

та вязкости $\mu_{расч}$, полученного путем постановки численного эксперимента в рамках вязкоупругой модели Максвелла. С другой стороны, коэффициент вязкости μ_m , рассчитанный по максвелловскому модельному уравнению (3.6), по порядкам величин совпадает с расчетным коэффициентом вязкости $\mu_{расч}$. Модельное уравнение (3.6) отличается от уравнения (3.7) для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости членом $\partial \sigma_{11}^B / \partial x$.

В результате прохождения металла через зону пластических деформаций в нем образуются сжимающие остаточные напряжения σ_{11}^B . Наличие остаточных напряжений приводит к большему горизонтальному смещению частиц слоя металла, чем аналогичное смещение, даваемое моделью вязкой несжимаемой жидкости, а значит, и к разным по порядку величин значениям коэффициентов вязкости.

Автор признателен С. К. Годунову за постановку и обсуждение задачи.

Поступила 9 II 1982

Т а б л и ц а 3

W , км/с	1,8	1,8	1,2
p , 10^{-8} ·Па	7,5	5	5
$S_{расч}$, мм ²	-0,54	-0,35	-1,04
S_m , мм ²	-0,41	-0,15	-0,48
S_B , мм ²	-0,11	-0,04	-0,1
$\mu_{расч}$, П	$1,6 \cdot 10^5$	$2,4 \cdot 10^5$	$3,7 \cdot 10^5$
μ_m , П	$1,5 \cdot 10^5$	10^5	$1,6 \cdot 10^5$
μ_B , П	$4,1 \cdot 10^4$	$2,9 \cdot 10^4$	$3,3 \cdot 10^4$

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
2. Годунов С. К., Дерibas А. А. и др. Исследование вязкости металлов при высокоскоростных соударениях. — ФГВ, 1971, № 1.
3. Козин Н. С., Кузьмина Н. К. Ударные аднабаты и профили слабых ударных волн в металлах. — ПМТФ, 1977, № 4.
4. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. И., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
5. Сергеев-Альбов Н. Н. Численный расчет остаточных напряжений. Препринт № 212 ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1980.
6. Годунов С. К., Сергеев-Альбов Н. И. Уравнения линейной теории упругости с точечными максвелловскими источниками релаксации напряжений. — ПМТФ, 1977, № 4.
7. Годунов С. К., Демчук А. Ф. и др. Интерполяционные формулы для зависимости максвелловской вязкости. — ПМТФ, 1974, № 4.

УДК 539.376

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ

В. М. Александров, Е. В. Коваленко

(Москва)

1. Приведем вначале некоторые основные соотношения нелинейной теории ползучести для случая плоской деформации, необходимые в дальнейшем [1]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\varepsilon_x = A\sigma_i^{m-1} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y], \quad \varepsilon_y = A\sigma_i^{m-1} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x],$$

$$\gamma_{xy} = A\sigma_i^{m-1} \tau_{xy} \quad (m \geq 1),$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]^2 + [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]^2 + 6\tau_{xy}^2},$$

где A — модуль ползучести; ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим теперь решения некоторых задач о равновесии тонкого слоя* ($|x| < \infty$, $0 \leq y \leq h$), физико-механические свойства которого описываются системой уравнений (1.1). Пусть краевые условия на гранях слоя имеют вид

$$(1.2) \quad \tau_{xy} = 0 \quad (y = 0, y = h), \quad \sigma_y = -p^*(x, t) \quad (y = h),$$

$$p^*(x, t) = p(x, t) \quad (|x| \leq a), \quad p^* = 0 \quad (|x| > a), \quad v = B\sigma_y \quad (y = 0).$$

Здесь t — время; v — перемещение по оси y ; B — некоторый линейный оператор, вид которого будет указан ниже, либо

$$(1.3) \quad \tau_{xy} = 0 \quad (y = h), \quad \sigma_y = -p^*(x, t) \quad (y = h),$$

$$u = 0 \quad (y = 0), \quad v = B\sigma_y \quad (y = 0),$$

u — перемещение по оси x .

Учитывая далее, что слой тонкий, вместо условия совместности скоростей деформаций, определяемого третьей формулой (1.1), примем

$$(1.4) \quad \tau_{xy} = f_1(x) + yf_2(x).$$

Тогда приближенные решения краевых задач (1.1)–(1.4) запишутся в виде [2, 3]

$$(1.5) \quad \tau_{xy} = \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -p^*(x, t),$$

$$\varepsilon_y = -A(1-\nu)[(1-\nu+\nu^2)/3]^{(m-1)/2} |p^*(x, t)|^m \operatorname{sgn} p^*(x, t);$$

$$(1.6) \quad \sigma_x = -\nu(1-\nu)^{-1} p^*(x, t), \quad \sigma_y = -p^*(x, t), \quad \tau_{xy} = -\nu(1-\nu)^{-1} \times \\ \times (h-y)[p^*(x, t)]', \quad \varepsilon_y = -A3^{(1-m)/2} [(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}]^m \times \\ \times |p^*(x, t)|^m \operatorname{sgn} p^*(x, t).$$

Удовлетворяя с помощью (1.5), (1.6) последним краевым условиям (1.2), (1.3), будем соответственно иметь при $y = h$ и $p^*(x, t) \geq 0$

$$(1.7) \quad v = -Ah(1-\nu)[(1-\nu+\nu^2)/3]^{(m-1)/2} |p^*(x, t)|^m - \\ -B[p^*(x, t)]';$$

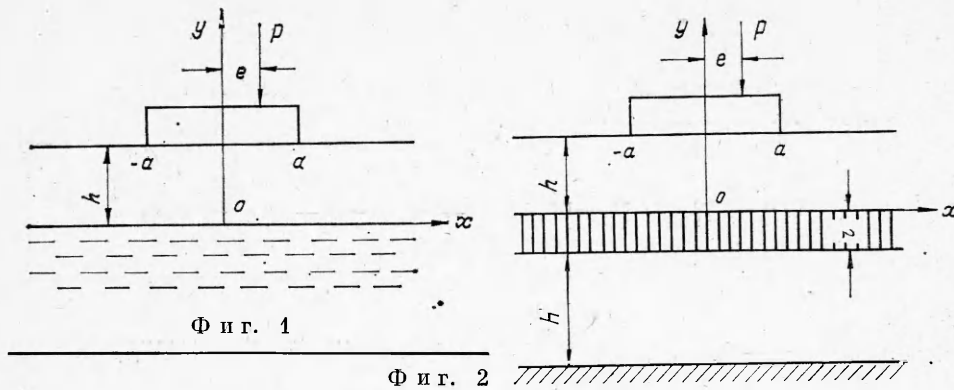
$$(1.8) \quad v = -Ah3^{(1-m)/2} [(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}]^m |p^*(x, t)|^m - \\ -B[p^*(x, t)]'.$$

2. Используя формулы п. 1, рассмотрим следующую контактную задачу о вдавливании без трения силой $P(t)$ (эксцентриситет приложения силы равен e относительно центра линии контакта $|x| \leq a$ (фиг. 1)) в поверхность слоя, лежащего на гидравлическом основании ($y \leq 0$), жесткого штампа. Вне штампа поверхность слоя не нагружена, а в силу условия контакта при $y = h$ под штампом

$$(2.1) \quad v = -[\delta(t) + \alpha(t)x - f(x)] \quad (|x| \leq a),$$

где $\delta(t) + \alpha(t)x$ — его жесткое перемещение; $f(x)$ — форма основания штампа. При этом также будем предполагать, что в процессе квазистатического

* Слой будем считать тонким, если длина участка его активного нагружения $2a$ велика по сравнению с толщиной h .



вдавливания штампа в слой не происходит нарушения контакта его нижней грани с жидкостью.

Используя соотношение (1.7) и полагая в нем $B = (\rho g)^{-1}$, ибо для гидравлического основания при $y = 0$ $\sigma_y = \rho g v$ (ρ — плотность жидкости, g — постоянная силы тяжести), а также принимая в расчет то обстоятельство, что при $|x| \leq a$ функция v дается соотношением (2.1) и $p^*(x, t) = p(x, t)$, получим уравнение для определения контактного давления $p(x, t)$:

$$(2.2) \quad hAC[p(x, t)]^m + (\rho g)^{-1}[p(x, t)] \cdot = \delta(t) + \alpha(t)x \quad (t > 0),$$

$$(\rho g)^{-1}p(x, 0) = \delta(0) + \alpha(0)x - f(x) \quad (t = 0),$$

$$C = (1 - \nu)[(1 - \nu + \nu^2)/3]^{(m-1)/2}.$$

К уравнению (2.2) следует еще добавить условия равновесия штампа

$$(2.3) \quad P(t) = \int_{-a}^a p(x, t) dx, \quad P(t)e = \int_{-a}^a xp(x, t) dx.$$

В безразмерных переменных и с учетом обозначений

$$xa^{-1} = x', \quad ea^{-1} = e', \quad \lambda = ha^{-1}, \quad tt_0^{-1} = t', \quad D = t_0 \lambda AC (a \rho g)^m,$$

$$\delta(t)a^{-1} = \gamma(t'), \quad \varphi(x', t') = p(x, t)(a \rho g)^{-1}, \quad N(t') = P(t)(a^2 \rho g)^{-1}$$

(t_0 — масштаб времени, штрихи у x' и t' далее опускаем) формулы (2.2),

(2.3) примут вид

$$(2.4) \quad D[\varphi(x, t)]^m + \varphi(x, t) = \gamma(t) + \alpha(t)x, \quad \varphi(x, 0) = \gamma(0) + \alpha(0)x -$$

$$- f(x), \quad N(t) = \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx, \quad N(t)e = \int_{-1}^1 x\varphi(x, t) dx.$$

Рассмотрим далее, не нарушая общности, случай плоского штампа ($\alpha(t) = e \equiv 0$) и предположим, что в окрестности $t = 0$ задано разложение для силы

$$(2.5) \quad N(t) = N_0 + N_1 t + \dots + N_n t^n + O(t^{n+1}).$$

Необходимо определить из системы (2.4) функции $\varphi(x, t)$ и $\gamma(t)$. Будем искать их в виде

$$(2.6) \quad \varphi(x, t) = \varphi_0 [1 + \varphi_1 t + \dots + \varphi_n t^n + O(t^{n+1})], \quad \varphi_0 = \gamma(0),$$

$$\gamma(t) = \delta + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_n t^n + O(t^{n+1}), \quad \delta = \gamma(0).$$

Подставляя (2.5), (2.6) в уравнения (2.4) и приравнивая в полученных соотношениях члены левых и правых частей при одинаковых степенях t , получим

$$(2.7) \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} N_0, \quad \varphi_n = \frac{1}{2} \varphi_0^{-1} N_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\gamma_1 = D\varphi_0''' + \varphi_1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} Dm\varphi_0'' \varphi_1 + \varphi_2, \dots$$

Таким образом, формулы (2.6), (2.7) определяют асимптотику решения задачи при малом времени.

Пусть теперь задано разложение для вдавливающей силы в окрестности $t = \infty$

$$(2.8) \quad N(t) = N_0 + N_1 e^{-Dt} + \dots + N_n e^{-Dnt} + O(e^{-D(n+1)t}).$$

Будем искать функции $\varphi(x, t)$ и $\gamma(t)$, удовлетворяющие системе уравнений (2.4), в виде

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varphi(x, t) &= \varphi_\infty [1 + \varphi_1 e^{-Dt} + \dots + \varphi_n e^{-Dnt} + O(e^{-D(n+1)t})], \\ \gamma(t) &= \gamma_1 t + \gamma_0 + \beta_1 e^{-Dt} + \dots + \beta_n e^{-Dnt} + O(e^{-D(n+1)t}). \end{aligned}$$

Здесь приближенно можно считать $\gamma_0 = \frac{1}{2} N_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} N_j - \beta_j \right)$. Кроме того, более точный алгоритм определения γ_0 изложен в п. 4.

Подставляя (2.8), (2.9) в (2.4) и приравнявая коэффициенты левых и правых частей при одинаковых степенях e^{-Dt} , получим

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varphi_\infty &= (1/2) N_0, \quad \varphi_n = (1/2) \varphi_\infty^{-1} N_n \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \gamma_1 &= D\varphi_\infty''', \quad \beta_1 = \varphi_1 (\varphi_\infty - m\varphi_\infty'''), \quad \beta_2 = \varphi_2 (\varphi_\infty - (1/2) m\varphi_\infty'''), \dots \end{aligned}$$

Формулы (2.9), (2.10) определяют асимптотику решения поставленной задачи при большом времени. Заметим, что при $N = \text{const}$ следует $\varphi = (1/2)N$, $\gamma = (1/2)N + D((1/2)N)'''t$.

3. Рассмотрим случай, когда слой, реологические свойства которого описываются уравнениями (1.4), лежит на стержневом основании ($-l \leq y \leq 0$), которое в свою очередь подстилается жестким основанием. В остальном постановка задачи, изложенная в п. 2, не меняется.

Стержневое основание для случая плоской деформации описывается уравнением

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u &= 0, \quad v = v(y), \quad \varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = R\sigma_y, \quad \gamma_{xy} = 0, \\ R &= (1 - 2\mu)[2q(1 - \mu)]^{-1}, \quad \sigma_x = \mu(1 - \mu)^{-1}\sigma_y, \quad \tau_{xy} = 0, \quad v'' = 0, \end{aligned}$$

где q — модуль сдвига; μ — коэффициент Пуассона материала стержней.

Из формул (3.1) найдем, что при $y = 0$

$$(3.2) \quad v = Rl\sigma_y.$$

Подставляя теперь в соотношение (1.8) при $|x| \leq a$ функции $p^*(x, t) = p(x, t)$, v в форме (2.4) и полагая в нем $B = Rl$, согласно (3.2), получим следующее уравнение для определения контактного давления $p(x, t)$:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} hAC[p(x, t)]^m + Rlp(x, t) &= \delta(t) + \alpha(t)x \quad (t > 0), \\ Rlp(x, 0) = \delta(0) + \alpha(0)x - f(x) &\quad (t = 0), \quad C = 3^{(1-m)/2} [(1 - 2\nu) \times \\ &\times (1 - \nu)^{-1}]^m. \end{aligned}$$

К уравнениям (3.3) необходимо добавить условия статики (2.3).

Асимптотические решения системы уравнений (3.3), (2.3) при малом и большом времени могут быть получены по схеме, изложенной в п. 2.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда тонкий слой лежит на двухслойном основании. Оно представляет собой (фиг. 2) упругий слой ($-H - l \leq y \leq -l$), лежащий на жестком основании и покрытый стержневым слоем ($-l \leq y \leq 0$). В остальном сохраняется постановка задачи, изложенная в начале п. 2.

Для упругого слоя в случае его плоской деформации * при $y = -l$ имеем [4]

$$(3.4) \quad v = \frac{1}{\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y|_{y=-l} K\left(\frac{\xi-x}{H}\right) d\xi \quad \left(\theta = \frac{4(1-\sigma)G}{3-4\sigma}\right),$$

$$K(z) = \int_0^{\infty} L(\zeta) \cos \zeta z d\zeta \quad \left(z = \frac{\xi-x}{H}\right),$$

где G — модуль сдвига; σ — коэффициент Пуассона материала упругого слоя.

Известно, что 1) функция $L(\zeta)$ непрерывна, вещественна и четна на действительной оси;

$$(3.5) \quad \begin{aligned} &2) L(\zeta) > 0 \quad (|\zeta| < \infty); \\ &3) L(\zeta)\zeta = A_1\zeta + O(\zeta^3) \quad (\zeta \rightarrow 0), \quad L(\zeta)\zeta = 1 + O(e^{-A_2\zeta}) \quad (\zeta \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Учитывая, что по толщине стержневого слоя σ_y не изменяется, и используя формулы (3.1), найдем при $y = 0$

$$(3.6) \quad v = Rl\sigma_y + \frac{1}{\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y K\left(\frac{\xi-x}{H}\right) d\xi.$$

Подставляя, как и ранее, в соотношение (1.8) при $|x| \leq a$ функции $p^*(x, t) = p(x, t)$, v в форме (2.1) и полагая в нем, согласно (3.6),

$$B(\dots) = Rl(\dots) + \frac{1}{\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) K\left(\frac{\xi-x}{H}\right) d\xi,$$

получим интегральное уравнение для определения неизвестного под штампом контактного давления $p(x, t)$:

$$(3.7) \quad hAC [p(x, t)]^m + Rlp'(x, t) + \frac{1}{\pi\theta} \int_{-a}^a p'(\xi, t) K\left(\frac{\xi-x}{H}\right) d\xi =$$

$$= \delta'(t) + \alpha'(t)x \quad (|x| \leq a, t > 0),$$

$$Rlp(x, 0) + \frac{1}{\pi\theta} \int_{-a}^a p(\xi, 0) K\left(\frac{\xi-x}{H}\right) d\xi = \delta(0) + \alpha(0)x - f(x) \quad (|x| \leq a, t=0).$$

Постоянная C в (3.7) имеет вид (3.3). К уравнениям (3.7) нужно присоединить условия равновесия (2.3).

Обезразмеривая уравнения (3.7), (2.3) и вводя обозначения п. 2, в которых только необходимо заменить ρg на $(Rl)^{-1}$, будем иметь

$$(3.8) \quad D[\varphi(x, t)]^m + \varphi'(x, t) + \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi'(\xi, t) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \gamma'(t) + \alpha'(t)x \quad (t > 0),$$

$$\varphi(x, 0) = \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi, 0) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \gamma(0) + \alpha(0)x - f(x) \quad (t=0),$$

$$|x| \leq 1, \quad \kappa = a(\theta Rl)^{-1}, \quad \Lambda = Ha^{-1},$$

$$N(t) = \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx, \quad N(t)e = \int_{-1}^1 x\varphi(x, t) dx.$$

* В (3.4) учтено, что на верхней грани слоя $u = 0$.

4. Прежде чем приступить к решению системы уравнений (3.8), отметим, что в силу соотношений (3.5) и результатов работы [5] можно утверждать:

1. Оператор

$$(4.1) \quad M\varphi = \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$.

2. Если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то решение второго уравнения (3.8) в пространстве $L_2(-1, 1)$ существует и единственно при любых значениях параметров $\kappa, \Lambda \in (0, \infty)$.

3. Собственные числа η_n оператора (4.1) вещественны, положительны и $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq \dots, \eta_n \sim n^{-1} \ln n (n \rightarrow \infty)$.

Построим асимптотическое решение системы уравнений (3.8) для малого времени при условии, что для $N(t)$ в окрестности $t = 0$ имеет место разложение (2.5). Будем, не нарушая общности, далее рассматривать случай плоского штампа ($\alpha = e = 0$). Представим $\gamma(t)$ в форме (2.6), а $\varphi(x, t)$ будем искать в виде

$$(4.2) \quad \varphi(x, t) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)t + \dots + \varphi_n(x)t^n + O(t^{n+1}),$$

где $\varphi_0(x) = \varphi(x, 0)$ и определяется из второго уравнения (3.8).

Подставляя (2.5), (2.6) и (4.2) в уравнения (3.8) и приравнявая члены левых и правых частей при одинаковых степенях t , получим

$$(4.3) \quad \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = N_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_1(x) + \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \gamma_1 - D\varphi_0^m(x) \quad (|x| \leq 1),$$

$$\varphi_2(x) + \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \gamma_2 - \frac{1}{2} Dm\varphi_0^{m-1}(x)\varphi_1(x) \quad (|x| \leq 1), \dots$$

Интегральные уравнения второго рода в (4.3) в силу свойств оператора (4.1) являются уравнениями Фредгольма [6] и в совокупности со вторым уравнением (3.8) служат для определения $\varphi_n(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$ в предположении, что заданы γ_n . Последние затем определяются из интегральных соотношений (4.3). Приближенные решения указанных интегральных уравнений могут быть найдены, например, методом [5].

Построим теперь асимптотическое решение системы уравнений (3.8) для большого времени при условии, что для $N(t)$ в окрестности $t = \infty$ имеет место разложение (2.8). По-прежнему для примера рассмотрим случай плоского штампа ($\alpha = e = 0$). Представим $\gamma(t)$ в форме (2.9), а $\varphi(x, t)$ будем искать в виде *

$$(4.4) \quad \varphi(x, t) = \varphi_\infty [1 + \varphi_1(x)e^{-Dt} + \dots + \varphi_n(x)e^{-Dnt} + O(e^{-D(n+1)t})].$$

Подставляя (2.8), (2.9) и (4.4) в систему уравнений (3.8) и приравнявая в полученных соотношениях коэффициенты левых и правых частей при одинаковых степенях e^{-Dt} , найдем

* Такая структура решения обоснована в докладе: Александров В. М., Коваленко Е. В. Контактные задачи теории упругости при наличии нелинейного износа. — В сб.: Контактная жесткость в приборостроении и машиностроении. Рига: Рижск. политехн. ин-т, 1979.

$$(4.5) \quad \varphi_\infty = \frac{1}{2} N_0, \quad \varphi_\infty \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = N_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad D\varphi_\infty^m = \gamma_1,$$

$$(1 - \varphi_\infty^{m-1}) \varphi_1(x) + \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \beta_1 \varphi_\infty^{-1} \quad (|x| \leq 1),$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} m \varphi_\infty^{m-1}\right) \varphi_2(x) + \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi =$$

$$= \beta_2 \varphi_\infty^{-1} + \frac{1}{4} m(m-1) \varphi_\infty^{m-1} \varphi_1^2(x) \quad (|x| \leq 1), \dots$$

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода в (4.5) служат для определения $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) в предположении, что заданы β_n . Последние затем определяются из интегральных соотношений (4.5). Приближенные решения интегральных уравнений (4.5) могут быть найдены, как уже отмечалось, методом [5].

Предположим теперь, что существует такое значение $t = T$, при котором $\varphi_+(x, T) = \varphi_-(x, T)$, где $\varphi_\pm(x, t)$ — контактные напряжения, полученные соответственно для большого и малого времени по формулам (4.2), (4.4). Тогда и $\gamma_+(T) = \gamma_-(T)$, откуда определяем постоянную γ_0 в (2.9).

Отметим, что в ряде случаев иногда более полезным бывает другой алгоритм построения решения системы (3.8) при большом времени. Изложим его для случая $N = \text{const}$.

Представим $\gamma(t)$ в форме

$$(4.6) \quad \gamma(t) = \gamma_1 t + \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{kn} e^{-(\delta_k + \delta_n)t} + \dots$$

Задание $\gamma(t)$ в виде (4.6) оправдано физическими соображениями и обосновано в указанном выше докладе авторов.

Будем искать решение интегрального уравнения (3.8) в виде

$$(4.7) \quad \varphi(x, t) = \varphi_\infty \{1 + \varphi_1(x, t) + \dots + \varphi_n(x, t) + o[\varphi_n(x, t)]\}.$$

Воспользовавшись теперь аналогом метода Ньютона [6], получим

$$(4.8) \quad D\varphi_\infty^m = \gamma_1;$$

$$(4.9) \quad Dm\varphi_\infty^{m-1}\varphi_1(x, t) + \varphi_1^{\dot{}}(x, t) + \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1^{\dot{}}(\xi, t) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi =$$

$$= -\varphi_\infty^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k e^{-\delta_k t} \quad (|x| \leq 1),$$

$$Dm\varphi_\infty^{m-1} \left[\varphi_2(x, t) + \frac{m-1}{2} \varphi_1^{\dot{}}(x, t) \right] + \varphi_2^{\dot{}}(x, t) +$$

$$+ \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2^{\dot{}}(\xi, t) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = -\varphi_\infty^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{kn} (\delta_k + \delta_n) e^{-(\delta_k + \delta_n)t} \quad (|x| \leq 1), \dots$$

Представим решения интегральных уравнений (4.9) в форме

$$(4.10) \quad \varphi_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x) e^{-\delta_k t}, \quad \varphi_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{kn}(x) e^{-(\delta_k + \delta_n)t}, \dots$$

Тогда после очевидных преобразований запишем

$$(4.11) \quad \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 s_n(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \alpha_n s_n(x) + \varphi_\infty^{-1} \quad (|x| \leq 1),$$

$$\frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 s_{kn}(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \alpha_{kn} s_{kn}(x) +$$

$$+ \frac{m-1}{2} (1 + \alpha_{kn}) s_k(x) s_n(x) + \varphi_{\infty}^{-1} \zeta_{kn} (|x| \leq 1), \dots$$

$$\alpha_n = \frac{Dm\varphi_{\infty}^{m-1} - \delta_n}{\delta_n}, \quad \alpha_{kn} = \frac{\alpha_k \alpha_n - 1}{2 + \alpha_k \alpha_n}.$$

Отметим, что в силу свойств оператора M , указанных выше, уравнения (4.11) почти при всех α_k ($k \geq 1$) и $\Lambda \in (0, \infty)$ однозначно разрешимы в $L_2(-1, 1)$. Кроме того,

$$(4.12) \quad N = \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} N_n e^{-\delta_n t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{kn} e^{-(\delta_k + \delta_n)t} + \dots,$$

$$N_0 = 2\varphi_{\infty}, \quad N_n = \varphi_{\infty} \int_{-1}^1 s_n(x) dx = 0, \quad N_{kn} = \varphi_{\infty} \int_{-1}^1 s_{kn}(x) dx, \dots$$

Ищем решения уравнений (4.11) в форме рядов Фурье по ортонормированной системе полиномов Лежандра

$$(4.13) \quad s_k(x) = \sqrt{2} \varphi_{\infty}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k P_{2n}^*(x), \quad P_n^*(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

$$s_{kn}(x) = 2\varphi_{\infty}^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{kn} P_{2j}^*(x).$$

Принимая далее в расчет равенства

$$(4.14) \quad K\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{ij}(\Lambda) P_{2i}^*(\xi) \bar{P}_{2j}^*(x),$$

$$s_k(x) s_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} r_j^{kn} P_{2j}^*(x)$$

(вид коэффициентов $e_{ij}(\Lambda)$, r_j^{kn} приведен в [5]), подставляя (4.13), (4.14) в (4.11), используя условие ортогональности полиномов Лежандра и приравнявая в полученном соотношении коэффициенты правой и левой части при многочленах одинакового номера, получим

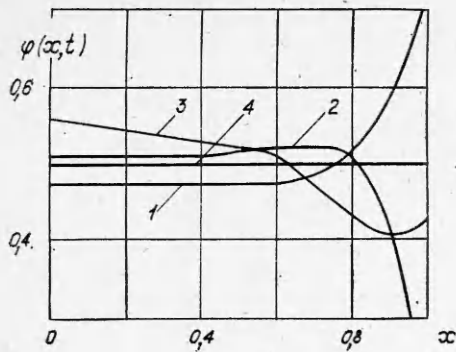
$$(4.15) \quad \frac{\kappa}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} e_{ij}(\Lambda) a_j^k - \alpha_k a_i^k = \delta_{i0} \quad (i = 0, 1, \dots);$$

$$(4.16) \quad \frac{\kappa}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} e_{ij}(\Lambda) b_j^{kn} - \alpha_{kn} b_i^{kn} = \frac{m-1}{2} (1 + \alpha_{kn}) r_i^{kn} + \varphi_{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{kn} \delta_{0i}$$

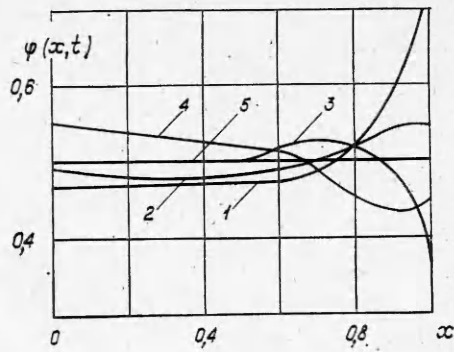
$$(i = 0, 1, 2, \dots),$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Заметим, что в силу (4.12), (4.13) $a_0^k = 0$, $b_0^{kn} = 0$ ($k, n \geq 1$). Эти условия служат для определения неизвестных величин δ_n , ζ_{kn} . Действительно, из (4.15) имеем $a_0^k = \Delta_1 \Delta^{-1}$, где Δ — основной определитель системы (4.15), Δ_1 — вспомогательный определитель, который получается из Δ заменой в нем первого столбца элементами $\{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$. Определитель Δ_1 симметричный, поэтому корни его α_j ($j = 1, 2, \dots$) вещественны. Кроме того, принимая во внимание результаты [7], можно утверждать, что $\eta_{2j+2} < \alpha_j < \eta_{2j}$, где η_j — собственные числа интегрального оператора (4.1). Этим обоснована структура решения (4.6), (4.7) интегрального уравнения (3.8).



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Покажем теперь, что условие $\dot{b}_0^{kn} = 0$ служит для однозначного определения ζ_{kn} в (4.6). Из системы (4.16) следует, что $b_0^{kn} = \Delta_3 \Delta_2^{-1}$, где $\Delta_2 = \det [\kappa \lambda^{-1} e_{ij}(\Lambda) - \alpha_{kn} \delta_{ij}]$, Δ_3 — вспомогательный определитель системы (4.16), получающийся из основного Δ_2 заменой первой колонны элементами $(m-1)2^{-1}(1 + \alpha_{kn}) \{r_0^{kn} + \sqrt{2} \zeta_{kn} (m-1)^{-1} (1 + \alpha_{kn})^{-1}, r_1^{kn}, r_2^{kn}, \dots, r_{i-1}^{kn}, \dots\}$. Очевидно, чтобы из условия $b_0^{kn} = 0$ можно было подобрать ζ_{kn} единственным образом, требуется, чтобы определитель $\Delta_4 = \det [\kappa \lambda^{-1} e_{ij}(\Lambda) - \alpha_{kn} \delta_{ij}]$ ($i, j \geq 1$) был бы отличен от нуля. Нетрудно заметить, что по своей структуре Δ_4 совпадает с Δ_1 , в котором вместо элементов $\kappa \lambda^{-1} e_{ij}(\Lambda) - \alpha_{kn} \delta_{ij}$ стоят $\kappa \lambda^{-1} e_{ij}(\Lambda) - \alpha_{kn} \delta_{ij}$. Предположим, что $\Delta_4 = 0$, тогда из условия $a_0^h = 0$ следует $\alpha_{kn} = \alpha_n$, откуда $\alpha_n^2 = -3$ ($n \geq 1$). Но этого быть не может, так как $\alpha_n > 0$ ($n \geq 1$). Следовательно, $\Delta_4 \neq 0$ и условие $\dot{b}_0^{kn} = 0$ служит для однозначного подбора ζ_{kn} в (4.6).

Определив таким образом числа α_n, ζ_{kn} , найдем затем из неоднородных систем (4.15), (4.16) a_j^h, b_j^{kn} и построим функции $s_n(x), s_{kn}(x)$. Отметим, что указанные системы в силу свойств оператора M и теоремы Гильберта [6] однозначно разрешимы в пространстве квадратично-суммируемых последовательностей l_2 при любых значениях параметра $\Lambda \in (0, \infty)$ и для их решения может быть использован метод редукции.

Постоянная γ_0 в (4.6) определяется, как и выше, из условия $\gamma_+(T) = \gamma_-(T)$.

5. Проиллюстрируем численно предложенные алгоритмы на примере второй задачи п. 3. Пусть нижний упругий слой жестко заземлен по основанию [4]

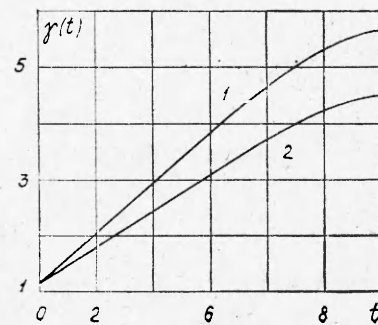
$$(5.1) \quad L(u) = \frac{2\eta \operatorname{sh} 2u - 4u}{u(2\eta \operatorname{ch} 2u + 1 + \eta^2 + 4u^2)}, \quad \eta = 3 - 4\sigma,$$

а вдавливающая штамп сила постоянна во времени $N = 1$. Тогда в разложениях (4.3), (4.5) соответственно имеем

$$N_0 = 1, \quad \varphi_\infty = 1/2, \quad N_n = 0 \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Положим в (3.8), (5.1) $D = 1, \kappa = \pi, \Lambda = 1, \sigma = 0.3$.

Ограничимся в асимптотических разложениях для $\varphi(x, t)$ (4.2), (4.7) удержанием первых двух членов. Закон распределения контактных нормальных напряжений $\varphi(x, t)$ в зависимости от x и t приведен на фиг. 3 ($m = 1.5$, кривые 1—4 соответствуют $t = 0; 3; 9; \infty$) и



Ф и г. 5

фиг. 4 ($m = 2$, кривые 1—5 соответствуют $t = 0; 1; 2; 10; \infty$). Следует отметить, что асимптотическое разложение для $\varphi(x, t)$ (4.2), построенное при достаточно малом времени, стыкуется с соответствующим асимптотическим разложением (4.7), построенным для достаточно больших значений t , в случае $m = 1,5$ при $T \approx 8$, $m = 2$ при $T \approx 8,5$. Кроме того, численный анализ поставленной задачи показал, что при $m = 1,5$ и $m = 2$ и одинаковых значениях x и t величины $\varphi(x, t)$ отличаются друг от друга не более чем на 5—6%.

Для определения постоянной γ_0 в формуле (4.6) воспользуемся, как было замечено выше, условием $\gamma_+(T) = \gamma_-(T)$. Будем иметь соответственно при $m = 1,5$ и $m = 2$ $\gamma_0 = 1,483$, $\gamma_0 = 1,577$. На фиг. 5 приведен закон распределения $\gamma(t)$ в зависимости от t при $m = 1,5$ и 2 (кривые 1, 2 соответственно). Заметим, что эта зависимость носит почти линейный характер. Кроме того, осадка под штампом будет тем больше при прочих равных факторах, чем меньше показатель нелинейности m .

Поступила 13 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
2. Сумбатян М. А. Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 1.
3. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы механики ледяного покрова. — В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1981.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
5. Коваленко Е. В. Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ I

С. В. Степаненко

(Новосибирск)

Для тонких оболочек вращения, срединная поверхность которых имеет неотрицательную гауссову кривизну, строится численно-аналитическое приближенное решение класса линейных краевых задач, допускающих разделение переменных.

Известно, что решение каждой такой задачи расщепляется на медленно меняющуюся часть и решения типа краевого эффекта. На основе этого в [1, 2] предложен способ построения приближенного решения задачи, причем медленно меняющуюся часть решения предлагается отыскивать численным методом, а краевые эффекты — асимптотическим. В данной работе на основе этого способа построен алгоритм, который за счет использования метода исключения в краевых условиях [3] может быть применен в более широком по сравнению с [1] классе задач. В качестве иллюстрации метода приведены решения ряда задач прочности и колебаний для оболочек различной геометрии.

1. Многие задачи прочности и колебаний упругих оболочек вращения сводятся к отысканию решений частного вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_{\sigma}^{mn} &= \exp(i\omega_m t + inx_2) U_{\sigma}^{mn}(x_1), \\ w^{mn} &= \exp(i\omega_m t + inx_2) W^{mn}(x_1). \end{aligned}$$

Здесь t — время; x_1, x_2 — ортогональные координаты срединной поверхности оболочки; $i = \sqrt{-1}$; ω_m — действительное, а m и n — целые числа, индекс σ пробегает значения 1 и 2; u_1, u_2, w — перемещения в направ-