

Автор благодарит Л. В. Овсянникова и В. И. Букреева за инициативу постановки данных опытов и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нелинейные** проблемы теории поверхностных и внутренних волн/Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др.— Новосибирск: Наука, 1985.
2. Агеев В. А., Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Новый тип плоских стационарных волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 5.
3. Yih C.-S., Guba C. R. Hydraulic jump in a fluid system of two layers // Tellus.— 1955.— V. 7, N 3.
4. Mehrotra S. C., Kelly R. E. On the question of nonuniqueness of internal hydraulic jumps and drops in a two-fluid system // Tellus.— 1973.— V. 25.
5. Wood I. R., Simpson J. E. Jumps in layered miscible fluids // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 140.
6. Стокер Дж. Дж. Волны на воде.— М.: ИЛ, 1959.
7. Букреев В. И., Гаврилов Н. В., Знобищев К. Р. Экспериментальное исследование волн в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 64.
8. Thorpe S. A. Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 39, N 1.

Поступила 11/IV 1986 г.

УДК 532.528

ОБ ОДНОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ОКОЛО ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗВРАТНОЙ СТРУЙКИ

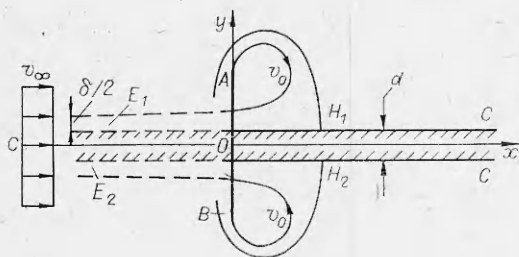
В. С. Садовский

(Жуковский)

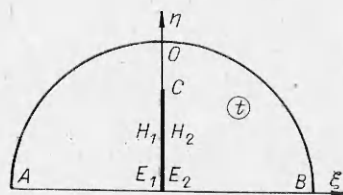
Схема плоского стационарного течения идеальной жидкости около пластины изображена на рис. 1, где приведены основные обозначения и система координат. От обычной схемы Эффроса она отличается тем, что критические точки H_1 и H_2 за пластиной разнесены по оси y на расстояние d , а линии тока, проходящие в эти точки, после разветвления являются прямыми $y = \pm d/2$. Полосу $|y| \leq d/2$ назовем жестким следом, который при $x < 0$ вместе с возвратными струйками суммарной толщины δ реализуется на второй римановой поверхности.

Пусть p_∞, v_∞ — давление и скорость потенциального течения на бесконечности; p_0 и v_0 — давление в каверне и скорость на ее граничной линии тока; $Q = 2(p_\infty - p_0)/\rho v_\infty^2 = (v_0/v_\infty)^2 - 1$ — число кавитации; l — длина пластины.

Для нахождения решения используем метод особенностей Чаплыгина, который применительно к задаче Эффроса достаточно подробно изложен в [1]. Так же как и в [1], областью параметрического переменного t выберем полукруг единичного радиуса. Соответствие точек физической плос-



Р и с. 1



Р и с. 2

кости $z = x + iy$ и плоскости $t = \xi + i\eta$ изображено на рис. 1, 2, при этом $t(C) = ic$, $t(H_1) = t(H_2) = ih$.

Пусть w — комплексный потенциал течения. Сопоставляя рассматриваемую здесь картину течения и схему Эффроса, приходим к выводу о полном совпадении выражений для dw/dt и dw/dz в обоих течениях:

$$(1) \quad \frac{dw}{dt} = Nv_0 \frac{(t^4 - 1)(t^2 + h^2)(h^2t^2 + 1)}{t(t^2 + c^2)^2(c^2t^2 + 1)},$$

$$\frac{dw}{dz} = v_0 \frac{(t - ih)(ht - i)(t - i)}{(t + ih)(ht + i)(t + i)},$$

$$(2) \quad \bar{v}_0 \equiv \frac{v_0}{v_\infty} = \frac{(c + h)(1 + ch)(1 + c)}{(c - h)(1 - ch)(1 - c)},$$

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} = N \frac{(t + ih)^2(ht + i)^2(t + i)^2(t^2 - 1)}{t(t^2 + c^2)^2(c^2t^2 + 1)}.$$

Формально выражения (2), (3) полностью идентичны соответствующим выражениям задачи Эффроса, однако в последней математические параметры h и c связаны между собой условием однозначности [1], в то время как в данном случае его нет. Выразим величины v_0 , N , δ , d через h и c .

Скорость v_0 в возвратных струйках дается формулой (2), а коэффициент N определяется размером пластины l :

$$il = \int_{BOA} \frac{dz}{dt} dt,$$

где интегрирование производится по полуокружности BOA , на которой $t = e^{i\theta}$ (см. рис. 2). После подстановки (3) в интеграл и простых преобразований имеем соотношение

$$(4) \quad \frac{l}{N} = 8 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) (1 + h^2 + 2h \sin \theta)^2}{(1 + c^4 + 2c^2 \cos 2\theta)^2} d\theta,$$

которое существенно отличается от аналогичного (23.6) в [1].

Толщина возвратных струек δ получается интегрированием (3) по бесконечно малой четверти окружности с центром в точке $t = 0$:

$$(5) \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{l} = \pi \frac{N}{l} \frac{h^2}{c^4}.$$

Для вычисления поперечного размера следа d проинтегрируем (3) по окружности малого радиуса с центром в $t = ic$ (что отвечает обходу в физической плоскости по окружности достаточно большого радиуса):

$$id = \oint \frac{dz}{dt} dt.$$

Этот интеграл определяется вычетом функции dz/dt в точке $t = ic$. Так как

$$\frac{dz}{dt} = \frac{N}{(t - ic)^2} \frac{f(t)}{g(t)},$$

где $f(t) = (t + ih)^2(ht + i)^2(t + i)^2(t^2 - 1)$, $g(t) = t(t + ic)^2(c^2t^2 + 1)^2$, то вычет dz/dt зависит от производной отношения f/g в точке $t = ic$:

$$\frac{d}{dt} \frac{f}{g} = \frac{f}{g} \frac{d}{dt} (\ln f - \ln g).$$

Взяв логарифмическую производную, окончательно находим

$$(6) \quad \bar{d} \equiv \frac{d}{l} = \pi \frac{N}{l} \frac{(c + h)^2 (1 + ch)^2 (1 + c)^2 (1 + c^2)}{c^3 (1 - c^4)^2} F(c, h).$$

Здесь

$$(7) \quad F(c, h) = \frac{1}{c + h} + \frac{h}{1 + ch} + \frac{1}{1 - c^2} - \frac{1}{c},$$

а коэффициент N дается выражением (4). В обычном течении Эффроса $F(c, h) \equiv 0$ (условие однозначности), в то время как в данном случае $F(c, h)$, согласно (6), определяет поперечный размер следа d .

Итак, исследуемое семейство течений однозначно находится заданием параметров c и $h \leq c$ в соответствии с формулами (2), (4)–(7)

при условии, что заданы скорость набегающего потока v_∞ и размер пластины l .

На рис. 3 представлены расчетные зависимости толщины возвратных струек δ от поперечного размера жесткого следа \bar{d} при постоянных значениях величины скорости \bar{v}_0 (\bar{v}_0 и \bar{d} приняты независимыми гидродинамическими параметрами), линии 1–7 отвечают $\bar{v}_0 = 1; 1,05; 1,1; 1,2; 1,5; 2,0; 3,0$. Характерная особенность — монотонное и практически линейное уменьшение струйки при возрастании следа \bar{d} для всех $\bar{v}_0 > 1$. Наибольшие значения δ при $v_0 = \text{const}$ достигаются при $\bar{d} = 0$, т. е. соответствуют картине течения по схеме Эффроса, являющейся частным случаем рассматриваемого двухпараметрического семейства. Минимальное значение $\delta = 0$ одинаково для любого значения $\bar{v}_0 > 1$. Из (5) вытекает, что этому случаю отвечают $h \equiv 0, c \neq 0$, коэффициент N и \bar{d} остаются конечными:

$$\frac{l}{N} = 8 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) d\theta}{(1 + c^4 + 2c^2 \cos 2\theta)^2},$$

$$\bar{d} = \pi \frac{N}{l} \frac{(1 + c)^2 (1 + c^2)}{c(1 - c^2)(1 - c^4)^2}.$$

Простой анализ показывает, что при $h \equiv 0$ ($\delta = 0$) сходящие с острых кромок пластины свободные линии тока подходят в точках H_1 и H_2 к прямым $y = \pm d/2$ по касательным, а части линий тока $y = \pm d/2, x < x_H$, уходящие при $h \neq 0$ на вторую риманову поверхность, исчезают. В результате оказалось, что минимальные значения $\delta = 0$ ($\bar{d} > 1$) достигаются в известном однопараметрическом семействе течений Жуковского — Рошко (см., например, [1]). Тем самым указанное семейство также — частный случай рассматриваемых течений.

Используя интегральную теорему импульсов по аналогии с [1] (с. 181), можно получить выражение для коэффициента аэродинамического сопротивления, считая, что на тыльной стороне пластины давление равно p_0 :

$$(8) \quad c_x = 2\bar{\delta}\bar{v}_0(1 + \bar{v}_0) + \bar{d}Q.$$

Здесь при заданных значениях Q и \bar{d} величина $\bar{\delta}$ есть функция этих двух переменных. Как и следовало ожидать, в предельных случаях ($\bar{d} = 0, \delta \neq 0; \delta = 0, \bar{d} > 1$) формула (8) дает известные выражения коэффициента сопротивления пластины при обтекании ее по схемам Эффроса и Жуковского — Рошко. На основании расчетов установлено, что при $v_0 = \text{const}$ увеличение d приводит к монотонному возрастанию c_x , которое чрезвычайно мало (известно, что различие в коэффициентах сопротивления при обтекании рассматриваемой пластинки по схемам Эффроса и Жуковского — Рошко не превосходит 0,2% вплоть до $\bar{v}_0 = 3$).

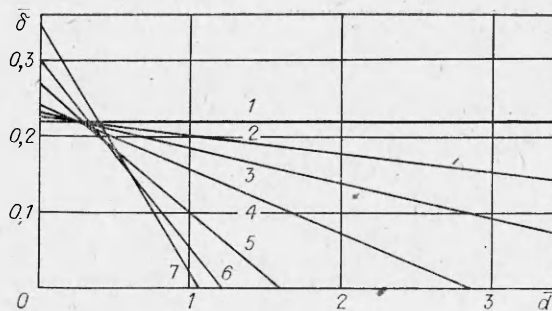
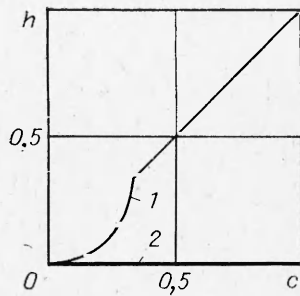


Рис. 3



Р и с. 4

Отметим некоторые особенности предельных переходов в рамках изучаемого двухпараметрического семейства к течению Кирхгофа. На рис. 4 изображена область допустимых значений математических параметров h и c . Одна из границ этой области (кривая 1) соответствует семейству течений Эффроса, в котором h и c связаны соотношением $F(c, h) = 0$ ($d \equiv 0$). Переход к течению Кирхгофа ($c \rightarrow 0$) в этом классе хорошо известен:

$$\bar{\delta}_* = \frac{\pi}{2(\pi+4)}, \quad \bar{a}_* = 0, \quad c_x = \frac{2\pi}{\pi+4},$$

так же как и предельный переход к течению Кирхгофа вдоль границы 2 (семейство течений Жуковского — Рошко; $h \equiv 0, c \rightarrow 0$):

$$\bar{\delta}_* = 0, \quad \bar{a}_* \rightarrow \infty, \quad c_x = 2\pi/(\pi+4),$$

т. е. он связан с исчезновением возвратной струйки.

Осуществим теперь предельный переход к течению Кирхгофа ($h \rightarrow 0, c \rightarrow 0$) внутри рассматриваемого класса.

Пусть $h = c^2 + \beta c^3$ ($\beta \leq 1$) и $c \rightarrow 0$. Тогда из (4) $l/N = 2(\pi + 4)$, а из (5) $\bar{\delta}_* = \pi/[2(\pi + 4)]$. Простой анализ (6) показывает, что $\bar{a}_* = \pi(1 - \beta)/[2(\pi + 4)]$, а так как $Q \rightarrow 0$, то $c_x = 2\pi/(\pi + 4)$.

Это означает, что в пределе получается течение Кирхгофа, в котором две возвратные струйки «разнесены» на величину \bar{a}_* , определяемую коэффициентом β , однако их суммарная толщина равна «эфросовскому» значению.

Пусть теперь $h = \alpha c^2$ ($0 < \alpha \leq 1$) и $c \rightarrow 0$. Легко видеть, что

$$\frac{l}{N} = 2(\pi + 4), \quad Q \approx 4(1 + \alpha)c \rightarrow 0,$$

$$\bar{\delta}_* = \pi\alpha^2/[2(\pi + 4)], \quad \bar{a}_* = \pi/[2(\pi + 4)] \quad (\alpha = 1),$$

$$\bar{a}_* \approx \pi(1 - \alpha)/[2(\pi + 4)c] \rightarrow \infty \quad (\alpha \neq 1).$$

Однако при этом

$$c_x = \frac{4\pi\alpha^2}{2(\pi+4)} + \frac{1-\alpha}{c} \frac{4\pi(1+\alpha)c}{2(\pi+4)} = \frac{2\pi}{\pi+4}.$$

Естественно, что сопротивление пластинки в пределе осталось все тем же, а величина возвратной струйки может быть достаточно произвольной, но в пределах $0 < \bar{\delta} \leq \pi/[2(\pi + 4)]$, т. е. ограничена сверху «эфросовским» значением. Если $h \sim c^\alpha$ ($\alpha > 2$) и $c \rightarrow 0$, то $\bar{\delta}_* = 0, \bar{a}_* \rightarrow \infty$.

Автор благодарит Г. И. Таганова, по инициативе которого выполнена данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.

Поступила 17/IV 1986 г.