

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В ОКОЛОЗВУКОВОМ ДИАПАЗОНЕ СКОРОСТЕЙ

М. А. Найда, А. С. Фонарев

Центральный аэрогидродинамический институт, 140160 Жуковский

Рассмотрена задача определения интегральных аэродинамических характеристик летательных аппаратов в целом в трансзвуковом диапазоне скоростей. Разработан приближенный метод их расчета, основанный на использовании нелинейной трансзвуковой теории малых возмущений для пространственного обтекания тел. Метод исследования состоит в разделении области течения на две подобласти (внешнюю и внутреннюю), применении численных методов интегрирования уравнений в указанных областях и сращивании решений. Метод Мурмана — Коула для расчета сопротивления давления изолированного крыла обобщается на случай комбинации крыла с фюзеляжем.

При изучении в рамках теории малых возмущений пространственных трансзвуковых течений около тонких крыльев с удлинением порядка единицы и их комбинаций с фюзеляжем, максимальный размер поперечного сечения которого мал по сравнению с его длиной, возможно существенное упрощение постановки задачи обтекания, основанное на применении техники сращиваемых асимптотических разложений [1]. В [1] показано, что существуют две области, течение в каждой из которых описывается разными краевыми задачами. Во внутренней (прилегающей к телу) области главный член разложения потенциала возмущенной скорости удовлетворяет линейному уравнению Лапласа в нормальных оси тела плоскостях. Во внешней области на больших расстояниях решение имеет осесимметричную структуру и в главном члене совпадает с решением задачи обтекания эквивалентного тела вращения.

Таким образом, расчет трехмерного течения сводится к совместному решению двух краевых задач для уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от двух пространственных переменных. К сожалению, в этом случае невозможно определить подъемную силу летательного аппарата (ЛА), так как ввиду осевой симметрии внешнего течения она тождественно равна нулю. Поэтому данный подход применяется главным образом для нахождения распределения давления по поверхности ЛА, обладающих малой подъемной силой [2].

Для расчета трансзвукового обтекания ЛА, имеющих несущее крыло большого удлинения, в [3] была предложена новая постановка задачи, свободная от указанного выше недостатка. Согласно [3], во внутренней области, течение в которой, как и прежде, описывается уравнением Лапласа в поперечных оси тела плоскостях, помещается не весь ЛА, а лишь фюзеляж с хвостовым оперением и часть крыла. Оставшаяся часть крыла оказывается во внешней области, потенциал возмущенной скорости в которой удовлетворяет трехмерному аналогу уравнения Кармана. Интегральные аэродинамические характеристики всего ЛА при таком подходе определяются интегрированием распределения давления по поверхности тела в обеих областях и последующим суммированием полученных результатов.

Следует отметить, что на точность описанного способа расчета аэродинамических характеристик могут повлиять ошибки, обусловленные локальными нарушениями предпосылок теории малых возмущений в окрестности передних затупленных кромок крыла и хвостового оперения, вблизи носка фюзеляжа и т. д. Как показывают расчеты [4], при определении коэффициентов подъемной силы и момента тангажа влияние этих локальных ошибок незначительно и получаемые результаты имеют приемлемую точность. Иначе обстоит дело с определением сопротивления тел путем численного интегрирования распределения давления по их поверхности. Известно [5], что в этом случае результат численного интегрирования может оказаться неточным и даже отрицательным, так как при интегрировании приходится вычислять разность двух больших, но близких по значению величин. Для повышения точности определения коэффициента сопротивления крыловых профилей и тонких крыльев в [5] была произведена замена процедуры интегрирования распределения давления по поверхности тела другой процедурой, не использующей интегрирование в местах возможного нарушения предпосылок теории малых возмущений. Для расчета волнового сопротивления тел вращения аналогичный подход применен в [6]. В [7, 8] метод работы [5] был обобщен на случай нестационарного трансзвукового обтекания тонких крыловых профилей и тел вращения.

В настоящей работе рассмотрена задача определения интегральных аэродинамических характеристик ЛА в целом в трансзвуковом диапазоне скоростей. Разработан приближенный метод их расчета, основанный на использовании нелинейной трансзвуковой теории малых возмущений для пространственного обтекания тел. Метод исследования состоит в разделении области течения на две подобласти (внешнюю и внутреннюю), применении численных методов интегрирования уравнений в указанных областях и сращивании решений. Метод Мурмана — Коула для расчета сопротивления давления изолированного крыла обобщается на случай комбинации крыла с фюзеляжем.

Получены результаты расчета аэродинамических характеристик: сопротивления, подъемной силы и момента тангажа для конкретной компоновки ЛА, содержащей фюзеляж, стреловидное крыло и хвостовое оперение. Проведено сравнение с экспериментальными данными.

**1. Постановка задачи.** Пусть ЛА обтекается невязким трансзвуковым потоком газа со скоростью на бесконечности  $U_\infty$ . Поместим начало правой декартовой системы координат в носке фюзеляжа, ось  $x$  направим от носовой к хвостовой части, ось  $y$  — вверх, ось  $z$  — вдоль размаха крыла (рис. 1). Рассмотрим такие пространственные трансзвуковые течения, в которых возникающие скачки уплотнения слабы, так что изменением энтропии в частицах газа, пересекающих их фронты, можно пренебречь. В этом случае течение газа описывается потенциалом скорости

$$\Phi = U_\infty l(x \cos \alpha + y \sin \alpha + \varphi),$$

где  $l$  — длина фюзеляжа;  $\alpha$  — угол атаки;  $\varphi$  — потенциал возмущений. В рамках теории малых возмущений безразмерный потенциал  $\varphi$  удовлетворяет трехмерному аналогу уравнения Кармана:

$$((C_1 + C_2 \varphi_x) \varphi_x)_x + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $C_1 = 1 - M_\infty^2$ ;  $C_2 = -(\gamma + 1)M_\infty^2/2$ ; все независимые переменные отнесены к  $l$ .

Пусть угол скольжения отсутствует. Поскольку ЛА симметричен относительно плоскости  $xy$ , будем рассматривать течение только в полупространстве  $z \geq 0$ . Выделим вдоль оси  $x$  параллелепипед  $P$ , внутрь которого поместим фюзеляж с хвостовым оперением и часть крыла (рис. 1). В соответствии с асимптотической теорией [1] потенциал возмущений внутри  $P$  удовлетворяет уравнению Лапласа в любой плоскости  $x = \text{const}$ . Чтобы

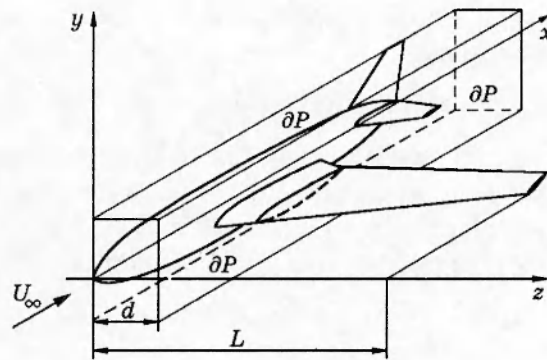


Рис. 1

подчеркнуть двумерный характер решения, введем для этой области новое обозначение потенциала возмущений  $\psi(x, y, z)$ . В этом случае

$$\psi_{yy} + \psi_{zz} = 0. \quad (1.2)$$

Снаружи  $P$  течение является трехмерным и описывается потенциалом  $\varphi$ , который удовлетворяет уравнению (1.1). Для сращивания внутреннего и внешнего решений на поверхности параллелепипеда  $\partial P$  ставятся условия непрерывности потенциала и его производной по нормали к граням  $P$ :

$$\varphi = \psi, \quad x, y, z \in \partial P; \quad (1.3)$$

$$\varphi_n = \psi_n, \quad x, y, z \in \partial P. \quad (1.4)$$

На поверхности тела потенциал возмущений должен удовлетворять условию непротекания. Для той части ЛА, которая находится внутри  $P$ , условие непротекания  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$  ( $\mathbf{N}$  — вектор внешней единичной нормали к поверхности тела) принимает вид

$$(\cos \alpha + \psi_x)N_x + (\sin \alpha + \psi_y)N_y + \psi_z N_z = 0, \quad (1.5)$$

где  $N_x, N_y, N_z$  — проекции  $\mathbf{N}$  на соответствующие оси декартовой системы координат. Пусть угол атаки мал. Тогда, согласно теории малых возмущений, соотношение (1.5) сводится к

$$N_x + \alpha N_y = -\psi_y N_y - \psi_z N_z. \quad (1.6)$$

Поскольку  $(\psi_y N_y + \psi_z N_z) / \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = \psi_n$  ( $\mathbf{n}$  — проекция  $\mathbf{N}$  на плоскость  $x = \text{const}$ ), то условие непротекания на теле внутри  $P$  имеет вид

$$\psi_n = -(N_x + \alpha N_y) / \sqrt{N_y^2 + N_z^2}. \quad (1.7)$$

Условие (1.7) ставится непосредственно на поверхности тела.

Рассмотрим теперь ту часть крыла, которая выступает за  $P$ . Поскольку для крыла  $N_z \ll N_x, N_z \ll N_y$ , то (1.5) сводится к соотношению  $N_x + (\alpha + \varphi_y)N_y = 0$ . Пусть поверхность крыла описывается уравнением  $y = y(x, z)$ . В этом случае  $N_x/N_y = -y_x$ . Таким образом, условие непротекания на крыле следующее:

$$\varphi_y = y_x - \alpha. \quad (1.8)$$

В отличие от (1.7) условие (1.8) задается не на верхней и нижней поверхностях крыла, а сносится на среднюю между ними плоскость  $y = y_w$ . Вниз по потоку от задней кромки крыла расположена вихревая пелена. В теории малых возмущений она не отклоняется от

плоскости  $y = y_w$  и простирается до бесконечности. Разрыв потенциала при переходе через пелену определяется соотношением

$$\varphi(x, y_w + 0, z) - \varphi(x, y_w - 0, z) = [\varphi] = \Gamma(z) \quad (1.9)$$

( $\Gamma$  — циркуляция скорости около соответствующего поперечного сечения крыла).

В плоскости Треффтца при  $x \rightarrow \infty$  потенциал возмущений удовлетворяет уравнению Лапласа и условию (1.9) на отрезке  $y = y_w$ ,  $d \leq z \leq L$  ( $L$  — полуразмах крыла,  $d$  — ширина  $P$  (рис. 1)). В плоскости симметрии  $z = 0$  выполняются условия

$$\psi_z = 0; \quad (1.10)$$

$$\varphi_z = 0. \quad (1.11)$$

Поскольку внешняя задача решается численно методом установления по времени на основе уравнения, содержащего нестационарные члены, то для постановки условий на внешних границах расчетной области (за исключением плоскости Треффтца) можно воспользоваться методом, описанным в [8]. В результате получим

$$C\varphi_x - M_\infty(M_\infty + \sqrt{C + M_\infty^2})\varphi_t = 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \quad (1.12)$$

$$M_\infty\varphi_y - \sqrt{C}\sqrt{C + M_\infty^2}\varphi_x = 0 \quad \text{при } y \rightarrow -\infty; \quad (1.13)$$

$$M_\infty\varphi_y + \sqrt{C}\sqrt{C + M_\infty^2}\varphi_x = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty; \quad (1.14)$$

$$M_\infty\varphi_z + \sqrt{C}\sqrt{C + M_\infty^2}\varphi_x = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (1.15)$$

где  $C = C_1 + 2C_2\varphi_x$ .

Таким образом, во внутренней области для уравнения (1.2) ставится смешанная краевая задача с граничными условиями (1.3), (1.7), (1.10). При постановке краевой задачи во внешней области для уравнения (1.1) в качестве граничных условий используются соотношения (1.4), (1.8), (1.11)–(1.15). В плоскости Треффтца задается распределение потенциала  $\varphi$ , удовлетворяющее уравнению Лапласа и условию (1.9).

После определения потенциала возмущений коэффициент давления во внутренней области имеет вид [9]

$$c_p = -2\psi_x - \psi_y^2 - \psi_z^2; \quad (1.16)$$

во внешней

$$c_p = -2\varphi_x. \quad (1.17)$$

**2. Определение аэродинамических характеристик.** Пусть поставленные во внешней и внутренней области краевые задачи решены. Определим интегральные аэродинамические характеристики ЛА: подъемную силу  $c_y$ , сопротивление давления  $c_x$  и момент тангажа  $m_z$ . В принятой связной системе координат искомые характеристики находятся следующим образом:

$$c_y = \frac{2F_y}{\rho_\infty U_\infty^2 l^2} = -2 \iint_s c_p (\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) ds; \quad (2.1)$$

$$c_x = \frac{2F_x}{\rho_\infty U_\infty^2 l^2} = -2 \iint_s c_p (\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) ds; \quad (2.2)$$

$$m_z = \frac{2M_z}{\rho_\infty U_\infty^2 l^3} = -2 \iint_s c_p ((\mathbf{N} \cdot \mathbf{j})(x - x_*) - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{i})(y - y_*)) ds. \quad (2.3)$$

Здесь  $x_*$ ,  $y_*$  — координаты точки в плоскости  $z = 0$ , относительно которой вычисляется момент. Рассмотрим вначале внутреннюю область. В этом случае  $s$  — площадь поверхности той части ЛА, которая находится внутри  $P$ , а коэффициент  $c_p$  связан с потенциалом возмущений согласно (1.16). Чтобы определить вектор  $\mathbf{N}$ , введем параметрическое представление поверхности ЛА, вытекающее из особенности постановки внутренней краевой задачи. Перейдем в цилиндрическую систему координат и в качестве первого параметра возьмем угол  $\beta$ , отсчитываемый от оси  $y$  по часовой стрелке, если смотреть из носка фюзеляжа. Вторым параметр  $\xi$  тождественно совпадает с  $x$ . Тогда декартовы координаты любой точки поверхности выражаются через соответствующие параметры следующим образом:

$$x = \xi, \quad y = y(\beta, \xi), \quad z = z(\beta, \xi).$$

Пусть  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  — радиус-вектор некоторой точки поверхности. Если рассматриваемая точка не является особой, то существуют два непараллельных друг другу вектора:  $\mathbf{r}_\beta$  и  $\mathbf{r}_\xi$ , которые лежат в касательной к данной точке поверхности плоскости. В этом случае их нормированное векторное произведение дает вектор  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_\beta \times \mathbf{r}_\xi}{|\mathbf{r}_\beta \times \mathbf{r}_\xi|} = \frac{(y_\beta z_\xi - y_\xi z_\beta)\mathbf{i} + z_\beta \mathbf{j} + y_\beta \mathbf{k}}{\sqrt{(y_\beta z_\xi - y_\xi z_\beta)^2 + z_\beta^2 + y_\beta^2}}.$$

Поскольку элемент площади поверхности определяется соотношением  $ds = |\mathbf{r}_\beta \times \mathbf{r}_\xi| d\beta d\xi$ , то выражения для интегральных аэродинамических характеристик во внутренней области принимают вид

$$c_y = -2 \int_0^1 \int_0^\pi c_p z_\beta d\beta d\xi; \tag{2.4}$$

$$c_x = -2 \int_0^1 \int_0^\pi c_p (y_\beta z_\xi - y_\xi z_\beta) d\beta d\xi; \tag{2.5}$$

$$m_z = -2 \int_0^1 \int_0^\pi c_p (z_\beta (x - x_*) - (y_\beta z_\xi - y_\xi z_\beta)(y - y_*)) d\beta d\xi. \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь внешнюю область. В этом случае для определения  $c_y$ ,  $c_x$ ,  $m_z$  по формулам (2.1)–(2.3) под  $s$  следует понимать площадь поверхности той части крыла, которая выступает за  $P$ , а  $c_p$  вычислять согласно (1.17). Если поверхность крыла задается уравнением  $y = y(x, z)$ , то вектор единичной нормали  $\mathbf{N} = (-y_x \mathbf{i} + \mathbf{j} - y_z \mathbf{k}) / \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}$ .

Будем определять момент относительно точки, лежащей в плоскости крыла, т. е.  $y_* = y_w$ . В этом случае подстановка выражения для  $\mathbf{N}$  в (2.1)–(2.3) с учетом того, что для тонких крыльев  $y_x^2 + y_z^2 \ll 1$ , приводит к соотношениям

$$c_y = -2 \int_d^L \int_{x_l}^{x_t} (c_p^+ - c_p^-) dx dz; \tag{2.7}$$

$$c_x = -2 \int_d^L \int_{x_l}^{x_t} (y_x^+ c_p^+ - y_x^- c_p^-) dx dz; \tag{2.8}$$

$$m_z = -2 \int_d^L \int_{x_l}^{x_t} (c_p^+ - c_p^-)(x - x_*) dx dz, \tag{2.9}$$

где  $x_l(z)$  и  $x_t(z)$  — координаты передней и задней кромок крыла; знаки + и — относятся к верхней и нижней поверхности крыла.

Интегралы (2.4)–(2.9) вычисляются численно. Поскольку подынтегральная функция в (2.5), (2.8) знакопеременная, то сопротивление в каждой области при таком подходе получается как малая разность двух больших величин и результат численного интегрирования, как уже отмечалось, может оказаться неточным. Для повышения точности определения коэффициента сопротивления следует, используя интегральную теорему импульсов, перейти от интеграла давления по телу к выражению, содержащему интегралы по другим поверхностям со знакопостоянными подынтегральными функциями. В [4] приводится достаточно подробный вывод такого выражения для изолированного крыла, когда область одна и все течение описывается уравнением Кармана. Рассмотрим, каким образом результат работы [4] может быть обобщен на случай комбинации крыла и фюзеляжа с учетом особенностей постановки краевых задач в обеих областях.

Составляющие возмущенной скорости во внешней области удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(C_1 u + C_2 u^2)_x + v_y + w_z = 0, \quad u_y - v_x = 0, \quad u_z - w_x = 0. \quad (2.10)$$

Умножая первое уравнение этой системы на  $u$ , второе на  $v$ , а третье на  $w$  и складывая их, получим соотношение в дивергентной форме:

$$(C_1 u^2/2 + 2C_2 u^3/3 - (v^2 + w^2)/2)_x + (uv)_y + (uw)_z = 0.$$

Интегрируя данное выражение по всей внешней области с исключенными скачками уплотнения и применяя теорему Остроградского — Гаусса, с учетом асимптотики дальнего поля [4] имеем

$$\begin{aligned} - \iint_{tf \setminus g} \frac{v^2 + w^2}{2} dy dz + \iint_{sh} \left\{ \left[ C_1 \frac{u^2}{2} + \frac{2}{3} C_2 u^3 - \frac{v^2 + w^2}{2} \right] (\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + [uv](\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) + [uw](\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) \right\} ds + \\ + \iint_w \{ (uv)^- - (uv)^+ \} dx dz + \iint_{\partial P} u \frac{\partial \varphi}{\partial N} ds = 0. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Здесь индексы  $tf$ ,  $g$ ,  $sh$ ,  $w$ ,  $\partial P$  означают плоскость Треффтца, задний торец  $P$ , ударную волну, крыло и боковые грани  $P$  соответственно;  $\mathbf{N}$  — внешняя нормаль к соответствующим поверхностям во внешней области; квадратные скобки в интеграле по ударной волне обозначают разность величин до и после скачка. С учетом граничного условия (1.8) и соотношений (1.17), (2.8) интеграл по крылу представляет собой сопротивление давления в скоростной системе координат той части ЛА, которая находится во внешней области:

$$\iint_w \{ (uv)^- - (uv)^+ \} dx dz = \frac{c_{xa}^w}{4}.$$

Рассмотрим интеграл по скачку. Для его упрощения воспользуемся соотношениями на скачке, которые вытекают из дивергентного вида системы (2.10):

$$[C_1 u + C_2 u^2](\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + [v](\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) + [w](\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad -[v](\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + [u](\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) = 0, \quad -[w](\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + [u](\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) = 0.$$

Умножая первое из этих условий на среднее арифметическое на скачке значение  $\langle u \rangle$ , второе на  $\langle v \rangle$ , третье на  $\langle w \rangle$  и подставляя их в интеграл по ударной волне, уравнение (2.11) можно привести к виду

$$- \iint_{tf \setminus g} \frac{v^2 + w^2}{2} dy dz - \frac{\gamma + 1}{12} M_\infty^2 \iint_{sh} [u]^3 dy dz + \frac{c_{xa}^w}{4} + \iint_{\partial P} u \frac{\partial \varphi}{\partial N} ds = 0. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) отличается от формулы для сопротивления давления изолированного крыла в скоростной системе координат [4] наличием интеграла по боковым граням параллелепипеда  $P$ , что обусловлено разбиением течения на две области. Для исключения данного интеграла рассмотрим внутреннюю область.

Составляющие возмущенной скорости во внутренней области удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$v_y + w_z = 0, \quad u_y - v_x = 0, \quad u_z - w_x = 0. \quad (2.13)$$

Умножая первое уравнение этой системы на  $u$ , второе на  $v$ , а третье на  $w$  и складывая их, получим соотношение в дивергентном виде:

$$-((v^2 + w^2)/2)_x + (uv)_y + (uw)_z = 0.$$

Интегрируя данное соотношение по всей внутренней области с исключенными скачками уплотнения и применяя теорему Остроградского — Гаусса, с учетом условий на ближнем и дальнем торце  $P$  имеем

$$\begin{aligned} & - \iint_g \frac{v^2 + w^2}{2} dy dz + \iint_{sh} \left\{ - \left[ \frac{v^2 + w^2}{2} \right] (\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + [uv](\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) + [uw](\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) \right\} ds + \\ & + \iint_f \left\{ - \frac{v^2 + w^2}{2} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + uv(\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) + uw(\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) \right\} ds + \iint_{\partial P} u \frac{\partial \psi}{\partial N} ds = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $f$  означает интегрирование по поверхности той части ЛА, которая находится внутри  $P$ ;  $\mathbf{N}$  — единичная нормаль к соответствующим поверхностям во внутренней области. Остановимся подробнее на интеграле по поверхности тела. Согласно условию (1.6), он может быть представлен в виде

$$- \iint_f \left\{ - \frac{v^2 + w^2}{2} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) - u(\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) - u\alpha(\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) \right\} ds.$$

Поскольку угол атаки полагается малым, то коэффициент сопротивления в скоростной системе координат выражается через коэффициенты сопротивления и подъемной силы в связанной системе координат следующим образом:

$$c_{xa} = c_x + \alpha c_y.$$

Поэтому, принимая во внимание (1.16), (2.1), (2.2), можно сделать вывод, что интеграл по телу во внутренней области с точностью до членов более высокого порядка малости представляет собой сопротивление давления в скоростной системе координат той части ЛА, которая находится внутри  $P$ :

$$- \iint_f \left\{ \left( \frac{v^2 + w^2}{2} + u \right) (\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + u\alpha(\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) \right\} ds = \frac{c_{xa}^f}{4}.$$

Обратимся теперь к интегралу по скачку. Для его упрощения воспользуемся соотношениями на скачке, которые вытекают из дивергентного вида системы (2.13):

$$[v](\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) + [w](\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad -[v](\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + [u](\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) = 0, \quad -[w](\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) + [u](\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) = 0.$$

Умножая первое условие на  $\langle u \rangle$ , второе на  $\langle v \rangle$ , третье на  $\langle w \rangle$  и подставляя их в подынтегральное выражение, получим, что интеграл по скачку во внутренней области тождественно равен нулю. Складывая (2.12) и (2.14), найдем выражение, связывающее сопротивление давления в скоростной системе координат всего ЛА в целом с интегралом по скачку во внешней области и с интегралом по плоскости Треффгца:

$$c_{xa} = \frac{\gamma + 1}{3} M_\infty^2 \iint_{sh} [u]^3 dy dz + 2 \iint_{tf} (v^2 + w^2) dy dz. \quad (2.15)$$

Отметим, что интегралы по боковым граням параллелепипеда  $\partial P$  для внешней и внутренней области при сложении взаимно уничтожаются ввиду условий (1.3), (1.4) и прямо противоположного направления внешних нормалей.

Первое слагаемое в (2.15) не равно нулю только в том случае, если обтекание ЛА сопровождается образованием ударных волн. Поэтому оно представляет собой волновое сопротивление. Второй член в (2.15) — индуктивное сопротивление, которое отлично от нуля даже в отсутствие ударных волн. Это выражение для индуктивного сопротивления совпадает с соответствующим результатом линейной теории.

**3. Численные методы решения задачи.** Для решения краевой задачи во внутренней области используется панельный метод [2]. В рамках этого метода объединение контуров поперечного сечения тела и поперечного сечения параллелепипеда  $P$  плоскостью  $x = x_i$  заменяется набором прямых панелей, представляющих собой простые слои источников с постоянной интенсивностью. Вихревая пелена, простирающаяся вниз по потоку от задней кромки той части крыла, которая находится внутри  $P$ , моделируется набором панелей-дублетов, лежащих в плоскости  $y = y_w$  и представляющих собой двойные слои постоянной интенсивности, которая согласно (1.9) находится как скачок потенциала на задней кромке крыла. Для определения интенсивности простых слоев используются граничные условия (1.3), (1.7), (1.10). При этом для получения в любом сечении  $x_i = \text{const}$  замкнутой системы уравнений с плотной матрицей граничные условия удовлетворяются в центре каждой панели. Поскольку векторы правых частей в этом случае согласно (1.3) зависят от распределения потенциала  $\varphi$  во внешней области, которое, в свою очередь, находится методом установления по времени, то системы линейных уравнений во внутренней области приходится решать многократно. Самая трудоемкая часть решения системы линейных уравнений методом исключения по Гауссу — приведение матрицы к треугольному виду. Для того чтобы избежать многократного повторения этой процедуры и повысить точность решения, следует воспользоваться альтернативным методом  $LU$ -разложения с выбором ведущего элемента по всей матрице. В этом случае достаточно сделать  $LU$ -разложение каждой матрицы только один раз.

Рассмотрим конечно-разностный метод, применяемый для решения краевой задачи во внешней области. Поскольку задача решается методом установления, будем исходить из уравнения, содержащего нестационарные члены:

$$M_\infty^2 \varphi_{tt} + 2M_\infty^2 \varphi_{xt} = ((C_1 + C_2 \varphi_x) \varphi_x)_x + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}. \quad (3.1)$$

Для аппроксимации нелинейной части уравнения (3.1) используется монотонная схема Энгквиста — Ошера первого порядка точности [10], линейные дифференциальные операторы аппроксимируются центрально-разностными выражениями. Решение получаемой системы сеточных уравнений осуществляется на основе метода приближенной факторизации трехмерного конечно-разностного оператора. В рамках этого метода трехмерный конечно-разностный оператор приближенно представляется в виде произведения трех одномерных операторов [11].

Таким образом, при выполнении одного шага интегрирования по времени необходимо решить одну систему линейных уравнений с 4-диагональной матрицей ( $x$ -проход) и две системы линейных уравнений с 3-диагональными матрицами ( $y$ - и  $z$ -проходы). Для решения систем линейных уравнений с разреженными матрицами такой структуры, когда все диагонали плотно примыкают к главной, используется метод скалярной прогонки. Для устойчивости скалярной прогонки требуется, чтобы матрица обладала свойством диагонального доминирования. При выполнении  $y$ - и  $z$ -проходов это свойство выполняется безусловно. Для обеспечения диагонального доминирования при  $x$ -проходе в уравнении (3.1) удерживается внепорядковый с точки зрения теории малых возмущений член  $M_\infty^2 \varphi_{tt}$ .



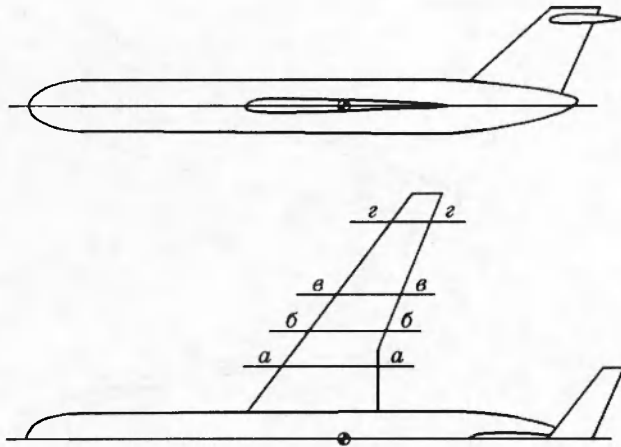


Рис. 2

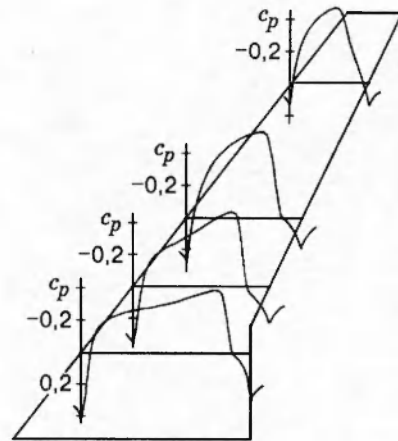


Рис. 3

**4. Результаты расчета аэродинамических характеристик ЛА.** Рассмотрим обтекание модели пассажирского самолета, изображенного на рис. 2, в диапазоне  $0,82 \leq M_\infty \leq 0,98$  при  $\alpha = 0$  и  $4^\circ$ . Модель выполнена по схеме центроплана, угол стреловидности по передней кромке  $\chi = 37^\circ$ , сужение крыла  $\eta = 3,64$ , удлинение  $\lambda = 7,58$ , профиль крыла симметричный П-114с. Хвостовое оперение имеет также симметричный профиль NASA0010M. Стабилизатор установлен под углом  $-3^\circ$  к продольной оси фюзеляжа, поперечные сечения которого представляют собой окружности.

На рис. 3 приведены зависимости распределения коэффициента давления  $c_p$  по поверхности крыла в четырех сечениях (а-г), изображенных на рис. 2, при  $\alpha = 0$  и  $M_\infty = 0,95$ . Анализ рис. 3 показывает, что точка минимума давления в сечениях а-г отстоит от задней кромки крыла на расстоянии, составляющем соответственно 34,1; 38,3; 49,5; 52 % длины местной хорды профиля. Следовательно, в корневых сечениях крыла область пониженного давления смещается к задней кромке крыла, а в концевых сечениях — к передней.

В результате этого в корневых сечениях крыла силы давления на переднюю часть профиля увеличиваются, а на заднюю — уменьшаются. Поэтому коэффициент сопротивления давления в этих сечениях принимает большие положительные значения. В концевых сечениях крыла смещение области максимальных разрежений к носку профиля обуславливает уменьшение сил давления, действующих на носовую часть профиля, и увеличение этих сил в хвостовой части. Таким образом, коэффициент сопротивления давления в концевых сечениях значительно уменьшается, достигая отрицательного значения. В промежуточных сечениях крыла местный коэффициент сопротивления изменяется от положительных до отрицательных значений. Отмеченная закономерность наблюдается и в эксперименте [12, с. 57].

Рассмотрим, как описанное поведение распределения  $c_p$  по поверхности крыла влияет на точность определения коэффициента сопротивления давления. Будем определять  $c_x$  путем численного интегрирования в соответствии с (2.8). Проведем сначала интегрирование по переменной  $x$ , т. е. в поперечных сечениях крыла  $z = \text{const}$ . В этом случае подынтегральная функция является знакопеременной и коэффициент сопротивления сечения получается как малая разность двух больших величин: сопротивления носовой части профиля и тяги, действующей на его хвостовую часть. Поскольку распределение коэффициентов сопротивления отдельных сечений вдоль размаха крыла, как было показано выше, также представляется знакопеременной функцией, то при интегрировании по пере-

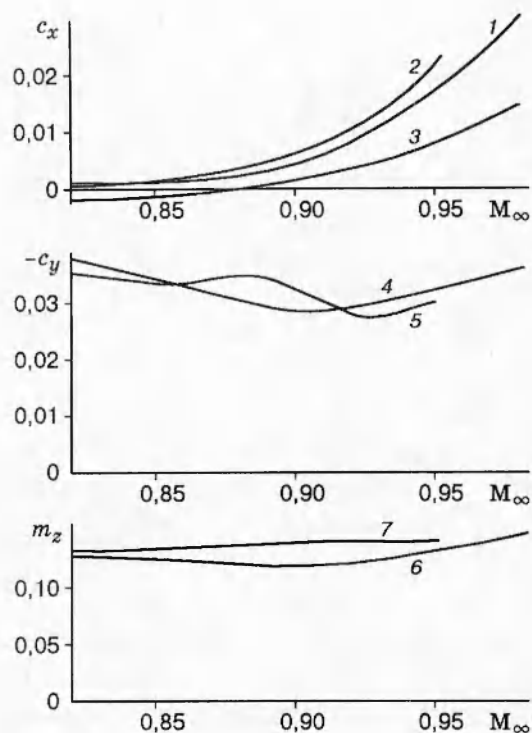


Рис. 4

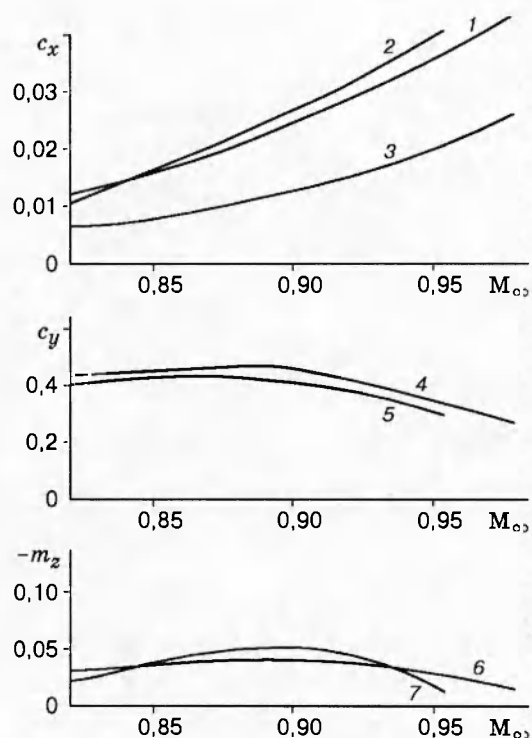


Рис. 5

менной  $z$  коэффициент сопротивления всего крыла в целом снова получается как малая разность двух больших величин. В результате происходит такое накопление численной ошибки, которое может приводить к получению коэффициента сопротивления с большой погрешностью.

На рис. 4 представлены расчетные и экспериментальные кривые зависимости  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $m_z$  от  $M_\infty$  при  $\alpha = 0$ . Кривая 1 отвечает значению  $c_x$ , вычисленному методом интегрирования по скачку в соответствии с (2.15), кривая 2 экспериментальная, рассчитанная как разность значений полного сопротивления при заданном числе Маха и  $M_\infty = 0,6$  для докритического режима обтекания, кривая 3 определяется методом интегрирования по телу, т. е. как сумма (2.5) и (2.8). Результат расчета подъемной силы представлен кривой 4. В рассматриваемом случае подъемная сила создается главным образом горизонтальным оперением и имеет малое отрицательное значение ввиду отрицательного угла установки стабилизатора. Сравнение расчетной кривой 4 и экспериментальной 5 показывает, что они достаточно близки друг к другу, за исключением диапазона  $0,87 \leq M_\infty \leq 0,92$ . Отмеченное расхождение связано, вероятно, с влиянием эффектов вязкости.

Кривые 6 и 7 на рис. 4 представляют собой расчетную и экспериментальную зависимости момента тангажа. В обоих случаях момент тангажа определяется относительно точки центра тяжести модели, положение которой показано на рис. 2. Ввиду того что форма фюзеляжа близка к осесимметричной, модель выполнена по схеме центроплана и  $y_* = y_w$ , момент тангажа создается главным образом аэродинамическими силами, действующими на хвостовое оперение. Сравнение расчетной и экспериментальной зависимостей  $m_z(M_\infty)$  позволяет сделать вывод, что силы сопротивления, создаваемые вязкостью газа и не учитываемые в данной постановке задачи, вносят заметный вклад в суммарный момент. Отметим, что расчетная кривая дает заниженное значение  $m_z$ , так как сила вяз-

кого трения, действующая на хвостовое оперение, создает момент того же знака, что и подъемная сила.

На рис. 5 приведены расчетные и экспериментальные зависимости аэродинамических характеристик ЛА в скоростной системе координат от  $M_\infty$  при  $\alpha = 4^\circ$ . Обозначение кривых имеет тот же смысл, что и на рис. 4. Поскольку в рассматриваемом случае крыло создает большую подъемную силу (кривые 4 и 5), то при определении экспериментальных значений сопротивления давления необходимо учесть вклад индуктивного сопротивления. Поэтому, в отличие от случая  $\alpha = 0$ , кривая 2 рассчитывается как полное сопротивление при заданном числе Маха минус разность полного и индуктивного сопротивлений при  $M_\infty = 0,6$ . Определение индуктивного сопротивления проводится по формуле (2.15) в результате численного решения дополнительной задачи обтекания.

В целом сравнение экспериментальных и расчетных значений аэродинамических характеристик рассматриваемого ЛА позволяет сделать вывод об их удовлетворительном согласовании. Отметим, что сопротивление давления определяется с приемлемой точностью только методом интегрирования по скачку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01067а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Oswatitsch K., Keune F. Ein Äquivalenzsatz für nichtangestellte Flügel kleiner Spannweite in Schallnaher Strömung // Z. Flugwissenschaften. 1955. Bd 3, N 2. S. 23–48.
2. Malmuth N. D., Wu C. C., Cole J. D. Slender body theory and space shuttle transonic aerodynamics. N. Y., 1985 (Paper/AIAA; N 85-0478).
3. Navert U. G., Sedin Y. C. Transonic computations about complex configurations using coupled inner and outer flow equations // Proc. 15th ICAS Congress. 1986. V. 1. P. 303–312.
4. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989.
5. Murman E. M., Cole J. D. Inviscid drag at transonic speeds. N. Y., 1974 (Paper / AIAA; N 74-0540).
6. Найда М. А., Фонарев А. С. Эффективный метод расчета волнового сопротивления тел вращения в трансзвуковом диапазоне скоростей // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 60–68.
7. Фонарев А. С. Профиль в трансзвуковом потоке при воздействии порывов ветра и слабых ударных волн // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 3. С. 20–27.
8. Найда М. А., Фонарев А. С. Волновое сопротивление тел вращения в нестационарном трансзвуковом потоке // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 35–44.
9. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969.
10. Engquist B. E., Osher S. J. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations // Math. of Comp. 1980. V. 34, N 19. P. 259–271.
11. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
12. Петров К. П. Аэродинамика элементов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985.

Поступила в редакцию 9/Х 1996 г.