

случае, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям п. 3, можно показать, что выигрыш по функционалу в результате оптимизации имеет порядок  $o(Re^3)$ .

Поступила 3 I 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сиразетдинов Т. К. Оптимальные задачи газодинамики. — «Изв. высш. учеб. заведений. Авиационная техника», 1963, № 2.
2. Pironneau O. On optimum profiles in Stokes flow. — «J. Fluid Mech.», 1973, vol. 51, N 1, p. 117.
3. Bourot J.-M. On the numerical computation of the optimum profile in Stokes flow. — «J. Fluid Mech.», 1974, vol. 65, N 3, p. 513.
4. Pironneau O. On the optimum design in fluid mechanics. — «J. Fluid Mech.», 1974, vol. 64, N 1, p. 97.
5. Миронов А. А. К задаче оптимизации формы тела в вязкой жидкости. — ПММ, 1975, т. 39, № 1, с. 103.
6. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds number. — «J. Fluid Mech.», 1957, vol. 9, N 4, p. 593.

УДК 517.9 : 536.2

### О ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ В ЛАМИНАРНОЙ ПРИСТЕННОЙ СТРУЕ

К. Б. Павлов, Л. Д. Покровский

(Москва)

Рассмотрение задач о нагревании сред в рамках линейной теории теплопроводности становится некорректным, если изменение температуры происходит в широких пределах, и это приводит к необходимости учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Например, подобная зависимость имеет место, когда в механизме теплопередачи существенную роль играет лучистый теплообмен [1].

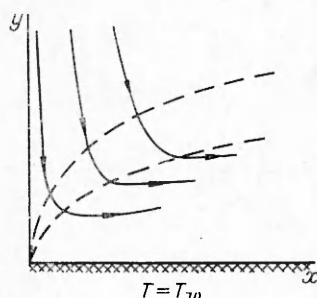
Если коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону, то распространение тепловых возмущений в среде с нулевой температурой происходит с конечной скоростью движения фронта тепловой волны [1]. Если к тому же в указанной среде имеются тепловые стоки, то фронт тепловой волны может оставаться неподвижным относительно источника тепловых возмущений [2]. Ниже показывается, что аналогичное явление пространственной локализации тепловых возмущений может быть обнаружено также при решении задач стационарного температурного пограничного слоя; этот факт обуславливается совместным влиянием степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и движением среды.

Рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры в затопленной ламинарной струе, распространяющейся вдоль твердой плоской нагретой поверхности, температура которой  $T_w = \text{const} > 0$ . Пусть плоская струя жидкости, имеющей температуру  $T = 0$ , выходит в направлении оси  $x$  из узкой щели  $x = 0, y = 0$  в полупространство  $y > 0$ , заполненное той же жидкостью (фиг. 1). Предполагается, что теплопроводность жидкости зависит от температуры по степенному закону, а остальные параметры жидкости постоянны.

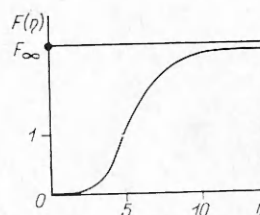
При пренебрежении вязкой диссипацией в жидкости система уравнений тепло- и массопереноса, описывающая указанный процесс в приближении пограничного слоя, записывается в виде [3]

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial u / \partial x + \partial v / \partial y &= 0, \\ u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y &= \nu \partial^2 u / \partial y^2, \\ u \partial T / \partial x + v \partial T / \partial y &= a \partial^2 T^n / \partial y^2, \end{aligned}$$

где  $a = \text{const} > 0$ ;  $n = \text{const} > 0$ ;  $\nu$  — вязкость жидкости;  $anT^{n-1}$  — коэффициент теплопроводности жидкости.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Проекции скорости жидкости  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  определяются независимо от значений температуры  $T(x, y)$ , соответствующая задача автомодельна и имеет решение [3, 4]

$$(2) \quad \begin{aligned} u'_*(x, y) &= F'(\eta) \left( \frac{E}{\nu x} \right)^{1/2}, \\ v(x, y) &= \frac{1}{4} (3\eta F'(\eta) - F(\eta)) \left( \frac{\nu E}{x^3} \right)^{1/4}, \end{aligned}$$

где  $\eta = y(E/\nu^3 x^3)^{1/4}$  — автомодельная переменная;  $E = \int_0^\infty u \left( \int_y^\infty u^2 dy \right) dy = \text{const}$  — сохраняющийся инвариант задачи, а функция  $F(\eta)$ , график которой представлен на фиг. 2, определена неявно (см., например, в [3]). На фиг. 1 линии тока — сплошные линии, а линии  $\eta = \text{const}$  — штриховые.

Распределение температуры  $T(x, y)$  в пристенной струе должно быть определено при решении третьего уравнения системы (1) — уравнения теплопроводности с очевидными граничными условиями

$$(3) \quad T(x, 0) = T_w, \quad T(x, \infty) = 0.$$

Искомая функция  $T(x, y)$  и производные  $\partial T^n / \partial x$ ,  $\partial T^n / \partial y$  должны быть непрерывными всюду при  $x, y \geq 0$ , что соответствует непрерывности температуры и потока тепла  $\mathbf{q} = -a \nabla T^n$ . Кроме того, должно быть выполнено также физически очевидное условие обращения в нуль потока тепла при  $y \rightarrow \infty$

$$(4) \quad (\partial T^n / \partial x)(x, \infty) = (\partial T^n / \partial y)(x, \infty) = 0.$$

Используя обычные соображения теории размерности, будем искать авто-

модельное решение  $T(x, y)$  задачи (1) — (4) в форме  $T(x, y) = T_w \theta(\eta)$ . При этом функция  $\theta(\eta)$  является решением следующей задачи:

$$(5) \quad \begin{aligned} -F(\eta)\theta'(\eta) &= (4/n\sigma_w)[\theta^n(\eta)]', \\ \theta(0) &= 1, \theta(\infty) = (\theta^n)'(\infty) = 0, \end{aligned}$$

где  $\sigma_w = \nu/naT_w^{n-1}$  — эффективное число Прандтля в жидкости вблизи нагретой поверхности.

В линейном случае при  $n = 1$  задача (5) рассматривалась в [5]; при  $n \neq 1$  уравнение (5) может быть проинтегрировано только численно, однако представляется целесообразным предварительно исследовать аналитическую структуру его решений. В этой связи рассмотрим вспомогательную задачу

$$(6) \quad -F_0\bar{\theta}'(\eta) = (4/n\sigma_w)[\bar{\theta}^n(\eta)]', \quad \bar{\theta}(0) = 1, \bar{\theta}(\infty) = (\bar{\theta}^n)'(\infty) = 0,$$

отличающуюся от задачи (5) тем, что функция  $F(\eta)$  заменена постоянной  $F_0$ .

Отметим, что функция  $F(\eta)$  мало изменяется при  $\eta > \eta_c \approx 10$  ( $F(\eta \geq \eta_c) \approx F_\infty$ ), поэтому для значений  $x$ , удовлетворяющих условию

$$(7) \quad \eta_c(Ex/\nu^3)^{3/4} \ll 1,$$

решение  $\bar{T}(x, y) = T_w \bar{\theta}(\eta)$ , полученное в результате решения вспомогательной задачи (6) с  $F_0 = F_\infty$ , будет мало отличаться от точного решения  $T(x, y)$  задачи (5). На фиг. 3 показаны профили температуры по  $y$ :  $a$  — для значений  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих условию (7) при  $Ex_1/\nu^3 = 0,01$ ;  $Ex_2/\nu^3 = 0,02$ ;  $n = 1,5$ ;  $\sigma_w = 1$  (штрихом изображено точное решение задачи (5)),  $b$  — для различных значений  $n$  при  $Ex/\nu^3 = 0,01$ ;  $\sigma_w = 1$ .

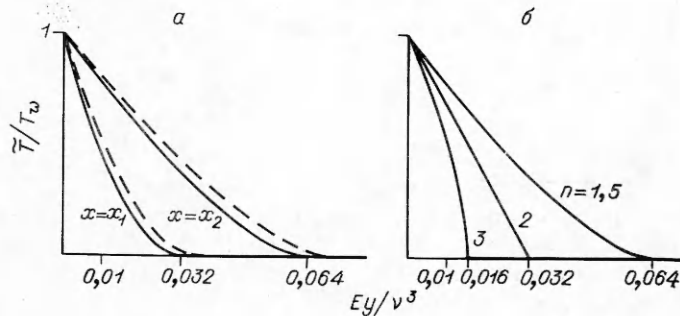
Однократное интегрирование уравнения (6) с учетом условий при  $\eta \rightarrow \infty$  приводит к уравнению

$$(8) \quad -(1/4)(n-1)\sigma_w F_0 = \bar{\theta}^{n-1}(\eta)'$$

частное решение которого, удовлетворяющее условию  $\bar{\theta}(0) = 1$ , имеет вид

$$(9) \quad \bar{\theta}(\eta) = \left[ 1 - \frac{1}{4}(n-1)\sigma_w F_0 \eta \right]^{1/(n-1)}.$$

При  $n < 1$  функция  $\bar{\theta}(\eta)$  (9) определена всюду при  $0 < \eta < \infty$  и  $\bar{T}(x, y)$  записывается в виде



Ф и г. 3

$$(10) \quad \bar{T}(x, y) = T_w \left[ 1 + \frac{1}{4} (1-n) \sigma_w F_0 \left( \frac{E}{v^3 x^3} \right)^{1/4} y \right]^{\frac{1}{n-1}}, \\ x, y \geq 0, \quad n < 1.$$

Если  $n > 1$ , то функция  $\bar{\theta}(\eta)$  (9) обращается в нуль при

$$\eta = \bar{\eta}_f = 4/(n-1) \sigma_w F_0.$$

Уравнение (8) при  $n > 1$  имеет особое решение  $\bar{\theta} = 0$ , поэтому решением задачи (6) при  $n > 1$  следует считать обобщенное решение, склеенное в точке  $\eta = \bar{\eta}_f$  из частного решения (9) при  $0 \leq \eta \leq \bar{\eta}_f$  и особого решения  $\bar{\theta} = 0$  при  $\bar{\eta}_f \leq \eta < \infty$  (см. фиг. 3).

Обобщенное решение, построенное указанным образом, имеет, вообще говоря, в точке  $\eta = \bar{\eta}_f$  слабый разрыв (в точке  $\eta = \bar{\eta}_f$  терпят разрыв производные  $d^{m+1}\bar{\theta}/d\eta^{m+1}$ , где  $m$  — наибольшее целое число такое, что  $m < 1/(n-1)$ ). Например, при  $n = 1,5$  производная  $\bar{\theta}'(\eta)$  непрерывна, при  $n = 2$  терпит разрыв первого рода, а при  $n = 3$  обращается в бесконечность (см. фиг. 3). Однако для любого  $\eta$ ,  $0 \leq \eta < \infty$ , имеет место непрерывность  $\bar{\theta}(\eta)$  и  $[\bar{\theta}^n(\eta)]'$ , что соответствует непрерывности температуры и теплового потока. Выражение для  $\bar{T}(x, y)$  при  $n > 1$  записывается в виде

$$(11) \quad \bar{T}(x, y) = \begin{cases} T_w \left[ 1 - \frac{1}{4} (n-1) \sigma_w F_0 \left( \frac{E}{v^3 x^3} \right)^{1/4} y \right]^{\frac{1}{n-1}}, & 0 \leq y \leq \bar{y}_f, \\ 0, & \bar{y}_f \leq y < \infty, \end{cases}$$

причем поверхность

$$(12) \quad y = \bar{y}_f(x) = 4v^{3/4}x^{3/4}/(n-1)\sigma_w F_0 E^{1/4}$$

строго разграничивает области, в которых  $\bar{T}(x, y) \neq 0$  и  $\bar{T}(x, y) = 0$ , т. е. имеет место пространственная локализация тепловых возмущений.

В пределе при  $n \rightarrow 1 \pm 0$  из (11), (10) соответственно следует, что

$$(13) \quad \bar{T}(x, y) = T_w \exp[-\sigma_w F_0 E^{1/4}/4(vx)^{3/4}], \quad x, y \geq 0, \quad n = 1.$$

Кроме того, как это следует из (12),  $\bar{y}_f(x) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow 1 + 0$ , т. е. при  $n = 1$ , как и при  $n < 1$ , тепловые возмущения содержатся всюду в области  $x, y \geq 0$ .

Поток тепла с нагретой поверхности  $\bar{q}(x, 0) = -a(\partial \bar{T}^n / \partial y)(x, 0)$  ( $x \geq 0$ ) вычисляется с помощью выражений (10), (11), (13); при этом оказывается, что величина  $\bar{q}(x, 0) = T_w (vE)^{1/4} F_0 / 4x^{3/4}$  не зависит от  $n$ .

Можно проверить, что при  $n > 1$  поток тепла равен нулю всюду на поверхности  $y = \bar{y}_f(x)$ :  $(\bar{\theta}^n)'(\bar{\eta}_f) = 0$ . Таким образом, условия  $\bar{\theta} = (\bar{\theta}^n)' = 0$  (6) в случае  $n > 1$  оказываются выполненными при конечном значении  $\eta = \bar{\eta}_f < \infty$ , а не при  $\eta = \infty$ , как это имеет место в случае  $n \leq 1$ . Именно это обстоятельство выражает факт пространственной локализации тепловых возмущений при  $n > 1$ . Необходимо отметить, что указанная локализация никоим образом не обуславливается переходом от задачи (5) к вспомогательной задаче (6). Можно показать, что локализация тепловых возмущений имеет место, если в уравнении теплопроводности (1)  $n > 1$ .

Установим в этой связи, что при  $n > 1$  существует область  $0 < x < \infty$ ,  $0 < y_f(x) \leq y < \infty$  ( $y_f(x) = \eta_f (vx)^{3/4} / E^{1/4}$ ,  $\eta_f = \text{const} > 0$ ), куда не проникают тепловые возмущения от нагретой поверхности. Последнее утверждение равносильно тому, что при  $n > 1$  существует множество значений  $\eta$ :  $\eta_f \leq \eta < \infty$ , при которых решение уравнения (5) обращается в нуль.

Действительно, решение  $\theta(\eta)$  задачи (5) при  $0 < \eta_* \leq \eta < \infty$  ( $\eta_* > 0$  — фиксированное значение  $\eta$ ) можно рассматривать как решение задачи

$$(14) \quad -F(\eta)\theta'(\eta) = a[\bar{c}^n(\eta)]', \quad \theta(\eta_*) = \theta_* \geq 0, \quad \theta(\infty) = (\bar{c}^n)'(\infty) = 0.$$

При  $\eta > \eta_*$  справедливо неравенство

$$(15) \quad \theta(\eta) \leq \bar{\theta}(\eta),$$

где  $\bar{\theta}(\eta)$  — решение аналогичной (14) задачи с постоянным коэффициентом  $F(\eta) \equiv F(\eta_*) = \text{const}$

$$(16) \quad -F(\eta_*)\bar{\theta}'(\eta) = a[\bar{c}^n(\eta)]', \quad \bar{\theta}(\eta_*) = \theta_*, \quad \bar{\theta}(\infty) = (\bar{c}^n)'(\infty) = 0$$

( $F(\eta_*) < F(\eta)$  при  $\eta > \eta_*$  (см. фиг. 2)), т. е. решение задачи (16) является мажорантой решения задачи (14).

Действительно, обозначим  $\psi_1(\eta) = \bar{\theta}^n(\eta)$ ,  $\psi_2(\eta) = \bar{c}^n(\eta)$ ,  $f(\eta) = F(\eta)/a$ ,  $\beta = 1/n$  и запишем уравнения (14), (15) в виде

$$(17) \quad \psi_2''(\eta) = -f(\eta) [\psi_2^\beta(\eta)]', \quad \psi_1''(\eta) = -f(\eta_*) [\psi_1^\beta(\eta)]'.$$

Прежде всего отметим, что неравенство (15) достаточно доказать лишь для значений  $\eta$ , при которых  $\psi_2(\eta) > 0$  (так как если  $\psi_2$  обращается в нуль при некотором  $\eta = \eta_f$ , то для  $\eta > \eta_f$  она продолжается нулем — особым решением уравнения (14), и неравенство (15) выполняется тривиально). Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений [6] следует, что для всех таких значений  $\eta$  решение  $\psi_2(\eta)$  уравнения (17), удовлетворяющее условию  $\psi_2(\eta_*) = \theta_*^n$ , существует.

Далее, так как  $\psi_2(\eta) > 0$ , функции  $\psi_1'(\eta)$  и  $\psi_2''(\eta)$  имеют разные знаки. Кроме того, функция  $\psi_2(\eta)$  непрерывна (это следует из непрерывности потока тепла). Поэтому из условия  $\psi_2(\infty) = 0$  следует, что функция  $\psi_2(\eta)$  убывает по  $\eta$  монотонно, т. е.  $\psi_2'(\eta) \leq 0$  при всех  $\eta > 0$ , причем знак равенства возможен лишь при  $\psi_2(\eta) = 0$  (этими же свойствами обладает, конечно, и функция  $\psi_1(\eta)$ ).

Полагая  $\alpha(\eta) = \psi_2(\eta) - \psi_1(\eta)$ , получим

$$(18) \quad \alpha''(\eta) + f(\eta_*) [\psi_2^\beta(\eta) - \psi_1^\beta(\eta)]' = -[f(\eta) - f(\eta_*)] [\psi_2^\beta(\eta)]', \\ \alpha(\eta_*) = 0, \quad \alpha(\infty) = \alpha'(\infty) = 0.$$

Преобразуя  $\psi_2^\beta - \psi_1^\beta$  по формуле Лагранжа и интегрируя (18) с учетом условий на бесконечности, будем иметь

$$\alpha'(\eta) + p(\eta)\alpha(\eta) = \varphi(\eta),$$

где  $p(\eta) = \beta f(\eta_*) [\gamma \psi_1 + (1 - \gamma) \psi_2]^{\beta-1}$ ,  $0 < \gamma < 1$ ;

$$\varphi(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} [f(\eta) - f(\eta_*)] [\psi_2^\beta(\eta)]' d\eta.$$

Решение полученного уравнения, удовлетворяющее условию  $\alpha(\eta_*) = 0$ , можно записать в виде

$$(19) \quad \alpha(\eta) = \exp \left[ - \int_{\eta_*}^{\eta} p(\eta_1) d\eta_1 \right] \left\{ \int_{\eta_*}^{\eta} \varphi(\eta_2) \exp \left[ \int_{\eta_*}^{\eta_2} p(\eta_3) d\eta_3 \right] d\eta_2 \right\}.$$

При этом функция  $\alpha(\eta)$  ограничена, так как этим свойством обладают функции  $\psi_1(\eta)$  и  $\psi_2(\eta)$ . Таким образом, решение задачи (18) там, где оно существует (т. е. там, где  $\psi_1(\eta) > 0$  и  $\psi_2(\eta) > 0$ ), может быть представлено в виде (19).

Учитывая, что  $\varphi(\eta) \leq 0$  (так как  $\psi_2'(\eta) \leq 0$ ), из (19) получаем  $\alpha(\eta) \leq 0$ , что и доказывает неравенство (15).

Если  $\theta_* = 0$ , то задача (16) имеет только тривиальное решение  $\theta(\eta) = 0$ ,  $\eta_* \leq \eta < \infty$ , поэтому  $\eta_f = \eta_* \leq \infty$ .

Если  $\theta_* > 0$ , то решение задачи (16) строится аналогично решению (11) вспомогательной задачи (6), оно записывается в форме

$$\theta(\eta) = \begin{cases} \theta_* \left[ 1 - \frac{(n-1)F(\eta_*)}{an\theta_*^{n-1}} (\eta - \eta_*) \right]^{\frac{1}{n-1}}, & \eta_* \leq \eta \leq \bar{\eta}_f, \\ 0, & \bar{\eta}_f \leq \eta < \infty, \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_f = \eta_* + an\theta_*^{n-1}/((n-1)F(\eta_*)),$$

откуда в силу (15) следует  $\eta_f \leq \bar{\eta}_f < \infty$ .

Таким образом, при  $n > 1$  в пристенной струе всегда существует область, ограниченная поверхностью  $y = y_f(x)$ , в которую не проникают тепловые возмущения от нагретой стенки. Представляется возможным в общем случае провести качественное описание поведения функции  $T(x, y)$  вблизи этой поверхности. Для такого описания достаточно ограничиться рассмотрением уравнения теплопроводности (1) в малой окрестности некоторой фиксированной точки  $x_0, y_0$  на кривой  $y = y_f(x)$ . Вводя в точке  $x_0, y_0$  локальные координаты

$$\xi(x, y) = [k(x - x_0) - (y - y_0)]/(1 + k^2)^{1/2},$$

$$\zeta(x, y) = [(x - x_0) + k(y - y_0)]/(1 + k^2)^{1/2},$$

$$k = (dy_f/dx)(x_0)$$

(нормальную и тангенциальную к поверхности  $y = y_f(x)$  соответственно), запишем в них уравнение теплопроводности (1), учитывая, что в малой окрестности точки  $x_0, y_0$  функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  можно заменить на постоянные  $u_0 = u(x_0, y_0)$  и  $v_0 = v(x_0, y_0)$ , а температура существенно зависит лишь от  $\xi$ . В итоге имеем

$$(20) \quad - (1 + k^2)^{1/2} (ku_0 - v_0) \frac{dT}{d\xi} = a \frac{d^2 T^n}{d\xi^2}.$$

Учитывая выражение (2), непосредственной проверкой можно убедиться в том, что  $u dy_f/dx - v > 0$  и, следовательно,  $ku_0 - v_0 > 0$ . В результате двукратного интегрирования уравнения (20) с учетом условий на поверхности  $y = y_f(x)$  получим выражение

$$T(\xi) = [(n-1)(ku_0 - v_0)(1 + k^2)^{1/2}(-\xi)/na]^{1/(n-1)},$$

определяющее распределение температуры вблизи поверхности  $\xi = 0$  при  $\xi < 0$ . При  $\xi > 0$  распределение температуры должно определяться осо-

бым решением уравнения (20) ( $T(\xi) = 0$ ), которое существует только, если  $n > 1$  [6].

В [1] было показано, что в средах с коэффициентом температуропроводности  $anT^{n-1}$  ( $n > 1$ ) тепловые возмущения распространяются с конечной скоростью. Конечность скорости распространения тепловых возмущений и снос жидкости в пристенной струе являются в итоге причинами существования в рассматриваемом случае стационарной поверхности — фронта «тепловой волны», разделяющей области с  $T \neq 0$  и  $T = 0$ . Как отмечалось в [7], существование фронта «тепловой волны» связано с наличием особого решения обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего автомодельное распределение температуры.

В заключение отметим, что все установленные выше результаты автоматически переносятся на соответствующую задачу нелинейной диффузии.

Поступила 8 II 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. — Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
2. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. — ЖВММФ, 1972 т. 12, № 4, с. 1048—1053.
3. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
4. Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи жидкости вдоль твердой стенки. — «Труды ЛПИ. Энергомашиностроение. Техническая гидромеханика», 1953, № 5.
5. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Л., Гостехтеориздат, 1950.
7. Павлов К. Б. Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглощением тепла. — ПМТФ, 1973, № 5, с. 96—101.

УДК 532.72

#### ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ К КАПЛЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ И КОНЕЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин,  
В. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Первое приближение в задаче стационарной конвективной диффузии к сферической частице в однородном поступательном потоке было получено для нулевого [1] и для конечных чисел Рейнольдса [2, 3]. Двучленное разложение в случае стоксова обтекания твердой частицы дано в [4].

Предполагаем, что концентрация вещества, растворенного в потоке, постоянна вдали от капли, а на поверхности происходит полное его поглощение. В сферической системе координат, связанной с каплей, безразмер-