УДК 533.69 : 532.5 + 519.6 + 517.5

А. М. Елизаров, Е. В. Федоров

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ МЕТОДАМИ ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Как известно, в обратных краевых задачах теории аналитических функций на искомых участках границы области задаются два краевых условия [1]. Если одно из них заменяется оптимизационным, обратную задачу называют вариационной [2]. Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики (ОКЗА) заключаются в построении крыловых профилей, обладающих оптимизированными характеристиками (максимальными подъемной силой или качеством, минимальным сопротивлением и др.). Постановки таких задач восходят, по существу, к работе М. А. Лаврентьева [3], в которой сформулирована задача оптимизации формы профиля с учетом условий, обеспечивающих безотрывность обтекания большей части его контура.

Из результатов [4] следует (см. [5]), что среди профилей с гладким контуром заданной длины максимальную подъемную силу при плавном обтекании имеет круг. Однако он не соответствует требованиям аэродинамического проектирования хотя бы потому, что при реальном обтекании с его поверхности будет происходить отрыв жидкости.

Численно-аналитический метод максимизации подъемной силы профиля с острой выходной кромкой, обтекаемого идеальной несжимаемой жидкостью, при ограничениях, выражающих упрощенные условия безотрывности обтекания, предложен в [5]. Величина подъемной силы R_y представлена через коэффициенты Фурье функции, связанной с конформным отображением единичного круга во вспомогательной плоскости на внешность профиля. Экстремум R_y достигается за счет варьирования конечного набора этих коэффициентов при указанных дополнительных ограничениях. Условия замкнутости контура удовлетворяются эмпирически.

Известны также решения вариационных ОКЗА, учитывающие вязкость потока в рамках теории пограничного слоя. В ряде работ (например, [6—9]) оптимизировались профильное сопротивление или аэродинамическое качество для семейств профилей с параметрически заданным контуром, обтекаемых вязкой несжимаемой жидкостью при различных предположениях о строении пограничного слоя. В качестве ограничений задавались коэффициент подъемной силы C_y, угол атаки α и максимальная толщина профиля или α и площадь профиля, а также критерий безотрывности обтекания. Для каждого профиля такого семейства в результате решения прямой задачи рассчитывались аэродинамические характеристики, а их оптимизация проводилась за счет выбора значений свободных параметров при указанных выше ограничениях. Аналогичные результаты получены в задачах обтекания профилей дозвуковым или трансзвуковым потоками газа, в том числе и вязкого. Обзор этих работ можно найти в [10].

Другой подход к аэродинамической оптимизации крыловых профилей, основы которого изложены в [11], базируется на теории обратных краевых задач [1] и развивается в настоящей работе. Ниже построены оптимизированные профили, обтекаемые безотрывно при различных условиях безотрывности, проведено сравнение этих решений, сделаны выводы. Доказано, что условие безотрывности для полностью турбулентного пограничного слоя обеспечивает безотрывность потока и при наличии ламинарных участков на конфузорной части контура. Приведены условия физической реализуемости решения, налагаемые на множество управляющих функций и связанные с построением однолистных крыловых профилей. Исследованы задачи оптимизации с дополнительными ограничениями на аэродинамические характеристики и для диапазона углов атаки.

1. Функционалы для оптимизации аэродинамических характеристик. В [11] при оптимизации формы крыловых профилей использовано следующее интегральное представление решения основной ОКЗА [1]:

$$(1.1)\qquad z(\zeta)=e^{-i\beta}\int_{1}^{\zeta}\exp\left[-(2\pi)^{-1}\int_{0}^{2\pi}g(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\,d\gamma\right]d\zeta,\quad |\zeta|>1.$$

Здесь $g(\gamma)=a_0+P(\gamma)+h(\gamma)$; $h(\gamma)=(\varepsilon-1)\ln[2\sin(\gamma/2)]$; a_0, ε и β — постоянные ($1\leqslant\varepsilon\leqslant 2$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi/2$); управляющая гельдеровская функция $P(\gamma)$ удовлетворяет условиям

$$(1.2)\qquad \int_{0}^{2\pi}P(\gamma)\,e^{i\gamma}d\gamma=\pi(\varepsilon-1),\qquad \int_{0}^{2\pi}P(\gamma)\,d\gamma=0.$$

Функция $z(\zeta)$ в (1.1) конформно отображает внешность единичного круга в плоскости ζ на внешность крылового профиля, ограниченного замкнутым кусочно-ляпуновским контуром L_z с острой кромкой в точке $z=0$, где внутренний к области течения угол равен $\varepsilon\pi$, и обтекаемого идеальной несжимаемой жидкостью с заданной скоростью набегающего потока. Постоянная β равна теоретическому углу атаки (углу отклонения профиля от направления бесциркуляционного обтекания), а постоянная a_0 определяет величину L периметра L_z.

Рассмотрим класс профилей с фиксированным периметром L контура. Пусть каждый из профилей плавно обтекается плоско-параллельным безграничным установившимся потоком несжимаемой вязкой жидкости при реально больших числах Рейнольдса. Систему координат выберем так, чтобы ось абсцисс была параллельна вектору скорости набегающего потока, величину v_∞ этой скорости и плотность ρ жидкости считаем известными. При моделировании такого течения с учетом малости толщины вытеснения δ^* пограничного слоя на профиле и в следе в качестве потенциального потока около полубесконечного тела вытеснения приближенно рассматривают (см., например, [12, 13]) потенциальное обтекание профиля идеальной жидкостью. При указанных предположениях подъемная сила R_y, профильное сопротивление R_x и аэродинамическое качество K с учетом (1.1) выражаются в виде следующих функционалов [11], заданных на множестве допустимых функций $P(\gamma)$:

$$(1.3)\qquad R_y=2^{3-\varepsilon}\pi\rho v_\infty^2 L\sin\beta/J(P),\quad R_x=2^{2,2}\rho v_\infty^2 L\,(2Aa)^{1/a}\,\mathrm{Re}^{1/a-1}D(P),$$
$$K=R_y/R_x=2^{\;\;1,2}\pi\sin\beta\,(2Aa)^{-1/a}\,\mathrm{Re}^{1-1/a}/E(P).$$

Здесь

$$J(P)=\int_{0}^{2\pi}[\sin(\gamma/2)]^{\varepsilon-1}\exp P(\gamma)\,d\gamma;$$

$$D(P)=B(P)\,[J(P)]^{-1/a};\ E(P)=B(P)\,[J(P)]^{1-1/a};$$

$$B(P)=\left\{\left[\int_{0}^{\pi+2\beta}G_2(P;\gamma)\,d\gamma\right]^{1/a}+\left[\int_{\pi+2\beta}^{2\pi}G_2(P;\gamma)\,d\gamma\right]^{1/a}\right\}\times$$
$$\times\{\cos\beta\exp[-P(0)]\}^r,\quad r=3{,}2-(7-a)/(3-a);$$

$\mathrm{Re}=v_\infty L/\nu$; A и a — взаимосвязанные эмпирические постоянные, определяемые методом расчета турбулентного пограничного слоя (конкретные их значения приведены ниже); ν — известный кинематический коэффициент вязкости;

$$(1.4)\quad G_2(P;\gamma)=\sin(\gamma/2)\,|\cos(\gamma/2-\beta)|^{3(a+1)/(3-a)}\exp[-4aP(\gamma)/(3-a)].$$

Отметим, что для известных моделей расчета пограничного слоя величина r незначительно отличается от нуля. Это позволяет несколько упростить выражение для $B(P)$, положив $r=0$.

Таким образом, в силу (1.3) при фиксированных ρ, v_∞ и β для максимизации R_y, K и минимизации R_x нужно минимизировать соответственно функционалы $J(P)$, $E(P)$ и $D(P)$ на множестве U управляющих функций $P(\gamma)$, которые помимо (1.2) должны удовлетворять условию безотрывности обтекания и гарантировать физическую реализуемость получаемого решения.

2. Ограничения на управляющие функции. Как отмечено выше, одним из основных ограничений на управляющие функции $P(\gamma)$ должно быть условие безотрывности обтекания соответствующего профиля. В приближении теории пограничного слоя известные критерии отсутствия отрыва турбулентного потока могут быть представлены в виде [12, 13]

$$f(s) \geqslant f_*, \quad f_* = -\mu/A \quad (f(s) = v'(s) f_\text{п}(s)); \tag{2.1}$$

$$f_\text{п}(s) = a\,|v(s)|^{-b} \left| \int\limits_{s_\text{п}}^{s} [v(\tau)]^{b-1} d\tau + C \right|, \tag{2.2}$$

где $a=(m+1)/m$; $b=2(4m+1)/(2m-1)$; $v(s)$ — распределение скорости по L_z; s $(0 \leqslant s \leqslant L)$ — дуговая абсцисса, отсчитываемая от задней кромки так, что область течения остается слева; $s_\text{п}(s_* \leqslant s_\text{п} < L$ или $0 < s_\text{п} \leqslant s_*)$ — абсцисса точки перехода ламинарного течения в турбулентное на верхней или нижней поверхностях L_z; s_* — дуговая абсцисса точки разветвления потока; f_*, A и m — известные эмпирические постоянные. В частности, $m=4, f_* = -5{,}57 \div -4{,}77$ по Прандтлю — Бури, $m=6$, $f_* = -3 \div -2$ по Лойцянскому, $m=\infty$, $f_* = -0{,}8 \div -0{,}7$ по Бам-Зеликовичу, $m=6$, $f_* = -6$ по Кочину — Лойцянскому; $A=0{,}01256$ при $m=4$ и $A=0{,}00655$ при $m=6$ [12, § 54]. Постоянная C в (2.2) характеризует участок ламинарного течения и может быть рассчитана, например, по формуле [14, § 12]

$$C = v_\text{п}^{b-2} \nu (\mathrm{Re}_\text{п}^{**})^a/(aA), \quad \mathrm{Re}_\text{п}^{**} = \left[a_1 \nu^{-1} v_\text{п}^{2-b_1} \left| \int\limits_{s_*}^{s_\text{п}} [v(\tau)]^{b_1-1} d\tau \right| \right]^{1/2} \tag{2.3}$$

$(a_1=0{,}45,\ b_1=5{,}35,\ v_\text{п}=v(s_\text{п}))$. Для определения положения точки $s_\text{п}$ перехода в пограничном слое воспользуемся эмпирическим критерием Эпплера [15], согласно которому переход ламинарного течения в турбулентное имеет место, если

$$\ln \mathrm{Re}^{**}(s) \geqslant \mathrm{Re}_\text{т} = 18{,}4 H_{32} - 21{,}74, \quad \mathrm{Re}^{**}(s) = v(s)\delta^{**}(s)/\nu,$$

где $H_{32} = H_{32}(s)$ — толщина потери энергии в пограничном слое; $\delta^{**}(s)$ — толщина потери импульса. Применяя метод расчета ламинарного слоя [14, § 112], конкретные значения $\mathrm{Re}_\text{т}$ определим интерполяцией по величине H, которая в свою очередь является функцией формпараметра f (см. табл. 17 в [14]). В результате интерполяции получим монотонно убывающую функцию

$$H_{32} = G(H), \quad 1{,}9 \leqslant H \leqslant 4{,}03, \quad 1{,}515 = G(4{,}03) \leqslant G(H) \leqslant G(1{,}9) = 1{,}7. \tag{2.4}$$

Таким образом, величина $s_\text{п}$ должна быть наименьшим из корней уравнения

$$\mathrm{Re}^{**}(s) = \exp\{18{,}4 G[H(s)] - 21{,}74\}. \tag{2.5}$$

Предположим, что точка $s_\text{п}$ находится на конфузорном участке. Используя это, покажем, что справедлива оценка

$$f_\text{п}(s) \leqslant f_0(s). \tag{2.6}$$

Здесь $f_0(s)$ определяется формулой (2.2) при $s_\text{п} = s_*$, $C=0$ и соответствует чисто турбулентному пограничному слою.

Пусть s отвечает точкам верхней поверхности профиля (случай нижней поверхности рассматривается аналогично). В силу (2.2), (2.3) для доказательства неравенства (2.6) достаточно обосновать оценку

$$C \leqslant \int_{s_*}^{s_\text{п}} [v(\tau)]^{b-1} d\tau.$$

Учитывая, что $b_1 > b$ и $v(s)/v_\text{п} \leqslant 1$ при $s_* \leqslant s \leqslant s_\text{п}$, имеем

$$\int_{s_*}^{s_\text{п}} [v(\tau)]^{b-1} d\tau = v_\text{п}^{b-1} \int_{s_*}^{s_\text{п}} [v(\tau)/v_\text{п}]^{b-1} d\tau \geqslant v_\text{п}^{b-b_1} \int_{s_*}^{s_\text{п}} [v(\tau)]^{b_1-1} d\tau.$$

Из (2.3) следует

$$\int_{s_*}^{s_\text{п}} [v(\tau)]^{b_1-1} d\tau = \nu \operatorname{Re}_\text{п}^{**2} v_\text{п}^{b_1-2}/a_1.$$

С использованием предыдущего неравенства выводим

$$\int_{s_*}^{s_\text{п}} [v(\tau)]^{b-1} d\tau \geqslant \nu \operatorname{Re}_\text{п}^{**2} v_\text{п}^{b_1-2}/a_1.$$

Значит, неравенство (2.6) будет выполнено, если $\operatorname{Re}_\text{п}^{**2-a} \geqslant a_1/(aA)$. Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $\operatorname{Re}_\text{п}^{**a} \geqslant (462{,}2)^{2-a}$. Таким образом, для выполнения (2.6) достаточно, чтобы параметры a и A удовлетворяли ограничению $a_1/(aA) \leqslant (462{,}2)^{2-a}$. Проверка последнего неравенства для различных наборов параметров a и A показала, что это неравенство имеет место. Итак, свойство (2.6) доказано. Из него следует, что для обеспечения безотрывности обтекания в случае, когда $s_\text{п}$ находится на конфузорном участке, достаточно потребовать выполнения условия (2.1) в предположении полной турбулентности пограничного слоя $(s_\text{п} = s_*,\ C = 0)$. Последнее условие в выражении через функцию $P(\gamma)$ при $\varepsilon = 2$ принимает вид [11]

$$(2.7)\qquad (-1)^j G_1(P;\gamma) \geqslant f_{0j} G_0(P;\gamma),\quad f_{0j} \geqslant f_*,\quad j = 1, 2,$$

$$\gamma \in [0, \pi + 2\beta] \text{ при } j = 1,\ \gamma \in [\pi + 2\beta, 2\pi] \text{ при } j = 2,$$

$$G_0(P;\gamma) = G_2(P;\gamma)\left[a \left| \int_{\pi+2\beta}^{\gamma} G_2(P;\gamma)\, d\gamma \right| \right]^{-1},$$

$$G_1(P;\gamma) = -P'(\gamma) - 0{,}5 \operatorname{tg}(\gamma/2 - \beta),$$

оператор G_2 определен в (1.4), $j = 1$ отвечает верхней поверхности L_z, а $j = 2$ — нижней. Так как неравенство (2.1) может иметь место всюду на L_z только при $\varepsilon = 2$, всюду в дальнейшем будем рассматривать этот случай. Отметим, что функционал $J(P)$ строго выпуклый, а функция $P_*(\gamma) = (1 - \varepsilon) \ln (2 \sin (\gamma/2))$, дающая при ограничениях (1.2) его глобальный минимум в пространстве L_2, не является гельдеровской и не удовлетворяет (2.7). Следовательно, экстремум $J(P)$ достигается на границе множества гельдеровских функций, удовлетворяющих условиям (1.2) и (2.7). Аналогична ситуация и в задачах минимизации $E(P)$ и $D(P)$.

3. **Условия физической реализуемости решения.** Ограничения (1.2) и (2.7) на множество U не гарантируют получения физически реализуемого решения, в частности, профиля с простым контуром. Трудности по обеспечению этого свойства связаны с отсутствием необходимых и достаточных условий однолистности решения, которые выражались бы через функцию $P(\gamma)$. Простоты контура L_z можно добиться, если на U наложить любое из достаточных условий однолистности решения ОКЗА (например, [16]). Однако эти условия характеризуют лишь некоторые

подклассы из множества однолистных решений, что приводит к значительному сужению множества U. Поэтому целесообразнее сузить U за счет исключения из него части неоднолистных решений, используя необходимые условия однолистности. Укажем некоторые из них, достаточно просто выражающиеся через функцию $P(\gamma)$.

Рассмотрим множество профилей с бесконечно тонкой задней кромкой ($\varepsilon = 2$), ограниченных ляпуновскими контурами L_z, кривизна которых всюду ограничена. Развивая утверждение Г. Ю. Степанова о невозможности для однолистных профилей монотонно возрастающих от точки разветвления до точки схода потока распределений $v(s)$, высказанное на школе «Современные проблемы механики жидкости и газа» в Иркутске (1988 г.), Ф. Г. Авхадиев показал (доклад на семинаре в НИИ математики и механики при Казанском университете 14.11.89 г.), что достаточным для неоднолистности области течения является условие*

$$v_{01}(\gamma)+v_{02}(2\pi-\gamma)\leqslant 2v_0(0),\quad 0\leqslant\gamma\leqslant\pi. \tag{3.1}$$

Здесь $v_0(\gamma)=|v_0[s(\gamma)]|$; $v_0(s)$ — распределение скорости на L_z, соответствующее бесциркуляционному режиму обтекания; $v_{01}(\gamma)=v_0(\gamma)$ при $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$ (на верхней поверхности L_z); $v_{02}(\gamma)=v_0(\gamma)$ при $\pi\leqslant\gamma\leqslant 2\pi$ (на нижней). Из (3.1), естественно, следует, что для однолистных профилей недопустимы монотонно возрастающие распределения $v_0(s)$.

Из утверждения Ф. Г. Авхадиева вытекает, что для простых замкнутых L_z необходимо выполнение неравенства, обратного к (3.1):

$$\max_{0\leqslant\gamma\leqslant\pi}\,[v_{01}(\gamma)+v_{02}(2\pi-\gamma)]>2v_0(0). \tag{3.2}$$

Используя условие

$$v[s(\gamma)]=2u_0|\cos(\gamma/2-\beta)|\exp[-a_0-P(\gamma)], \tag{3.3}$$

где u_0 — известная постоянная, из (3.2) выводим неравенство

$$\max_{0\leqslant\gamma\leqslant\pi}\,\Phi(P;\gamma)>0, \tag{3.4}$$

$$\Phi(P;\ \gamma)=\cos(\gamma/2)\{\exp[-P(\gamma)]+\exp[-P(2\pi-\gamma)]\}-2\exp[-P(0)].$$

При выполнении (3.4) будет также справедливо неравенство

$$\max_{0\leqslant\gamma\leqslant 2\pi}\,\{|\cos(\gamma/2)|\exp[-P(\gamma)]\}>\exp[-P(0)], \tag{3.5}$$

эквивалентное условию $\max\limits_{0\leqslant\gamma\leqslant 2\pi} v_0(\gamma)>v_0(0)$. В силу (3.1) оно также является необходимым условием однолистности, но определяет более широкое, чем (3.4), множество допустимых функций $P(\gamma)$. Отметим, что в случае симметричных профилей условия (3.4) и (3.5) совпадают.

Числовые расчеты показали, что при минимизации функционалов $E(P)$, $D(P)$ для любых β и минимизации $J(P)$ при $\beta\geqslant 0{,}2$ неучет дополнительных требований, связанных с обеспечением физической реализуемости решения, приводит к неоднолистным профилям, а среди оптимальных профилей, полученных с использованием условия (3.4), встречаются неоднолистные. Поэтому целесообразно вместо (3.4) применять более жесткие ограничения. Одно из них, построенное по аналогии с (3.2) и использованное в вычислительном эксперименте, записывается следующим образом:

$$v_{01}(\gamma)+v_{02}(2\pi-\gamma)>2v_0(0),\quad 0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_0<\pi \tag{3.6}$$

(γ_0 — фиксированная величина). В выражении через $P(\gamma)$ неравенство (3.6) принимает вид

$$\Phi(P;\ \gamma)>0,\ 0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_0. \tag{3.7}$$

Будучи более жестким, чем (3.4), ограничение (3.7) допускает возможность потери однолистных решений. В то же время при значениях γ_0,

---

* Результат упоминается с согласия автора.

близких к π, учет ограничения (3.7), как показали расчеты, дал однолистные решения.

4. Численная оптимизация. Функции $P(\gamma)$, доставляющие минимум функционалам J, D и E на множестве U, отыскивались в виде тригонометрических полиномов $P_N(\gamma) = \sum\limits_{l=1}^{N} (a_l \cos l\gamma + b_l \sin l\gamma)$, где N — заданная величина и в силу (1.2) $a_1 = \varepsilon - 1$, $b_1 = 0$. Для обеспечения гельдеровости $P_N(\gamma)$ с фиксированным коэффициентом A_0 на постоянные a_l, b_l накладывались ограничения

$$|a_l| \leqslant (A_0 - 1)/[2^{1/2} l (N-1)], \quad |b_l| \leqslant (A_0 - 1)/[2^{1/2} l (N-1)], \quad l = 2, \ldots, N,$$

причем $A_0 \approx 10^2$. Расчеты показали, что такое значение A_0 не влияет на результаты оптимизации при существенном увеличении длины N отрезка ряда Фурье, т. е. получаемое решение автоматически является гельдеровским с указанным коэффициентом. Для численной реализации условий безотрывности на отрезке $[0, 2\pi]$ выбирались точки γ_j, $j = 1, \ldots, M_1$, в каждой из которых проверялось выполнение соответствующего неравенства в (2.7). Аналогично для реализации (3.6) на отрезке $[0, \gamma_0]$ задавались точки $\hat{\gamma}_j$, $j = 1, \ldots, M_2$.

Рассматривая минимизируемые функционалы как функции $2(N-1)$ неизвестных коэффициентов a_l, b_l, получаем задачу нелинейного программирования размерности $2(N-1)(M_1 + M_2)$. Решение ее осуществлялось релаксационным методом из [17] и потребовало значительных затрат машинного времени, связанного с вычислением интегралов, входящих в минимизируемые функционалы и функцию $G_0(P; \gamma)$. В частности, при $N = 5$, $M_1 = 27$, $M_2 = 13$ одна итерация требует при минимизации $D(P)$ 40 с, а при минимизации $J(P)$ 30 с процессорного времени на ЭВМ ЕС-1046. При этом наибольшее влияние на затраты времени оказывает N. Например, увеличение ее в 2 раза при минимизации $J(P)$ для тех же значений M_1, M_2 привело к росту времени расчета одной итерации до 140 с. Общее же количество итераций колебалось от единиц до нескольких десятков в зависимости от выбора начального приближения.

На рис. 1—4 представлены оптимизированные профили, безотрывные по Лойцянскому. Выбор этого критерия объясняется тем, что он дает наилучшее по сравнению с другими критериями совпадение результатов по безотрывности при расчете по более точным моделям.

На рис. 1 показаны профили максимальной подъемной силы (и распределения $v(s)$ для них), полученные при различных β ($\beta = 0{,}1$ (5,7°) — сплошная линия, $\beta = 0{,}15$ — штриховая, $\beta = 0{,}2$ — штрихпунктирная). Дуговая абсцисса отнесена к периметру L, скорости — к заданной

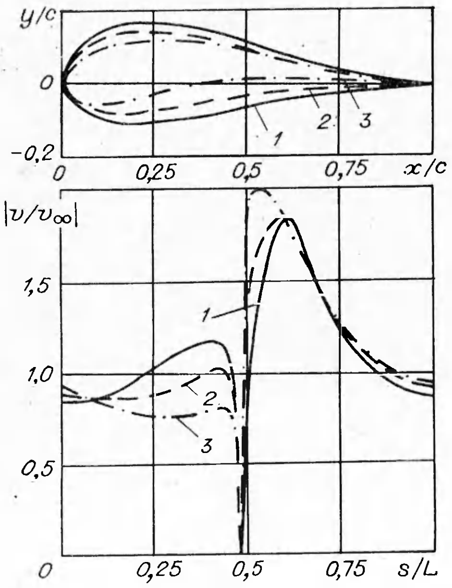

Рис. 1

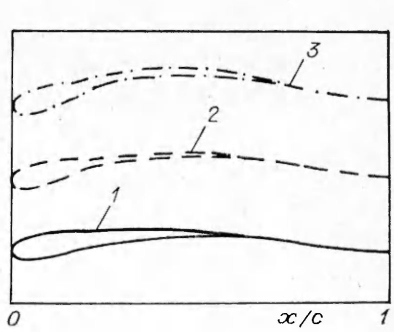

Рис. 2

величине v_∞, а координаты контуров — к хорде c. Профили *1—3* на рис. 1 имеют коэффициенты подъемной силы $C_y = 0{,}748$; 1,084; 1,388 соответственно при углах атаки $\alpha = 3{,}72$; 5,8; 8,64°. Видно, что с увеличением β, значит, и α оптимальные в смысле подъемной силы профили становятся тоньше, а C_y возрастает. При этом увеличение подъемной силы происходит в основном за счет изменения $v(s)$ на нижней поверхности профиля. Естествен рост скорости в окрестности точки разветвления потока.

На рис. 2 изображены однолистные профили *1—3* минимального сопротивления, полученные для тех же значений β при $\mathrm{Re} = 10^6$ и имеющие $C_x = 0{,}0122$; 0,0133 и 0,0155 при $\alpha = 2$; 3,4 и 5,4°.

Описанные профили представляют прежде всего теоретический интерес. Однако, обладая соответствующими экстремальными свойствами, они, как и профили Либека [18], могут служить своеобразными ориентирами, определяющими направление поиска оптимальных аэродинамических форм.

Далее, в результате расчетов выяснилось, что при фиксированных значениях β функционалы $E(P)$ и $D(P)$ незначительно отличаются по своему поведению. Этим объясняется совпадение профилей максимального аэродинамического качества и минимального сопротивления, полученных в результате минимизации указанных функционалов (рис. 2, $K =$ $= 53{,}8$; 81,7 и 84,2).

Если значение β заранее не фиксировано, то оно наряду с коэффициентами a_l, b_l входит в число искомых параметров при оптимизации. Из (1.3) следует, что для максимизации R_y в этом случае необходимо минимизировать функционал $J_0(P;\ \beta) = J(P)/\sin\beta$, где $P \in U$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$. Вычислительный эксперимент показал, что при увеличении β минимальные значения $J(P)$ также возрастают, но значительно медленнее, чем $\sin\beta$. Поэтому возникает задача отыскания максимального значения β, при котором множество допустимых решений не пусто. Установлено, что при уменьшении β минимальное значение функционала $D_0(P;\ \beta)$, выражающего профильное сопротивление, уменьшается, а соответствующие профили утоньшаются и приближаются по форме к пластине, обтекаемой под нулевым углом атаки, причем с увеличением N оптимальные профили утоньшаются.

Таким образом, при переменном β максимизации R_y соответствует возрастание угла β, а минимизации R_x — уменьшение β до нуля. Что касается функционала $E_0(P;\ \beta) = E(P)/\sin\beta$, выражающего аэродинамическое качество, то при возрастании β минимальное значение E_0 сначала убывает, а затем возрастает. В результате имеется единственное значение β, отвечающее абсолютному минимуму E_0.

На рис. 3 представлены профили *1—3*, полученные соответственно в результате минимизации J_0, D_0 и E_0. Профиль *1* максимизирует R_y и имеет $C_y = 1{,}499$ при угле атаки $\alpha = 9{,}6°$. Профиль *2* минимизирует R_x и имеет относительную толщину 0,037, $C_x = 0{,}0101$ при $\alpha = 0$ и $\mathrm{Re} =$ $= 10^6$. Отметим, что найденный коэффициент сопротивления мало отличается от теоретического значения C_x для пластины (например, [14]), которое при $\mathrm{Re} = 10^6$ для чисто турбулентного пограничного слоя равно 0,0094. Профиль *3* максимизирует K и имеет $C_y = 1{,}382$, $C_x = 0{,}0163$ при $\alpha = 6°$ и $\mathrm{Re} = 10^6$. Для него $K = 84{,}7$. Для сравнения у профиля *1* $C_x = 0{,}0199$ и $K = 75{,}3$ при том же Re.

5. Задачи с дополнительными ограничениями на аэродинамические характеристики. Наряду с задачами, описанными выше, интерес представляет случай, когда оптимизируется одна из аэродинамических характеристик при ограничениях на другие (например, на коэффициенты C_y, C_x или максимальное значение $v(s)$ на контуре). В силу (1.3) все эти ограничения могут быть выражены непосредственно через $P(\gamma)$.

Пусть $C_x \leqslant \widehat{C}_x$ ($\widehat{C}_x$ — заданная величина). Учитывая (2.9) и тот факт, что хорда реальных профилей составляет, как правило, 47—49 % от периметра контура, указанное ограничение на C_x при фиксированном

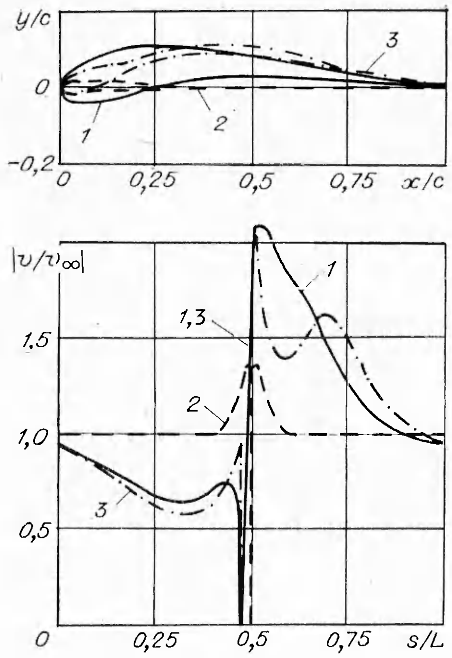

Рис. 3

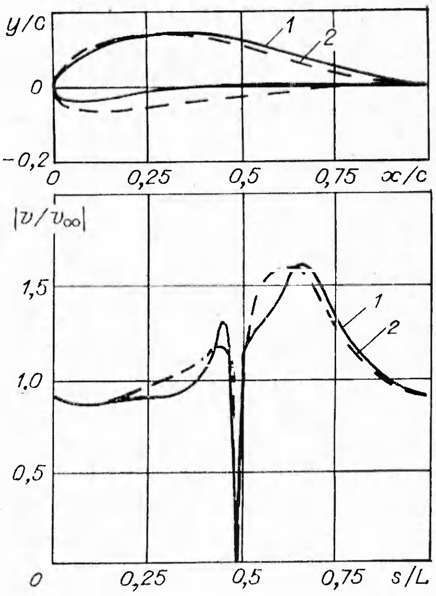

Рис. 4

β можно с точностью до 1—2 % заменить ограничением

(5.1) $$D(P)\leqslant \widehat{D} = \widehat{C}_x\,[2^{3,2}(2Aa)^{1/a}\,\mathrm{Re}^{-1/(m+1)}d]^{-1},\quad d = 2{,}04 \div 2{,}13.$$

Неравенство (5.1) служит дополнительным ограничением на множество U при минимизации $J(P)$.

На рис. 4 линией *1* представлено решение этой задачи для $\beta = 0{,}1$, $\mathrm{Re} = 10^6$ и $\widehat{C}_x = 0{,}015$. Профиль имеет $C_y = 0{,}706$ при $\alpha = 0{,}78°$.

Пусть теперь задано дополнительное ограничение $C_y \geqslant \widehat{C}_y$. В силу (2.8) при фиксированном β оно эквивалентно неравенству

(5.2) $$J(P) \leqslant \widehat{J} = 4\pi d \sin\beta/\widehat{C}_y.$$

Получили задачу минимизации функционала $D(P)$ на множестве U с дополнительным ограничением (5.2). На рис. 4 профиль *2* — решение последней задачи при $\beta = 0{,}1$, $\mathrm{Re} = 10^6$ и $\widehat{C}_y = 0{,}720$, здесь $C_x = 0{,}0159$ при $\alpha = 2{,}6°$.

Отметим, что описанные в настоящем разделе задачи легко распространяются на случай, когда величина β является переменной.

6. Оптимизация с учетом условий безотрывности для диапазона углов атаки. Как известно, даже при небольших изменениях угла атаки из-за возникающего отрыва потока может произойти значительное ухудшение аэродинамических характеристик крылового профиля. Поэтому с практической точки зрения важна задача проектирования оптимизированных профилей, обтекаемых безотрывно в достаточно широком диапазоне углов атаки.

В [19] получено условие отсутствия отрыва полностью турбулентного пограничного слоя при изменении угла атаки α в заданном диапазоне $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. Это условие имеет вид

(6.1) $$f(v_j;\, s_j,\, s) \geqslant f_*,\quad s \in [s_1, L] \text{ при } j = 1,\quad s \in [0, s_2] \text{ при } j = 2.$$

Здесь $v_j(s)$ — распределения скорости на верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) поверхностях профиля при его обтекании соответственно под углами атаки α_1 и α_2; s_j — дуговые абсциссы точек разветвления потока при $\alpha = \alpha_j$. Формпараметр $f(v_j;\, s_j,\, s)$ определяется формулой (2.2) при

$C=0$, $s_п = s_j$ и $v(s) = v_j(s)$. Переходя в (6.1) от $v_j(s)$ к $v_j(\gamma)$ (см. (3.3)) и учитывая, что абсциссам s_j отвечают полярные углы $\gamma_j = \pi + 2\beta$, $(\beta_2 \leqslant \beta \leqslant \beta_1)$ на единичной окружности, получим условие безотрывности обтекания профиля в диапазоне $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$ в виде (2.7), где $\beta = \beta_1$ при $j = 1$ и $\beta = \beta_2$ при $j = 2$. Названное условие легко использовать вместо (2.7) в качестве ограничения на множество управляющих функций $P(\gamma)$.

Авторы благодарят Н. Б. Ильинского и Г. Ю. Степанова за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.** Обратные краевые задачи и их приложения.— Казань: Казан. гос. ун-т, 1965.
2. **Аксентьев Л. А.** Об однолистной разрешимости обратных краевых задач // Тр. семинара но краевым задачам/Казан. гос. ун-т.— 1973.— Вып. 10.
3. **Лаврентьев М. А.** Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана // Тр. ЦАГИ.— 1934.— Вып. 155.
4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
5. **Зубов В. И.** К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости // ЖВММФ.— 1980.— Т. 20, № 1.
6. **Иванов С., Недялков И., Панов Л., Петрова П.** Върху един модел за решаване на оптимизационни задачи в теорията на крилото // Год. ВУЗ. Техн. физ.— 1979 (1980).— Т. 16, № 2.
7. **Варсамов К., Недялков И., Петрова П., Хаджимихалев П.** Върху една екстремална задача за профил с минимально съпротивление и зададена подемна сила // Год. ВУЗ. Техн. физ.— 1981.— Т. 18, № 2.
8. **Арутюнов Ю. А., Осовский А. Е.** Некоторые задачи оптимизации аэродинамических характеристик в несжимаемой жидкости // 5-й Всесоюз. съезд по теор. и прикл. мех.: Аннот. докл.— Алма-Ата, 1981.
9. **Пашева В., Петрова П.** Някои числени експерименти за конструиране на крилни профили със зададени характеристики и възможно помалко съпротивление // Год. ВУЗ. Техн. физ.— 1982 (1983).— Т. 19, № 2.
10. **Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В.** Обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа.— 1989.— Т. 23.
11. **Елизаров А. М., Федоров Е. В.** Оптимизация аэродинамических форм методом обратных краевых задач // ПММ.— 1990.— Т. 54, № 4.
12. **Степанов Г. Ю.** Гидродинамика решеток турбомашин.— М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962.
13. **Степанов Г. Ю.** Об основных модельных представлениях механики жидкости и газа в теории крыла // Некоторые вопросы механики сплошной среды.— М.: Изд-во МГУ, 1976.
14. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1987.
15. **Eppler R.** Practical calculation of laminar and turbulent bled-off boundary layers // NASA TM—75328.— 1978.
16. **Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М.** Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Матем. анализ.— 1987.— Т. 25.
17. **Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.** Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования // ЖВММФ.— 1977.— Т. 17, № 4.
18. **Liebeck R. H.** Design of subsonic airfoil for high lift // J. Aircraft.— 1978.— V. 15, N 9.
19. **Елизаров А. М., Фокин Д. А.** Построение крыловых профилей, обтекаемых безотрывно в заданном диапазоне изменения углов атаки // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 3.

г. Казань

Поступила 12/XII 1991 г.,
в окончательном варианте — 10/III 1992 г.