ПМТФ, № 5, 1961

ДЕФОРМАЦИЯ СТЕРЖНЯ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

В. В. Андреев, А. М. Косевич, Л. В. Танатаров

(Харьков)

Исследуются деформации и напряжения в бесконечном несжимаемом стержне, вызванные движением границы раздела двух твердых фаз материала стержня, отличающихся удельными объемами. Предполагается, что относительное изменение объема тела при фазовом переходе превышает значение деформаций, соответствующих пределам упругости обеих фаз. Показано, что уравнения для деформаций сводятся к аналогичному уравнению в случае бесконечного плоского образца [1].

В ряде экспериментальных работ [2], посвященных исследованию фазовых переходов в твердом теле (превращений одной твердой фазы в другую твердую фазу) обнаружено, что если удельные объемы тела в двух фазах различны, то при фазовом переходе могут появиться необратимые изменения формы (остаточные деформации). Так как удельный объем материала, исследованного в упомянутых работах, менялся существенно при фазовом переходе [1], то можно думать, что одной из причин остаточных деформаций является пластический характер процесса деформирования на границе раздела фаз. Исходя из предположения, что эффект остаточного изменения формы полностью обусловлен пластичностью материала, деформация плоского образца твердого тела при фазовом переходе рассмотрена в работе [1]. В предлагаемой работе аналогичная задача решается для случая несжимаемого цилиндрического образца. Оказывается, что уравнения, описывающие деформацию несжимаемого цилиндра при фазовом переходе, формально совпадают с соответствующими уравнениями для случая плоского слоя, т. е. уравнениями работы [1].

§ 1. Анализ деформаций. Рассмотрим бесконечно длинный круговой цилиндрический образец (радиуса R) твердого тела, находящегося в начальный момент времени в фазе *1*. Пусть на поверхности образца температура достигает или превышает температуру фазового перехода $1 \to 2$. Тогда в образце, начиная с его поверхностей, образуется слой новой фазы *2*, причем, очевидно, что граница раздела фаз представляет собой цилиндрическую поверхность ($r = r_0$), коаксиальную оси стержня (ось цилиндрической системы координат естественно выбрать совпадающей с этой осью). Если считать, что скорость движения границы фаз много меньше скорости звука в материале стержня, то возникающие в стержне механические напряжения можно изучать при фиксированном положении этой границы. Другими словами, можно разделить задачу на две независимые: задачу теории теплопроводности о движении границы (аналогичную задаче о промерзании) и задачу о механических напряжениях и деформациях стержня при заданном положении границы. Считая скорость движения границы известной, будем интересоваться только второй задачей.

В силу симметрии задачи недиагональные элементы тензоров напряжений σ_{ik} и деформаций u_{ik} ($i = r, \varphi, z$) отсутствуют, а диагональные зависят только от цилиндрической координаты r, причем $u_{zz} = \text{const}$.

Предполагая для простоты материал стержня несжимаемым, из условия несжимаемости

$$u_{rr} + u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0 \qquad (1.1)$$

легко получить

$$u_{rr} = -\frac{1}{2} u_{zz} - \frac{c}{r^2}, \qquad u_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} u_{zz} + \frac{c}{r^2} \qquad (1.2)$$

---

[1] В работах [2] изучался $\gamma \to \alpha$ переход в железе, для которого изменение удельного объема порядка десятых долей процента.

В первой фазе ($0 < r < r_0$) постоянная $c = 0$, а во второй ($r_0 < r < R$) — определяется условиями на границе фаз. Чтобы сформулировать эти условия, обозначим относительное уменьшение удельного объема при переходе из фазы *1* в фазу *2* через $3\varepsilon^\circ$ (ε° — относительное изменение линейных размеров тела при фазовом переходе; для определенности положим $\varepsilon_0 > 0$). Геометрическую деформацию материала в фазе 2, как и в [1], удобнее определить так, чтобы недеформированному состоянию отвечало состояние стрежня при относительном изменении объема на — $3\varepsilon_0$. Тогда, следуя [1], граничные условия можно записать в виде

$$u_{zz}^{(2)} - u_{zz}^{(1)} = \varepsilon_0, \quad u_{\varphi\varphi}^{(2)} - u_{\varphi\varphi}^{(1)} = \varepsilon_0 \quad \text{при } r = r_0 \tag{1.3}$$

Здесь, как и в дальнейшем, индексом 1 обозначены величины, относящиеся к первой фазе, а индексом 2 — ко второй.

Из (1.3) следует, что постоянная c в фазе *2* равна

$$c = \frac{3}{2}\varepsilon_0 r_0^2 \tag{1.4}$$

Из (1.2), (1.3) и (1.4) видно, что все элементы тензора u_{ik} в обеих фазах могут быть выражены через какой-либо один, например, через $u_{zz}^{(2)}$. Действительно, обозначая $u_{zz}^{(2)} = v(r_0)$, имеем

$$u_{rr}^{(2)} = -\frac{1}{2}v(r_0) - \frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{r_0^2}{r^2}, \quad u_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{1}{2}v(r_0) + \frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{r_0^2}{r^2}, \quad u_{zz}^{(2)} = v(r_0) \tag{1.5}$$

$$u_{rr}^{(1)} = u_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{1}{2}v(r_0) + \frac{1}{2}\varepsilon_0, \quad u_{zz}^{(1)} = v(r_0) - \varepsilon_0 \tag{1.6}$$

Таким образом, задача о деформации несжимаемого стержня при фазовом переходе сводится к задаче об отыскании одной функции $v(r_0)$.

§ 2. Уравнение для $v(r)$. Для нахождения неизвестной функции $v(r_0)$ следует воспользоваться уравнением равновесия стержня

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r} = 0 \tag{2.1}$$

и граничными условиями для напряжений. При этом необходимо указать связь σ_{ik} и u_{ik}.

Так как внешние силы отсутствуют, то граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^{(2)} = 0 \quad \text{при } r = R, \\ &\sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(1)} \quad \text{при } r = r_0, \end{aligned} \quad \int_0^{r_0}\sigma_{zz}^{(1)}\,r\,dr + \int_{r_0}^{R}\sigma_{zz}^{(2)}\,r\,dr = 0 \tag{2.2}$$

Записывая уравнения состояния (уравнения связи σ_{ik} и u_{ik} в обеих фазах, заметим, что в силу (1.3) слой фазы *2*, появляющийся у границы фаз при ее движении, возникает растянутым и «приклеенным» к фазе *1*. В силу этого по мере продвижения границы в фазе *2* происходит разгрузка, обусловленная стремлением фазы *2* сжаться, а в фазе *1* — нагрузка, вызванная сжатием охватывающей ее фазы *2*.

Условие нагрузки в фазе *1* по теории упруго-пластических деформаций [3] можно представить в виде

$$\sigma_{zz}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(1)} = \Psi_1(J_1)\cdot(u_{zz}^{(1)} - u_{rr}^{(1)}) \tag{2.3}$$

где $\Psi_1(J_1)$ — некоторая функция, характеризующая пластический характер нагрузки в фазе *1* и зависящая от интенсивности деформаций J_1 в фазе *1*. Интенсивность деформаций J удобно определить выражением

$$J = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(u_{rr} - u_{\varphi\varphi})^2 + (u_{rr} - u_{zz})^2 + (u_{\varphi\varphi} - u_{zz})^2} \tag{2.4}$$

Из (1.6) и (2.4) следует, что в первой фазе σ_{ik} не зависит от r, а

$$J_1 = \varepsilon_0 - v(r_0) \tag{2.5}$$

Аналогично (2.3) запишем условие разгрузки в фазе *2*

$$\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{zz}^{\circ} - \sigma_{rr}^{\circ} + \alpha_2 (u_{zz}^{(2)} - u_{rr}^{(2)} - u_{zz}^{\circ} + u_{rr}^{\circ}) \tag{2.6}$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \sigma_{rr}^{\circ} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\circ} + \alpha_2 (u_{rr}^{(2)} - u_{\varphi\varphi}^{(2)} - u_{rr}^{\circ} + u_{\varphi\varphi}^{\circ}) \tag{2.7}$$

$$\alpha_2 = \mathrm{const}$$

Здесь индексом $^\circ$ обозначены величины, относящиеся к моменту начала разгрузки. Величины σ_{ik}° и u_{ik}° предполагаются связанными соотношениями, аналогичными (2.3) [1]

$$\sigma_{zz}^{\circ} - \sigma_{rr}^{\circ} = \Phi_2(J_2^{\circ})(u_{zz}^{\circ} - u_{rr}^{\circ}), \qquad \sigma_{rr}^{\circ} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\circ} = \Phi_2(J_2^{\circ})(u_{rr}^{\circ} - u_{\varphi\varphi}^{\circ}) \tag{2.8}$$

Предположим, что функция $\Phi_2(J)$ четная по своему аргументу и имеет начальный горизонтальный участок, причем $\Phi_2(0) = \alpha_2$ (в случае упругих деформаций $\Phi_2 \equiv \alpha_2$). Очевидно, что

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{\circ}, \qquad u_{ik} = u_{ik}^{\circ} \qquad \text{при } r = r_0 \tag{2.9}$$

поэтому из (1.5) непосредственно следует

$$J_2^{\circ}(r) = \sqrt{3\varepsilon_0^2 + v^2(r)} \tag{2.10}$$

Из (1.5), (2.9) и (2.10) видно, что правые части в (2.6) являются известными функциями от $v(r)$ и $v(r_0)$.

Используем, наконец, уравнение равновесия (2.1) в фазе *2*, подставив в него $\sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ из (2.7). Тогда при помощи первого из граничных условий (2.2) представим $\sigma_{rr}^{(2)}$ в виде интеграла от правой части (2.7) и после этого из (2.6) найдем $\sigma_{zz}^{(2)}$.

Уравнение (2.3) и граничное условие (2.2) позволяют выразить также $\sigma_{zz}^{(1)}$ через функцию $v(r)$.

Подставляя найденные таким способом $\sigma_{zz}^{(1)}$ и $\sigma_{zz}^{(2)}$ в граничные условия (2.2), приходим к интегральному соотношению для $v(r)$

$$\alpha_2 v(r_0)(R^2 - r_0^2) - r_0^2 [\varepsilon_0 - v(r_0)] \Psi_1 [\varepsilon_0 - v(r_0)] +$$
$$+ 2\int_{r_0}^{R} v(r) \{\Phi_2(\sqrt{3\varepsilon_0^2 + v^2(r)}) - \alpha_2\} r\, dr = 0 \tag{2.11}$$

Остаточные деформации описываются значением функции $v(r_0)$ при $r_0 = 0$. Из (2.11) видно, что если $\Phi_2 \equiv \alpha_2$, то $v(0) = 0$, т. е. в случае упругого деформирования остаточные деформации отсутствуют. Если ε_0 (точнее, $\sqrt{3}\varepsilon_0$) превышает интенсивность деформации сдвига, соответствующую пределу текучести, то $\Phi_2(\sqrt{3\varepsilon_0^2 + v^2(r)}) \neq \alpha_2$ и имеют место остаточные деформации.

Дифференцируя (2.11) по r_0, придем к дифференциальному уравнению для $v(r)$, которое удобнее записать, вводя новые переменную $x = r_0^2$ и неизвестную функцию $w(x) = v(r_0)$, а также обозначая

$$\psi_1(u) = u\Psi_1(u), \qquad \varphi_2(u) = u\Phi_2(\sqrt{3\varepsilon_0^2 + u^2}), \qquad h = R^2$$

В этих обозначениях из соотношения (2.11) следует

$$\frac{dx}{dw} - p(w)x = q(w) \tag{2.12}$$

где

$$p(w) = \frac{\psi_1'(w - \varepsilon_0) - \alpha_2}{\varphi_2(w) - \psi_1(w - \varepsilon_0)}, \qquad q(w) = \frac{\alpha_2 h}{\varphi_2(w) - \psi_1(w - \varepsilon_0)}$$

Уравнение (2.12) должно решаться при условии

$$x = h \quad \text{при } w = \varepsilon_0 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) с граничным условием (2.13) совпадает с уравнением (24) в работе [1], где изучалась деформация плоского слоя твердого тела при фазовом переходе. Таким образом, из этого уравнения можно получить те же следствия, что и в работе [1]. В частности, остаются в силе все выводы и формулы (за исключением формулы (32), [1]).

Из анализа, проведенного в работе [1], вытекает, что $v(0)$ не зависит от R и при естественном условии $\Phi_2' \leqslant 0$ ограничено неравенствами

$$0 \leqslant v(0) \leqslant \varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{\alpha_2} \Phi_2(2\varepsilon_0)\right] \tag{2.14}$$

Величина $v(0)$ определяет остаточные деформации U_{rr}, $U_{\varphi\varphi}$, U_{zz} образца, полностью перешедшего в фазу *2*, которые вычисляются по (1.5)

$$U_{rr} = U_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} v(0), \qquad U_{zz} = v(0) \tag{2.15}$$

На основании неравенства (2.14) из (2.15) следует, что после полного «промерзания» длина стержня увеличится, а радиус уменьшится (при $\varepsilon_0 > 0$).

Если механические свойства материала в двух фазах различны, то аналогичный обратный фазовый переход в образце, происходящий после отжига остаточных напряжений, приводит к дополнительным остаточным деформациям обратного знака, но другой абсолютной величины. В силу этого суммарная остаточная деформация стержня при полном цикле фазовых переходов *1* → *2* → *1* отлична от нуля, что соответствует экспериментальным наблюдениям [2].

В заключение заметим, что, если пренебречь небольшим острым пиком, который имеется на диаграммах деформации некоторых материалов, в очень большом интервале деформаций $\psi_1(u)$ можно считать монотонно возрастающей функцией своего аргумента. Другими словами, можно считать $\psi_1' \geqslant 0$. Тогда из (2.12) и (2.14) следует, что $dx / dw > 0$, т. е. функция $v(r_0)$ убывает по мере перемещения границы к оси стержня. Это свойство функции $v(r_0)$ позволяет проверить правильность сделанного выше утверждения о том, что в фазе *1* происходит нагрузка во время движения границы к оси симметрии, а в фазе *2* — разгрузка. Действительно, из (2.5) следует

$$dJ_1/dt > 0 \quad \text{при } dr_0/dt < 0$$

что подтверждает наличие нагрузки в фазе *1*.

Далее, из (1.5) имеем

$$J_1 = \sqrt{3\varepsilon_0^2 r_0^4 / r^4 + v^2(r_0)}$$

Отсюда следует наличие разгрузки в фазе *2*

$$dJ_2/dt < 0 \quad \text{при } dr_0/dt < 0$$

Благодарим И. М. Лифшица за обсуждение работы.

Поступила 28 XII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Косевич А. М., Танатаров Л. В. Физика металлов и металловедение. 1959, 8, стр. 255.
2. Лазарев Б. Г., Судовцов А. И., Смирнов А. П. Физика металлов и металловедение, 1959, 7, стр. 122.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. ГТТИ, 1956.