

10. Hagena O. F. Nucleation and growth of clusters in expanding nozzle flows. — Surface Science, 1981, vol. 106, N S1—3.
11. Lewis J. W. L., Williams W. D., Powell H. M. Laser diagnostics of a condensing binary mixture expansion flow field. — In: 9th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Germany, 1974, vol. 2, p. F 7—1.
12. Golomb D., Good R. E. et al. Dimers, clusters and condensation in free jets. II. — J. Chem. Phys., 1972, vol. 57, N 9.

УДК 539.19

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А. М. Сагалаков, К. А. Сергеев

(Барнаул)

В последние годы значительное развитие получил новый раздел электромагнитной гидродинамики — электрогидродинамика. Теоретические исследования в этой области стимулируются разнообразными приложениями в технике [1—5]. К настоящему времени сооружены действующие электрогидродинамические насосы и генераторы, трансформаторы постоянного тока. Однако дальнейшая разработка электрогидродинамических устройств тормозится неполнотой, а иногда и противоречивостью представлений о закономерностях электрофизики и гидромеханики слабопроводящих жидкостей и газов [2]. Пожалуй, наиболее слабо изучены вопросы устойчивости и турбулентности электрогидродинамических течений.

В данной работе анализируется устойчивость плоскопараллельных электрогидродинамических течений в продольном электрическом поле по отношению к малым возмущениям.

Выберем в качестве характерной длины величину l_0 , равную полуширине канала, в качестве характерной скорости — величину V_0 . Пусть E_0 — напряженность внешнего приложенного электрического поля. Будем измерять напряженность электрического поля, объемную плотность заряда, время, давление, плотность тока в единицах E_0 , $\tilde{\rho}_e$, l_0/V_0 , ρV_0^2 , $K\tilde{\rho}_e$, E_0 (ρ — плотность жидкости, K — коэффициент подвижности ионов). Тогда систему уравнений электрогидродинамики вязкой несжимаемой жидкости можно записать в безразмерной форме

$$(1) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + (1/\text{Re}) \Delta \mathbf{v} + \text{Eu}_e \rho_e \mathbf{E} + \Gamma \nabla E^2;$$

$$(2) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0;$$

$$(3) \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0;$$

$$(4) \quad \text{div } \mathbf{E} = \text{Re}_e \rho_e;$$

$$(5) \quad \partial \rho_e / \partial t + (1/M_e) \text{div } \mathbf{j} = 0;$$

$$(6) \quad \mathbf{j} = \rho_e (M_e \mathbf{v} + \mathbf{E}) - (1/\text{Re}_i) \nabla \rho_e.$$

Здесь \mathbf{v} — скорость; \mathbf{E} — напряженность электрического поля; ρ_e — объемная плотность заряда; \mathbf{j} — плотность тока; Re — число Рейнольдса; $\text{Re}_e = \tilde{\rho}_e l_0 / \varepsilon \varepsilon_0 E_0$ — электрическое число Рейнольдса; $M_e = V_0 / K E_0$ — электрическое число Маха; $\text{Re}_i = K l_0 E_0 / D$ — ионное число Рейнольдса; $\text{Eu}_e = \tilde{\rho}_e E_0 l_0 / \rho V_0^2$ — электрическое число Эйлера; $\Gamma = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_0^2 / 2 \rho V_0^2$ — число электрического давления (ε — диэлектрическая проницаемость жидкости, D — коэффициент диффузии).

В уравнении Навье — Стокса (1) учтены воздействие на заряженную жидкость со стороны электрического поля (член $\text{Eu}_e \rho_e \mathbf{E}$) и сила, действующая на слабо поляризующийся диэлектрик в неоднородном электрическом поле (член $\Gamma \nabla E^2$). Условие несжимаемости дает уравнение (2). Соотношение (4) — одно из уравнений электродинамики. В электрогидродинамике эффекты, обусловленные магнитной индукцией, не учитываются. Электри-

ческое поле считается потенциальным, что выражается уравнением (3). Уравнение (5) выражает закон сохранения заряда, а уравнение (6) — закон Ома.

Закон Ома (6) учитывает ток проводимости, ток конвекции и ток самодиффузии. Электрические критерии подобия M_e и Re_i определяют вклад диффузионной и конвективной компонент в величину плотности тока. Если величина Re_i велика, то диффузионной компонентой тока можно пренебречь; если величина M_e мала, то можно пренебречь конвективной компонентой тока.

Отметим, что электрогидродинамические явления в чистом виде встречаются редко. Магнитогидродинамическими процессами можно пренебречь в том случае, когда характерное время релаксации электрического заряда много больше характерного времени магнитной диффузии. При этом взаимодействия являются электрогидродинамическими, а магнитная индукция пренебрежимо мала, зато существенны эффекты сохранения зарядов [1].

Рассмотрим стационарное движение заряженной жидкости в плоском канале под действием внешнего постоянного электростатического поля и градиента давления. Будем считать, что электрическое поле направлено вдоль оси x декартовой системы координат. Ось y перпендикулярна пластинам канала. При этом координаты стенок канала $y = \pm 1$. Будем предполагать, что величина $\partial p/\partial x$ постоянна. Тогда выражение для скорости можно представить в виде [6]

$$(7) \quad U = u_1(1 - y^2) + u_2(1 - \ln \cos By / \ln \cos B),$$

$$u_1 = -\frac{Re}{2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u_2 = 2 \frac{Re Eu_0}{Re_0 Re_i} \ln \left(\frac{1}{\cos B} \right), \quad B = \sqrt{\frac{Re_i Re_0}{2}} \rho_{e0}.$$

Здесь ρ_{e0} — безразмерная плотность заряда на оси канала при $y = 0$. Выберем в качестве величины V_0 наибольшую скорость потока, достигаемую на оси канала. Тогда выражение (7) запишется в виде

$$(8) \quad U = \delta(1 - y^2) + (1 - \delta)(1 - \ln \cos By / \ln \cos B).$$

Величина параметра δ изменяется в пределах от 0 до 1 в зависимости от соотношения между электрическими и механическими силами.

Величина индуцированного поперечного электрического поля определяется по формуле [6] $E_y = (2/Re_i)B \operatorname{tg} By$.

Распределение плотности заряда по сечению канала определяется по формуле [6] $\rho_e = \rho_{e0}/\cos^2 By$. Отсюда находим среднюю по сечению канала плотность заряда

$$\bar{\rho}_e = \rho_{e0} \operatorname{tg} B/B.$$

Из данного выражения видно, что параметр B может изменяться в пределах от 0 до $\pi/2$ (именно поэтому в формулах (7), (8) под знаком логарифма всегда стоит положительная величина).

Случай $\delta = 1$ соответствует течению Пуазейля. При $\delta = 0$ течение является чисто пондеромоторным, т. е. вызывается только электрическими силами:

$$(9) \quad U = 1 - \ln \cos By / \ln \cos B.$$

Интересно отметить, что при малых B электрические силы формируют профиль скорости, практически совпадающий с профилем скорости течения Пуазейля. При значениях B , близких к $\pi/2$ ($B > 1,5$), профиль скорости (9) в центральной части канала является выположенным, а вблизи стенок канала скорость быстро обращается в нуль.

Проанализируем устойчивость рассмотренного выше стационарного течения по отношению к малым возмущениям.

Линеаризуя систему уравнений (1)–(6) по малым возмущениям, получим следующую систему уравнений:

$$(10) \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}'\nabla) \mathbf{v} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}' +$$

$$+ \text{Eu}_0 (\rho_e \mathbf{E}' + \mathbf{E} \rho_e') + 2\Gamma \nabla (\mathbf{E}\mathbf{E}');$$

$$(11) \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0;$$

$$(12) \quad \text{rot } \mathbf{E}' = 0;$$

$$(13) \quad \text{div } \mathbf{E}' = \text{Re}_0 \rho_e';$$

$$(14) \quad \frac{\partial \rho_e'}{\partial t} + \frac{1}{M_0} \text{div } \mathbf{j}' = 0;$$

$$(15) \quad \mathbf{j}' = \rho_e' (M_0 \mathbf{v} + \mathbf{E}) + \rho_e (M_0 \mathbf{v}' + \mathbf{E}') - \frac{1}{\text{Re}_0} \nabla \rho_e'.$$

Здесь штрихом обозначены малые возмущения. Решение системы уравнений (10)–(15) ищем в виде элементарных волновых решений.

Из (10), (11), используя (12), (13), находим дифференциальное уравнение

$$(16) \quad L[v] \equiv \frac{1}{i\alpha \text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 v - \left[(U - C) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) v - \frac{d^2 U}{dy^2} v \right] = \\ = \frac{\text{Eu}_0}{\alpha^2 \text{Re}_0} \left[-i\alpha \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \frac{dE'_x}{dy} - k^2 E_y \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) E'_x + k^2 \frac{d^2 E_y}{dy^2} E'_x \right].$$

Из (14), (15), используя (11)–(13), получаем другое дифференциальное уравнение

$$(17) \quad \frac{1}{\text{Re}_0} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 E'_x - E_y \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \frac{dE'_x}{dy} - i\alpha \left[1 + M_0(U - C) + \right. \\ \left. + \frac{2}{i\alpha} \frac{dE_y}{dy} \right] \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) E'_x - i\alpha M_0 \frac{d^2 E_y}{dy^2} v - \frac{d^2 E_y}{dy^2} \frac{dE'_x}{dy} = 0.$$

Уравнения (16), (17) образуют систему комплексных уравнений 8-го порядка относительно комплексной амплитуды компоненты y возмущения скорости v и комплексной амплитуды компоненты x возмущения поля E'_x . Отметим, что безразмерный параметр Γ , описывающий действие электрических сил на слабо поляризующийся диэлектрик, не входит в уравнения линейной теории (16), (17). Определим возмущения поля вне области, содержащей объемный заряд и учтем непрерывность тангенциальной составляющей напряженности поля и нормальной составляющей индукции поля. Тогда получим граничные условия для E'_x :

$$(18) \quad \frac{dE'_x(1)}{dy} + kE'_x(1) = 0;$$

$$(19) \quad \frac{dE'_x(-1)}{dy} - kE'_x(-1) = 0,$$

записанные для случая, когда диэлектрическая проницаемость стенок канала совпадает с диэлектрической проницаемостью жидкости.

Два других граничных условия для поля находятся из требования обращения в нуль нормальной составляющей плотности тока на границе жидкость — стенка. Эти условия имеют вид

$$(20) \quad \frac{1}{\text{Re}_0} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \frac{dE'_x}{dy} - E_y \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) E'_x - \frac{dE_y}{dy} \frac{dE'_x}{dy} = 0 \text{ при } y = \pm 1.$$

Проблема исследования устойчивости свелась к анализу задачи на собственные значения для системы уравнений (16), (17) с граничными условиями (19), (20) и граничными условиями прилипания и непроницаемости для скорости. Для этой задачи характерны трудности, известные в теории

гидродинамической устойчивости течений вязкой жидкости. Кроме того, данная задача содержит большее число критериев подобия, и, что особенно важно, порядок системы (16), (17) значительно выше, чем порядок аналогичной системы в общей гидродинамике. Рассматриваемая задача значительно сложнее, чем ее аналог в магнитной гидродинамике при конечных магнитных числах Рейнольдса.

Анализ устойчивости упрощается, если предположить, что величина Re_i велика. В этом случае уравнение (17) запишется в виде

$$(21) \quad \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) E'_x = - \frac{M_0}{1 + M_0(U - c)} \frac{d^2 E_y}{dy^2} v,$$

а уравнение (16) приобретает вид

$$(22) \quad L[v] = - \frac{i Eu_0}{\alpha Re_0} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \frac{dE'_x}{dy}.$$

Продифференцировав уравнение (21), сведем систему (21), (22) к модифицированному уравнению Орра — Зоммерфельда:

$$(23) \quad L[v] = \frac{i Eu_0 M_0}{\alpha Re_0} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{1 + M_0(U - c)} \frac{d^2 E_y}{dy^2} v \right].$$

Наконец, если еще мал безразмерный параметр $P = 2Eu_0 M_0 B^3 / Re_0 Re_i$, то правой частью (23) можно пренебречь. При этом уравнение (23) переходит в уравнение Орра — Зоммерфельда. Возможность пренебрежения правой частью (23) при малом значении параметра P продемонстрирована в численном эксперименте при $\delta = 0,5$, $M_0 = 10^{-3}$, $B = 1$. Пока $P < 0,002$, критические числа Рейнольдса отличаются от своего предельного значения при $P = 0$ не более чем на 5,5%.

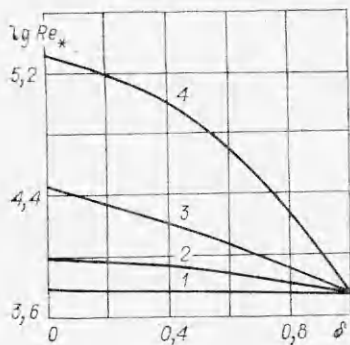
Электрическое поле формирует определенный вид профиля скорости основного течения и тем самым существенно влияет на его стабильность. Именно это свойство электрического поля является определяющим при указанных выше упрощающих предположениях. В общем случае может оказаться существенным и непосредственное воздействие поля на пульсации скорости потока. Однако детальный учет такого механизма воздействия электрического поля требует, вообще говоря, изучения полной системы уравнений (16), (17).

В данной работе исследовался механизм воздействия электрического поля на стабильность потока, обусловленный формированием полем определенного вида профиля скорости. Задача на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда с профилем скорости (8) решалась с помощью метода дифференциальной прогонки [7]. В соответствии с теоремой Сквайра исходная трехмерная задача сводится к эквивалентной двумерной, поэтому в уравнении $L[v] = 0$ $\alpha = k$.

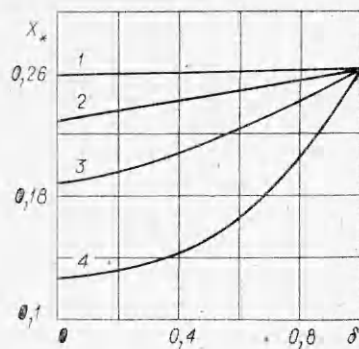
На фиг. 1 представлены зависимости критического числа Рейнольдса Re_* от параметра δ (кривым 1—4 соответствуют значения $B = 0,3; 0,7; 1; 1,3$).

Наибольшие величины Re_* соответствуют чисто пондеромоторному течению ($\delta = 0$). При увеличении δ величины Re_* , как видно из фиг. 1, монотонно убывают до величины Re_* , соответствующей течению Пуазейля ($Re_* = 5772$). Заметная стабилизация потока достигается при $B \gtrsim 1$. При малых B критические числа Рейнольдса незначительно отличаются от величины Re_* течения Пуазейля при всех δ . Этот результат можно было предвидеть заранее, поскольку при малых B профиль скорости (8) практически не отличается от параболы Пуазейля.

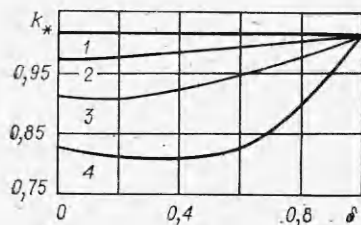
На фиг. 2, 3 представлены зависимости \bar{X}_* (\bar{X}_* — критическая фазовая скорость) и \bar{k}_* (\bar{k}_* — критическое волновое число) от параметра δ (кривым 1—4 соответствуют значения $B = 0,3; 0,7; 1; 1,3$). Характерно, что при увеличении относительного вклада электрических сил в основной поток величина \bar{X}_* уменьшается.



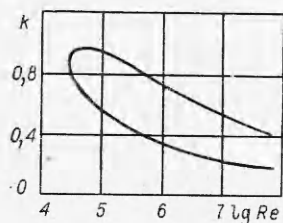
Ф и г. 1



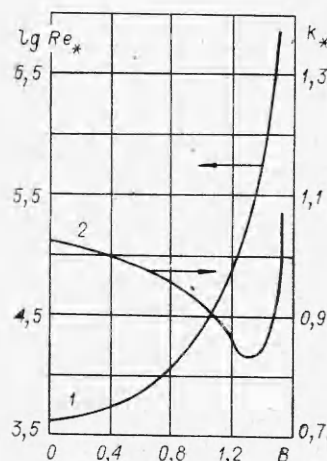
Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 5



Ф и г. 4

Особый интерес представляет пондеромоторное течение, вызываемое только электрическими силами ($\delta = 0$ в (8)). Зависимости Re_* и k_* от B для данного случая представлены на фиг. 4 (соответственно кривые 1, 2). Величина Re_* с ростом B монотонно возрастает, причем, когда $B \rightarrow \pi/2$, $Re_* \rightarrow \infty$. Минимум k_* достигается при $B \approx 1,3$. Затем величина k_* растет, что соответствует характеру задачи при значениях B , близких к $\pi/2$. При таких B появляется новый характерный размер — размер области, в которой скорость убывает от значений, близких к 1, до 0. Величина k_* должна быть обратно пропорциональна этому размеру. Поэтому заранее можно предсказать, что величина k_* будет расти, начиная с таких значений B , при которых течение приобретает пограничный характер.

На фиг. 5 приведен пример нейтральной кривой для пондеромоторного течения при $B = 1$.

Проведенный анализ показывает, что внешнее продольное электрическое поле стабилизирует плоскопараллельное течение слабопроводящей заряженной жидкости. Эффективность такой стабилизации зависит от величины объемного заряда и от соотношения между составляющими скорости потока, вызванными градиентом давления и пондеромоторными силами. По мере увеличения объемного заряда пондеромоторные силы у стенок канала возрастают. Это приводит при достаточно большой величине напряженности электрического поля к выравниванию профиля скорости в ядре потока и увеличению ее градиента у стенок канала. Такой механизм действия электрического поля обуславливает увеличение критических чисел Рейнольдса, по крайней мере, до тех пор, пока поперечное

электрическое поле, индуцированное объемным зарядом жидкости, достаточно мало.

Отметим, что ранее рассматривалась почти исключительно устойчивость состояний равновесия заряженной жидкости и было установлено, что во многих случаях электрическое поле оказывает дестабилизирующее воздействие.

Полученные результаты можно использовать, например, при оценке смены ламинарного и турбулентного режимов работы электрогидродинамических насосов и при анализе электрогидродинамического способа управления пограничным слоем в газе.

Авторы благодарят В. Н. Штерна за помощь в работе и полезные обсуждения.

Поступила 15 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелчер Дж. Р. Электрогидродинамика. — Магнитн. гидродинамика, 1974, № 2.
2. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979.
3. Гросу Ф. П., Болога М. К. Одномерные термогидродинамические течения слабопроводящей жидкости. — Магнитн. гидродинамика, 1974, № 1.
4. Рубашов И. Б., Бортников Ю. С. Электрогазодинамика. М.: Атомиздат, 1971.
5. Гогосов В. В., Полянский В. А. Электрогидродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения. — В кн.: Механика жидкости и газа. Вып. 10, 1976.
6. Повх И. Л. Техническая гидродинамика. Л.: Машиностроение, 1976.
7. Гольдцтик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.

УДК 532.517.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕРМИКОВ

Т. Н. Анохина, Б. И. Заславский, И. М. Сотников
(Москва)

В работе приведены некоторые результаты исследований взаимодействия двух термиков, образовавшихся при подъеме первоначально шарообразных объемов газа, более легкого, чем внешняя среда. Как известно, такие термики в процессе подъема трансформируются в кольцевые вихри, причем легкий газ переходит в их тороидальные ядра [1—4]. В предлагаемой работе исследовались процессы взаимодействия на различных этапах такой трансформации.

1. Рассмотрим взаимодействие двух термиков. Предполагается, что они образовались в результате внезапного одновременного или разновременного возникновения двух равных свободных шарообразных объемов с эффективным радиусом R_0 , заполненных газом плотностью ρ_1 при плотности внешней атмосферы ρ_0 . Пусть L — расстояние между центрами объемов, τ — временной интервал, разделяющий моменты возникновения первого и второго термиков, H — высота, h — высота слияния термиков или их активного взаимодействия, g — ускорение свободного падения, $\xi = (\rho_0 - \rho_1)/\rho_0$ — относительный перепад плотности. Если пренебречь влиянием вязкости и предположить, что основными параметрами, определяющими рассматриваемое движение, являются дефицит веса $F = Q\xi g \rho_0$ [2], расстояние L и временной интервал τ , то на основании теории размерностей получим

$$(1.1) \quad h^0 = h^0(L^0, \tau^0), \quad T^0 = T^0(L^0, \tau^0), \quad \alpha = dR/dH;$$

$$(1.2) \quad h^0 = h/R_0, \quad T^0 = T \sqrt{\xi g/R_0}, \quad L^0 = L/R_0,$$

$$H^0 = H/R_0, \quad \tau^0 = \tau \sqrt{\xi g/R_0},$$