

Пусть для Π (5.2) выполнено свойство (2.1). Тогда для функционала M (2.2) в силу принятых граничных условий опять получаются (2.3) и, следовательно, оценка (2.6).

Отметим, что оценка, свидетельствующая о линейном нарастании со временем функционала W (2.2), для упругих тел найдена в [5, 6, 24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — М.: ГИТТЛ, 1955.
3. Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники/ВИНИТИ. Сер. Общая механика. — 1983. — Т. 6
4. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
5. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ. — 1959. — Т. 23, вып. 3.
6. Мовчан А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение // Инж. сб. — 1960. — Т. 29.
7. Бабский В. Г., Коначевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
8. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.
9. Румянцев В. В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. — 1966. — Т. 30, вып. 1.
10. Тюнцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 2.
11. Чаандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973.
12. Румянцев В. В., Озаранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987.
13. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. — Новосибирск: Наука, 1985.
14. Самсонов В. А. Устойчивость и бифуркация равновесия тела с жидкостью // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. — 1974. — № 16.
15. Владимиров В. А. Аналоги теоремы Лагранжа в гидродинамике завихренной и стратифицированной жидкостей // ПММ. — 1986. — Т. 50, вып. 5.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1965.
18. Fjortoft R. On the frontogenesis and cyclogenesis in the atmosphere. Pt I. On the stability of the stationary circular vortex // Geophys. Publ. — 1944. — V. 16, N 5
19. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ. — 1950. — V. 17 N 6.
20. Eliassen A., Kleinschmidt E. Dynamic meteorology // Handbuch der Physik. — 1957. — Bd 48.
21. Ooyama K. On the stability of the baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability // J. Atmos. Sci. — 1966. — V. 23, N 1.
22. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1984.
23. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т. 1.
24. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Замечание об устойчивости мембранных решений нелинейной теории пластин и оболочек // ПММ. — 1966. — Т. 30, вып. 1.

Поступила 29/VII 1988 г.

УДК 532.546

О РАЗВИТИИ ВЯЗКОСТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

О. Б. Бочаров, В. В. Кузнецов

(Новосибирск)

Интерес к задаче об устойчивости двухфазных фильтрационных течений обусловлен в основном проблемой наиболее полного извлечения нефти из недр при закачке воды и других несмешивающихся с нефтью агентов в пласты. При большом отношении вязкостей вытеснение углеводородных жидкостей водой в пористой среде в принципе неустойчивый процесс. Неустойчивость фронта вытеснения приводит к формированию растущих во времени «языков» воды. Линейный анализ устойчивости для поршневого вытеснения, проведенный в [1], показал, что рост амплитуды языков имеет экспоненциальный характер. В [2] анализ устойчивости в рамках линейного приближения выполнен для модели Маскета — Леверетта с учетом размытости фрон-

вытеснения из-за проявления капиллярных сил. Численный анализ роста языков после потери устойчивости без учета капиллярных сил проведен для однородных [3] и микронеоднородных [4] пористых сред. Подробный анализ работ по вязкостной неустойчивости в пористой среде дан в [5]. Вместе с тем стадия нелинейного роста языков с учетом двухфазности течения за фронтом вытеснения исследована слабо. В настоящей работе в рамках модели Баклея — Леверетта, т. е. без учета капиллярных сил, численно изучена структура области течения за фронтом вытеснения в неустойчивом режиме в нелинейной стадии роста языков.

Рассмотрим движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в однородном горизонтальном пласте в двумерной постановке. Система уравнений для определения давления и насыщенности вытесняющей фазы s , если не учитывается капиллярный скачок давления между фазами и справедлив линейный закон фильтрации, в безразмерных переменных имеет вид [6]

$$(1) \quad \partial s / \partial t + \operatorname{div} (F(s)\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} = -M(s) \operatorname{grad} p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь и далее $F(s) = k_1(s) / [k_1(s) + \mu k_2(s)]$ — функция Баклея — Леверетта; $M(s) = [k_1(s)\mu^{-1} + k_2(s)] / k_2(0)$ — суммарная подвижность фаз при насыщенности s , отнесенная к начальной подвижности при $s = 0$; $k_1(s)$ и $k_2(s)$ — относительные фазовые проницаемости; $\mu = \mu_1 / \mu_2$ — отношение вязкостей жидкостей; \mathbf{v} — суммарная скорость фильтрации, обезразмеренная по скорости фильтрации вытесняющей жидкости v_0 при $x = 0$; p — давление, обезразмеренное по $p_0 = v_0 \mu_2 \lambda / k k_2(0)$; t — время, обезразмеренное по $t_0 = v_0 / m \lambda$; x и y — пространственные координаты, обезразмеренные по длине волны возмущения λ ; m — пористость; k — абсолютная проницаемость пористой среды; l — длина расчетной области; индексы 1 и 2 относятся к вытесняющей и вытесняемой жидкостям.

Течение исследуется в прямоугольной области $x \in [0; a]$, $y \in [0; 0,5]$ с непроницаемыми границами при $y = 0$, $y = 0,5$, что моделирует симметрию течения, при заданном давлении $p = 0$ для $x = a$, $a = l / \lambda$ и при заданных расходах жидкостей для $x = 0$. В начальный момент времени вся область заполнена вытесняемой жидкостью ($s = 0$).

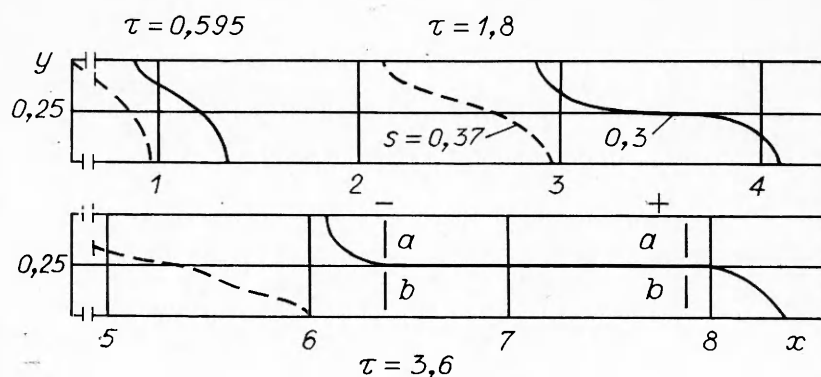
Для разностной аппроксимации сформулированной краевой задачи в изучаемой области вводится равномерная блочно-центрированная сетка с шагом $h_x = h_y = h$. Решение проводится методом IMPES [7]. В расчетах применялась явная разностная схема типа Годда [7] с использованием среднеарифметической аппроксимации функции $F(s)$ в полудельных точках в окрестности фронта для получения второго порядка точности в целом по области. Расчеты проводились при $a = 5, 10, 20$, что позволило изучить асимптотическую стадию развития языков. Для формирования возмущений применялся метод, предложенный в [3]. Расход закачиваемой жидкости на входе задавался в виде функции от времени

$$v_{1,x}(0, y, t) = \begin{cases} 1 - \alpha \cos(2\pi y), & 0 \leq t \leq t_*, \\ 1, & t_* < t, \end{cases}$$

$$v_{2,x}(0, y, t) = 0, \quad 0 \leq t,$$

где α определяет амплитуду возмущения фронта вытеснения в момент времени t_* . Распределение насыщенности в момент времени t_* , являющееся численным решением системы уравнений (1), рассматривалось как начальное условие для $s(x, y)$ при $t = t_*$. Расчеты проводились для относительных фазовых проницаемостей вида $k_1(s) = s^2$, $k_2(s) = (1 - s)^2$.

На рис. 1 приведены результаты расчетов полей насыщенности закачиваемой жидкости, выполненные при $a = 10$, $h = 0,1$ и $\mu = 0,1$. Сплошными и штриховыми линиями показаны формы изосат (изолиний постоянной насыщенности вытесняющей фазы) для различных моментов времени. Изосата $s_c = 0,3$ отвечает фронтовой насыщенности при $\mu = 0,1$ в одномерной задаче Баклея — Леверетта и описывает форму языка вытесняющей жидкости. Расчеты показали, что максимальную скорость роста амплитуды имеет изосата с насыщенностью, равной фронтовой (рис. 2). Амплитуда изосаты A_s с насыщенностью s вычислялась как половина



Р и с. 1

проекция изосаты на горизонтальную ось x , A_c соответствует амплитуде изосаты с насыщенностью s_c . В нелинейной стадии роста языков при $A > 0,1$ скорость роста амплитуд изосат $W_s = dA_s/ds$ постоянна и не зависит от амплитуды языка. При этом изосаты с $s > s_c$ имеют существенно меньшую скорость роста. Постоянство скорости роста амплитуды языка в безразмерных переменных свидетельствует о том, что в размерных переменных она не зависит от длины волны возмущения λ .

Расчеты, проведенные для $\mu = 0,167-0,0208$, показывают, что независимо от отношения вязкостей жидкостей в асимптотической стадии роста языков их ширина равна половине длины волны начального возмущения (см. рис. 1). Такую же форму имеют и языки в поршневой постановке, например в модели Хил — Шоу [1]. Однако в отличие от такой модели в пористой среде деформация полей изосат существенно различна для разных $s > s_c$. Из расчетов вытекает также, что для различных моментов времени (и амплитуд языков) насыщенность на оси языка на уровне его хвостовой части s_- примерно постоянна и при $\mu = 0,1$ равна 0,37. Эта закономерность наблюдалась и в расчетах с другими отношениями вязкостей жидкостей, из которых видно, что s_- определяется величиной отношения вязкостей жидкостей.

Для больших амплитуд языков поперечными градиентами давления в области языка можно пренебречь, так как его ширина постоянна (см. рис. 1). Это позволяет, согласно методике [1], определить скорость роста языка с учетом двухфазности течения за фронтом вытеснения. Рассмотрим течение вблизи головной части языка в сечении $+$ и вблизи его хвостовой части в сечении $-$. В этих сечениях в зоне a насыщенность $s = 0$, в зоне b существует двухфазное течение и продольные составляющие суммарной скорости фильтрации определяются как

$$(2) \quad \begin{aligned} v_+^a &= -M(0) \partial p_+ / \partial x, & v_+^b &= -M(s_c) \partial p_+ / \partial x; \\ v_-^a &= -M(0) \partial p_- / \partial x, & v_-^b &= -M(s_c) \partial p_- / \partial x, \end{aligned}$$

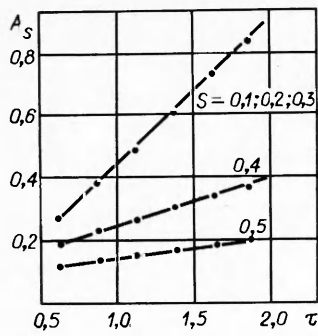
где $\partial p_+ / \partial x$ и $\partial p_- / \partial x$ — градиенты давления в продольном направлении вблизи головной и хвостовой частей языка. При этом предполагается, что s_- для различных моментов времени не изменяется. Из (2) следует соотношение для суммарных скоростей фильтрации в зонах a и b :

$$(3) \quad v_+^a / v_+^b = M(0) / M(s_c), \quad v_-^a / v_-^b = M(0) / M(s_-).$$

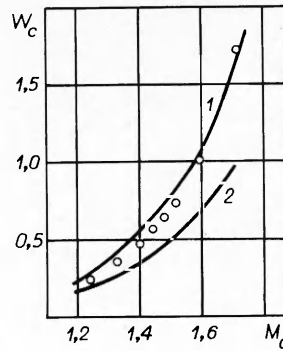
Соотношения (3) и условие постоянства суммарного расхода через все сечение

$$(4) \quad (1 - \varphi) v_+^a + \varphi v_+^b = (1 - \varphi) v_-^a + \varphi v_-^b = v_0$$

(φ — доля сечения, занятая языком) определяют скорости фильтрации в областях a и b с учетом постоянства s_c и s_- для различных амплитуд языков.



Р и с. 2



Р и с. 3

В отсутствие поперечных перетоков скорости переноса фронтальной насыщенности в головной и хвостовой частях языка находятся из решения одномерной задачи Баклея — Леверетта [6]:

$$(5) \quad W_+(s_c) = v_+^b F'(s_c)/m, \quad W_-(s_c) = v_-^a F'(s_c)/m.$$

Скорость роста амплитуды языка $W_c = [W_+(s_c) - W_-(s_c)]/2$ с учетом (3)—(5) имеет вид

$$(6) \quad W_c = \frac{v_0 F'(s_c)}{2m} \left[\frac{M_c}{\varphi M_c + (1 - \varphi)} - \frac{1}{\varphi M_- - (1 - \varphi)} \right]$$

($M_c = M(s_c)$ и $M_- = M(s_-)$). Значение s_- можно также найти из соотношений (2), (3), используя предположение об отсутствии перетоков внутри языка. В этом случае скорость переноса насыщенности s_- в зоне b на уровне хвостовой части языка $W^b(s_-) = v_-^b F'(s_-)/m$, $F'(s_-) = (dF/ds)_{s=s_-}$. На различных стадиях роста языка s_- не будет изменяться при условии $W^b(s_-) = W_-(s_c)$, откуда следует соотношение для s_- :

$$(7) \quad F'(s_-) = F'(s_c) [\varphi M_c + (1 - \varphi)] / [(1 - \varphi) + \varphi M_-] M_c.$$

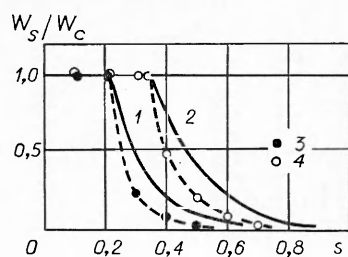
Соотношения (6), (7) дают скорость роста языков при $A_c > 0,1$. Как и в численных расчетах, скорость роста в размерных переменных не зависит от λ .

На рис. 3 приведены результаты численных расчетов скорости роста амплитуд языков в зависимости от отношения подвижностей M_c на фронте вытеснения (точки) и результаты расчетов по (6), (7) при $\varphi = 0,5$ (линия 1), линия 2 — результаты расчетов по (6) без учета изменения насыщенности по длине языка ($s_- = s_c$). Для заданного вида относительных фазовых проницаемостей значение M_c определяется отношением вязкостей жидкостей. Расчеты по (6), (7) хорошо обобщают данные численных расчетов по полной модели во всем изученном диапазоне отношений подвижностей M_c .

Для $s > s_c$ скорость роста амплитуд изосат зависит от s (рис. 4). Здесь приведены результаты численных расчетов скорости роста амплитуд изосат с насыщенностью s , отнесенные к скорости роста амплитуды языка W_c , при $\mu = 0,125$ и $0,0417$ (линии 1, 2) в зависимости от s . Рост языка вызывает перераспределение расхода вытесняющей жидкости по сечению за фронтом вытеснения в соответствии с (2) — (4). Предположение об отсутствии поперечных перетоков за фронтом вытеснения для изосат с $s > s_c$, соотношения (3), (5) и выражения для скорости переноса изосаты s при $y = 0$ и $y = 0,5$, аналогичные (5) и (6), определяют скорость роста амплитуды изосаты, отвечающей насыщенности s :

$$(8) \quad W_s = W_c F'(s) / F'(s_c).$$

Результаты расчетов по (8) для отношений вязкостей жидкостей $\mu = 0,125$ и $0,0417$ (линии 1, 2) и по полной модели (точки 3 и 4) показаны



Р и с. 4

на рис. 4. Результаты численных расчетов дают меньшие значения скоростей роста, чем соотношения (6) — (8). Это говорит о существовании поперечных перетоков за фронтом вытеснения, уменьшающих неоднородность расхода вытесняющей жидкости, формируемую растущим языком.

Таким образом, в результате численных расчетов показано, что в нелинейной стадии развития возмущений скорость роста амплитуд языков постоянна, не зависит от ширины языка и определяется величиной отношения подвижностей на фронте вытеснения.

Получены данные по скоростям роста изосат различных насыщенностей вытесняющей жидкости при разных отношениях вязкостей μ . Предложено приближенное соотношение для определения скорости роста амплитуд языка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele — Show cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. Ser. A.— 1958.— V. 245.
2. Рыжик В. М., Кисленко Б. Е. Исследование устойчивости продвижения границы раздела воды и нефти в пористой среде // Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений.— М.: Недра, 1969.
3. Ентов В. М., Таранчук В. Б. Численное моделирование процесса неустойчивого вытеснения нефти водой // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 5.
4. Индельман П. В., Кац Р. М., Швидлер М. И. Численное моделирование процессов неустойчивого фильтрационного вытеснения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 2.
5. Кац Р. М., Таранчук В. Б. Обзор работ по исследованию устойчивости фильтрационных течений // Динамика многофазных сред.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
6. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.— М.: Недра, 1972.
7. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем.— М.: Недра, 1982.

Поступила 9/VI 1987 г.,
в окончательном варианте — 8/XII 1987 г.

УДК 532.528 + 539.375

ДИНАМИКА ВЗРЫВНОГО НАГРУЖЕНИЯ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ПЛОТНОЙ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

И. Г. Гетц, В. К. Кедринский

(Новосибирск)

Работа посвящена проблеме разрушения конечного сферического объема жидкости при взрывной нагрузке, сосредоточенной в его центре. Часто предполагается [1], что такого рода процесс в жидкостях идентичен явлениям, протекающим в твердых телах, с точки зрения их конечного эффекта — образования откольных слоев вблизи свободной поверхности при отражении от нее сильной ударной волны (УВ). При этом по аналогии вводится понятие критических растягивающих напряжений, которые допускаются средой и превышение которых приводит к формированию, например, в случае плоских ударных волн плоских поверхностей разрыва. В [2] на основе анализа работ по исследованиям критических напряжений показано, что отличающиеся часто на порядки экспериментальные данные могут быть объяснены характером нагружения, если жидкость, всегда содержащую микронеоднородности в виде микропузырьков свободного газа, рассматривать как двухфазную среду и применить к ней соответствующую математическую модель. Но такого подхода, как отмечено в [3], недостаточно, чтобы описать процесс разрушения. Там же показано, что за фронтом распространяющейся волны разрежения интенсивно развивается пузырьковая кавитация. Это своего рода объемное кавитационное вскипание охватывает значительную часть жидкости, среда становится оптически непрозрачной и, как видно из расчетов, не сохраняет практически никаких растягивающих напряжений, которые