rangle = Y_0\varphi(\langle T\rangle)$, $\langle\eta\rangle = \eta_0 g(\langle T\rangle)$ ($\langle T\rangle = \langle T(t)\rangle$ — усредненная (по слою) температура). Уравнение движения внутренней поверхности оболочки (12) тогда преобразуется к рассмотренному в [1—10]. Подчеркнем, что построение решения при оперировании с $\langle Y\rangle$, $\langle\eta\rangle$ предполагает усреднение распределения температур $T(r)$ по соответствующей координате r на каждом временном шаге Δt.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Матюшкин Н. И., Тришин Ю. А.** Взрывное испарение вещества вязкой цилиндрической оболочки при ее схлопывании к центру // Письма в ЖТФ.— 1977.— Т. 3, вып. 10.
2. **Матюшкин Н. И., Тришин Ю. А.** О некоторых эффектах, возникающих при взрывном обжатии вязкой цилиндрической оболочкп // ПМТФ.— 1978.— № 3.
3. **Садовой А. А., Чулков И. М.** Распределение по толщине сферической оболочки диссипации кинетической энергии в тепловую за счет вязкости // ВАТН. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики.— 1982.— Вып. 3.
4. **Аттетков А. В., Селиванов В. В., Соловьев В. С.** Динамика деформирования сферической поры в пластическом материале // ПМТФ.— 1983.— № 1.
5. **Хасаинов Б. А., Борисов А. А., Ермолаев Б. С. и др.** Вязкопластический механизм образования «горячих точек» в твердых гетерогенных ВВ // Детонация: Матер. II Всесоюз. совещания по детонации.— Черноголовка: ОИХФ АН СССР, 1981.
6. **Khasainov B. A., Borisov A. A., Ermolaev B. S.** Shock wave predetonation processes in porous high explosives // Eighth Intern. Colloquium on Gasdynamics of Explosions and Reactive Systems.— Minsk, 1981.
7. **Аттетков А. В., Власова Л. Н. и др.** Локальный разогрев материала в окрестности поры при ее схлопывании // ПМТФ.— 1984.— № 2.

8. **Kim K. T., Sohn C.-H.** Modeling of reaction buildup processes in shocked porous explosives // Eighth Symp. (Intern.) on Detonation.— Albuquerque, 1985.— V. 2.
9. **Frey R. B.** Cavity collapse in energetic materials // Eighth Symp. (Intern.) on Detonation.— Albuquerque, 1985.— V. 1.
10. **Садовой А. А., Чулков Н. М.** Инерционное схождение цилиндрических и сферических оболочек из несжимаемых вязкопластических материалов // ВАТН. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики.— 1986.— Вып. 2.
11. **Carroll M. M., Kim K. T., Nesterenko V. F.** The effect of temperature on viscoplastic pore collapse // J. Appl. Phys.— 1986.— V. 59, N 6.

Поступила 28/I 1988 г.

УДК 539.3 : 534.1

ИЗГИБНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ДВИЖУЩЕЙСЯ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Н. И. Александрова, И. А. Поташников, М. В. Степаненко

(Новосибирск)

Анализ осесимметричных волновых процессов в бесконечных цилиндрических системах показывает [1, 2], что существуют критические скорости движения в осевом направлении поверхностной нагрузки, которая формирует резонансные возмущения. Если скорость нагрузки совпадает со «стержневой» ($c_s = \sqrt{E/\rho}$), реализуется длинноволновый резонанс продольных колебаний. Другая критическая скорость отвечает средневолновой части спектра и соответствует минимуму дисперсионной кривой первой моды.

Асимптотика роста резонансных волн в оболочках для сравнительно больших значений времени ($t \to \infty$) получена в [1—3]. Применимость асимптотического решения при конечных значениях времени исследована лишь для низкочастотных продольных резонансных процессов [2, 4, 5]. Ниже получена асимптотика изгибных резонансных волн для различного вида нагрузок и выявлена ее применимость для количественных оценок в ограниченных по длине системах. Определен вид нагрузки, при которой возмущения растут существенно быстрее, чем в других случаях.

Постановка задачи. Динамика оболочки описывается линейными уравнениями классической теории Кирхгофа — Лява

$$\ddot{u} = u_x'' + \nu w_x', \quad \ddot{w} = -\nu u_x' - w - \varepsilon w_x^{\mathrm{IV}} + Q/h, \quad \varepsilon = h^2/12, \tag{1}$$

где u, w — смещения оболочки в осевом x и радиальном направлениях; h — толщина оболочки; Q — действующая нагрузка. За единицы измерения приняты: $c = \sqrt{E/[\rho(1-\nu^2)]}$ — скорость звука в тонкой пластине (E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона); R — радиус оболочки; ρ — ее плотность. Начальные условия нулевые. В плоскости $x = 0$ выполняются условия симметрии ($w_x' = w_x''' = 0$, $u = 0$).

Рассматриваются нагрузки двух видов: а) по поверхности оболочки вдоль ее оси со скоростью c_0 движется ступенчатая волна нормального давления $Q = H_0(t)\, H_0(c_0 t - |x|)$ ($H_0(z)$— функция Хевисайда); б) амплитуда давления в волне изменяется по синусоидальному закону $Q = H_0(t) \times H_0(c_0 t - |x|) \sin(q_0|x| - \omega_0 t)$ ($\omega_0 = q_0 c_0$, q_0 — частота формы). Как частный случай исследуется ситуация, когда в сечении $x = 0$ приложена локальная нагрузка, осциллирующая с частотой ω_0: $Q = H_0(t) H_1(x) \times \sin \omega_0 t$ ($H_1(z)$— функция Дирака).

Применяя к уравнениям (1) интегральные преобразования Лапласа по t (значок L, параметр p) и Фурье по x (значок F, параметр q), получим решение в LF-изображениях:

$$w^{LF} = \frac{Q^{LF}}{h} \frac{p^2 + q^2}{A(p, q)}, \quad u^{LF} = -\frac{Q^{LF}}{h} \frac{i\nu q}{A(p, q)}, \tag{2}$$
$$A(p, q) = (p^2 + q^2)(1 + \varepsilon q^4 + p^2) - \nu^2 q^2$$

($A(p, q)$— дисперсионный оператор системы).

Уравнение $A(p = iqc, q) = 0$ описывает зависимость фазовой скорости c от волнового числа q ($q = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны). В частности, для обо-