УДК 533.6. 011. 72

О КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ УДАРНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Ю. А. Березин, В. А. Вшивков

(*Новосибирск*)

С помощью регулярного метода, основанного на анализе типа особых точек уравнений структуры стационарных ударных волн, распространяющихся в плазме с конечной проводимостью и теплопроводностью под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю, определены критические параметры, при которых имеет место изомагнитный скачок плотности.

Вопрос о существовании и структуре ударных волн в плазме с магнитным полем интенсивно изучался многими авторами [1—10]. В работе [1] обобщены соотношения Гюгонио на случай магнитной газодинамики, в [2—7] проведено исследование этих соотношений, в результате чего ударные волны разделены на медленные ($M_s \leqslant M \leqslant 1$), промежуточные ($1 \leqslant M \leqslant M_f$) и быстрые ($M \geqslant M_f$), где M — скорость ударной волны по отношению к альфвеновской скорости, т. е. число Альфвена — Махэ; M_s — медленная магнитозвуковая скорость; M_f — быстрая магнитозвуковая скорость. Теория ударных волн в разреженной плазме была создана Р. З. Сагдеевым [8]; им была показана возможность существования таких волн и подчеркнута важная роль дисперсионных эффектов, приводящих к возникновению ударных волн с осцилляторной структурой. Подробное исследование стационарных и нестационарных волн сжатия в двухжидкостной плазме с учетом дисперсионных эффектов дано в [9], но здесь отсутствует диссипация энергии, теплопроводность и положено $\gamma = 2$. В [10] изучен характер особых точек уравнений, описывающих структуру ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля, и установлены из такого анализа критические параметры, при которых происходит переход от непрерывных по всем функциям решений к разрывным по газодинамическим функциям. В [11] проанализированы различные структуры ударных волн поперек магнитного поля при учете конечной проводимости, дисперсии и электронной теплопроводности, получены численные решения нелинейных уравнений структуры в области параметров, когда течение является непрерывным, и найдены критические параметры, при которых решение из осцилляторного превращается в монотонное или разрывное. В [12] проведено достаточно подробное изучение изомагнитного скачка плотности с помощью численного решения нестационарной задачи о распространении ударных волн в плазме поперек магнитного поля (программа для численного решения разработана и опробована на большом числе подобных нестационарных задач Ю. А. Березиным, см., например, [13]). В рамках этой же программы в [14] предпринята попытка определить критические параметры ударных волн, распространяющихся под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю при отсутствии теплопроводности. Однако ввиду сложного характера зависимости ширины ударной волны от числа Маха, что будет подробно описано ниже, полученные в [14] критические числа Маха нужно рассматривать как весьма приблизительные. В работе [15] дана таблица значений критических чисел Маха для ряда углов без указания метода решения.

1. Исходные уравнения. Система уравнений, описывающая одномерные движения двухжидкостной квазинейтральной плазмы под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю при учете дисперсии, конечной проводимости и электронной теплопроводности, имеет в безразмерных переменных следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0; \\
\frac{\partial}{\partial t}(nu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(nu^2 + \frac{H^2 + B^2 + p}{2(1+\beta)}\right) = 0; \\
\frac{\partial}{\partial t}(nv) + \frac{\partial}{\partial x}\left(nuv - \frac{H\sin\theta}{1+\beta}\right) = 0; \\
\frac{\partial}{\partial t}(nw) + \frac{\partial}{\partial x}\left(nuw - \frac{B\sin\theta}{1+\beta}\right) = 0; \\
\frac{\partial}{\partial t}\left[H - \frac{\beta}{1+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[uH - v\sin\theta - \frac{\varkappa}{n}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\sin\theta}{n}\frac{\partial B}{\partial x} - \right. \\
\left. - \frac{\beta u}{1+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right] = 0; \\
\frac{\partial}{\partial t}\left[B - \frac{\beta}{1+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial B}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[uB - w\sin\theta - \frac{\varkappa}{n}\frac{\partial B}{\partial x} + \right. \\
\left. + \frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\sin\theta}{n}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\beta u}{1+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial B}{\partial x}\right)\right] = 0; \\
\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{p}{2(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(H^2 + B^2) + \frac{1+\beta}{2}n(u^2 + v^2 + w^2) + \right. \\
\left. + \frac{\beta}{2(1+\beta)n}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{u\left[\frac{\gamma p}{2(\gamma-1)} + H^2 + B^2 + \right.\right. \\
\left. + \frac{1+\beta}{2}n(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\beta}{2(1+\beta)n}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2\right)\right] - \\
- (vH + wB)\sin\theta - \frac{\varkappa}{n}\left(H\frac{\partial H}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial x}\right) - \frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\sin\theta}{n}\left(H\frac{\partial B}{\partial x} - B\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \\
- \frac{\beta}{1+\beta}\left[H\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{n}\frac{\partial H}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{n}\frac{\partial B}{\partial x}\right)\right] - \\
\left. - 2\chi\frac{\partial T_e}{\partial x}\right\} = 0,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

$p = nT_e$, $\vec{u} = (m_i\vec{u}_i + m_e\vec{u}_e)/(m_i + m_e) = \{u,\ v,\ w\}$, $\vec{H} = \{\sin\theta,\ H,\ B\}$. Направление распространения волны совпадает с осью x, невозмущенное магнитное поле лежит в плоскости x, z. В качестве масштабов плотности, длины, скорости, магнитного поля, давления выбраны величины

$$
n_0,\ \delta = \frac{c\sqrt{m_i}}{\sqrt{4\pi n_0}\,e},\ V_\text{A} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 m_i}},\ H_0,\ \frac{H_0^2}{8\pi}.
$$

Кроме того, введены следующие обозначения:
$\varkappa = m_e c\nu/eH_0$ — безразмерная эффективная частота столкновений; $\beta = m_e/m_i$; θ — угол между плоскостью фронта волны и направлением распространения; $\chi = \dfrac{p}{H^2 + B^2 + \sin^2\theta}\left(\dfrac{\sin^2\theta\cdot\chi_\parallel}{\varkappa} + \dfrac{(H^2 + B^2)\varkappa\chi_\perp}{H^2 + B^2 + \sin^2\theta}\right)$ — безразмерный коэффициент теплопроводности (индексами II и $\perp$ отмечены коэффициенты вдоль и поперек магнитного поля). Проводимость плазмы в размерных переменных была введена по формуле $\sigma = ne^2/m_e\nu$.

2. Уравнения структуры ударных волн. Перейдем в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью М ударной волны в направлении отрицательных значений координаты x. Тогда из (1.1) получаем следующую систему стационарных уравнений и алгебраических соотношений (законы сохранения):

(2.1)
$$nu = \mathrm{M},\ 2\mathrm{M}u + p + H^2 + B^2 = C_1,$$
$$\mathrm{M}v = H\sin\theta,\ \mathrm{M}w = (B - \cos\theta)\sin\theta,$$
$$\beta\mathrm{M}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n}\frac{dH}{dx}\right) = \mathrm{M}H - \varkappa\frac{dH}{dx} - \left(\frac{dB}{dx} + nv\right)\sin\theta,$$
$$\beta\mathrm{M}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n}\frac{dB}{dx}\right) = \mathrm{M}B - \left(nw - \frac{dH}{dx}\right)\sin\theta - \varkappa\frac{dB}{dx} - \mathrm{M}n\cos\theta,$$

(2.2)
$$\chi\frac{p - 2\mathrm{M}u}{\mathrm{M}}\frac{du}{dx} = \frac{u}{\mathrm{M}}\left\{((2\chi - \varkappa)H + B\sin\theta)\frac{dH}{dx} + \right.$$
$$+ ((2\chi - \varkappa)B - H\sin\theta)\frac{dB}{dx}\left.\right\} + \frac{1}{2}\mathrm{M}(u^2 + v^2 + w^2) + u\left(\frac{\gamma p}{2(\gamma - 1)} + \right.$$
$$\left. + H^2 + B^2\right) - (vH + wB)\sin\theta - \beta u\left[H\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n}\frac{dH}{dx}\right) + B\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n}\frac{dB}{dx}\right)\right] - C_2,$$

где
$$C_1 = 2\mathrm{M}^2 + p_0 + \cos^2\theta;\ C_2 = 0{,}5\mathrm{M}(\gamma p_0/(\gamma - 1) + \mathrm{M}^2 + 2\cos^2\theta).$$

Уравнения (2.2) для компонент магнитного поля H, B и продольной макроскопической скорости плазмы вместе с законами сохранения (2.1) описывают структуру стационарной ударной волны при учете инерции электронов (члены, пропорциональные β), конечной проводимости, анизотропии плазмы и электронной теплопроводности.

3. Стационарные состояния. Введем индексы 0 и 1 для того, чтобы отмечать функции, соответствующие стационарным состояниям плазмы перед волной (невозмущенное состояние) и за волной (возмущенное состояние), и из системы (2.1), (2.2) получим следующую связь между этими функциями:

$$n_1u_1 = \mathrm{M},\ p_1 + 2\mathrm{M}u_1 + B_1^2 = p_0 + 2\mathrm{M}^2 + \cos^2\theta,$$
$$\mathrm{M}w_1 = (B_1 - \cos\theta)\sin\theta,\ n_1(\mathrm{M}\cos\theta + w_1\sin\theta) = \mathrm{M}B_1,$$
$$\mathrm{M}\left(\frac{\gamma p_1}{2(\gamma - 1)n_1} + \frac{B_1^2}{n_1} + \frac{u_1^2 + w_1^2}{2}\right) - w_1B_1\sin\theta = \mathrm{M}\left(\frac{\gamma p_0}{2(\gamma - 1)} + \right.$$
$$\left. + \cos^2\theta + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\right).$$

Известно, что функции за ударной волной являются однозначными, если в качестве независимой переменной выбрать плотность n_1 за волной. Поэтому, выражая все функции за волной через n_1 и число Маха М, получим следующие выражения:

$$B_1 = (\mathrm{M}^2 - \sin^2\theta)\cos\theta\Big/\left(\frac{\mathrm{M}^2}{n_1} - \sin^2\theta\right),\ u_1 = \mathrm{M}n_1^{-1},$$
$$p_1 = p_0 + 2\mathrm{M}^2(n_1 - 1)\left[\frac{1}{n_1} - \frac{(n_1+1)\mathrm{M}^2 - 2n_1\sin^2\theta}{2(\mathrm{M}^2 - n_1\sin^2\theta)^2}\cos^2\theta\right].$$

Число Маха ударной волны связано с плотностью плазмы n_1 за волной уравнением

$$(3.1)\qquad (\mathrm{M}^2 - n_1\sin^2\theta)^2\left(\mathrm{M}^2 - \frac{\gamma p_0 n_1}{\gamma+1-(\gamma-1)n_1}\right) - \left[\frac{(2-\gamma)n_1+\gamma}{\gamma+1-(\gamma-1)n_1}\mathrm{M}^2 - n_1\sin^2\theta\right]n_1\mathrm{M}^2\cos^2\theta = 0.$$

Если ввести новые функции

$$y = \mathrm{M}^2/\sin^2\theta,\quad z = y/n_1,$$

то из (3.1) получаем

$$(3.2)\qquad y = \frac{[(\gamma+1)(z-1)^2\sin^2\theta - (\gamma z-\gamma-1)\cos^2\theta]\,z - \gamma(z-1)^2 p_0}{(\gamma-1)(z-1)^2\sin^2\theta + [(2-\gamma)z+\gamma-1]\cos^2\theta}.$$

Задавая различные значения z, можно найти значения y, а затем все искомые функции

$$\mathrm{M}^2 = y\sin^2\theta,\quad n_1 = y/z,$$

$$B_1 = [(y-1)/(z-1)]\cos\theta,$$

$$p_1 = p_0 + 2(y-z)\{1-[(y+z-2)/2(z-1)^2]\,\mathrm{ctg}^2\theta\}\sin^2\theta.$$

Для случая $\gamma = 5/3$ из (3.2) имеем

$$y = \frac{[8(z-1)^2\sin^2\theta - (5z-8)\cos^2\theta]\,z - 5(z-1)^2 p_0}{2(z-1)^2\sin^2\theta + (z+2)\cos^2\theta}.$$

Далее всюду будут рассматриваться состояния плазмы перед волной с $p_0 \ll 1$, поэтому речь пойдет только о быстрых ударных волнах с $\mathrm{M} > 1$.

4. Исследование особых точек. Стационарным состояниям 0 и 1, рассмотренным выше, соответствуют особые точки системы (2.2), и характер решения задачи об ударной волне зависит от типа этих особых точек. Полагая $u = u_{0,1} + u'$, $B = B_{0,1} + B'$, $H = H'$, где $u_0 = \mathrm{M}$, $B_0 = \cos\theta$, $u' \ll u_{0,1}$, $B' \ll B_{0,1}$, произведем линеаризацию системы (2.2) вблизи особых точек 0, 1. Учет дисперсии не влияет на значения критических параметров, поэтому будем считать $\beta = 0$ и получим из (2.2) следующую линейную систему уравнений (штрихи опущены):

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} c\,dH/dx &= \varkappa a_{1,0}H - a_{1,0}\sin\theta\cdot B - b_{1,0}\sin\theta\cdot u,\\ c\,dB/dx &= a_{1,0}\sin\theta\cdot H + \varkappa a_{1,0}B + \varkappa b_{1,0}u,\\ f_{1,0}\,du/dx &= g_{1,0}H + r_{1,0}B + q_{1,0}u, \end{aligned}$$

где

$$a_{1,0} = \mathrm{M}(1 - n_{1,0}\sin^2\theta/\mathrm{M}^2);\quad c = \varkappa^2 + \sin^2\theta;$$

$$(4.2)\qquad b_{1,0} = n_{1,0}^2\left(\cos\theta + \frac{B_{1,0}-\cos\theta}{\mathrm{M}^2}\sin^2\theta\right);$$

$$f_{1,0} = [(p_{1,0} - 2\mathrm{M}u_{1,0})/\mathrm{M}]\chi_{1,0};\quad g_{1,0} = (2u_{1,0}B_{1,0}a_{1,0}\sin\theta)/\mathrm{M}c)\chi_{1,0};$$

$$r_{1,0} = B_{1,0}\left[\frac{a_{1,0}u_{1,0}}{\mathrm{M}c}(2\chi_{1,0}\varkappa - \varkappa^2 - \sin^2\theta) - \frac{2-\gamma}{\gamma-1}u_{1,0} - \frac{\sin^2\theta}{\mathrm{M}}\right];$$

$$q_{1,0} = u_{1,0}\left[\frac{B_{1,0}b_{1,0}}{\mathrm{M}c}(2\chi_{1,0}\varkappa - \varkappa^2 - \sin^2\theta) - \frac{\mathrm{M}}{\gamma-1}\right] + \frac{\gamma p_{1,0}}{2(\gamma-1)} + B_{1,0}^2;$$

$$\chi_{1,0} = \frac{p_{1,0}}{B_{1,0}^2+\sin^2\theta}\left(\frac{\chi_\parallel}{\varkappa}\sin^2\theta + \frac{B_{1,0}^2\varkappa}{B_{1,0}^2+\sin^2\theta}\chi_\perp\right).$$

Как обычно, будем искать решение (4.1) в виде функций, пропорциональных $\exp(kx)$, в результате чего получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}(4.3)\qquad & c^2 f_{1,0} k^3 - c\,(2a_{1,0} f_{1,0}\varkappa + c q_{1,0})\,k^2 + \left[\varkappa\left(\varkappa a_{1,0}^2 f_{1,0} + 2a_{1,0}\,c q_{1,0} -\right.\right.\\ & \left. - b_{1,0} c r_{1,0}\right) + \left(b_{1,0} c g_{1,0} + a_{1,0}^2 f_{1,0} \sin\theta\right)\sin\theta\Big]\,k -\\ & - a_{1,0} c\,(a_{1,0} q_{1,0} - b_{1,0} r_{1,0}) = 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\gamma = 5/3$ и предположим, что теплопроводностью можно пренебречь ($\chi = 0$). Тогда уравнение (4.3) становится квадратным уравнением

$$(4.4)\qquad c q_{1,0} k^2 - \varkappa(2a_{1,0} q_{1,0} - b_{1,0} r_{1,0})k + a_{1,0}(a_{1,0} q_{1,0} - b_{1,0} r_{1,0}) = 0$$

с коэффициентами

$$r_{1,0} = -B_{1,0}[(3/2 - n_{1,0}\sin^2\theta/\mathrm{M}^2)u_{1,0} + \sin^2\theta/\mathrm{M}],$$

$$q_{1,0} = \frac{5}{4} p_{1,0} + B_{1,0}^2 - \mathrm{M} u_{1,0}\left(\frac{3}{2} + \frac{B_{1,0} b_{1,0}}{\mathrm{M}^2}\right),$$

$a_{1,0}$, $b_{1,0}$, c такие же, как в (4.2).

В невозмущенном состоянии

$$a_0 = \mathrm{M}(1 - \sin^2\theta/\mathrm{M}^2) > 0,\ b_0 = \cos\theta > 0,$$
$$r_0 = -(3/2)\mathrm{M}\cos\theta < 0,\ q_0 = -(3/2)M^2 < 0.$$

Поэтому последовательность Рауса (см., например, [16]) для уравнения (4.4)

$$\{c q_0, - \varkappa(2a_0 q_0 - b_0 r_0),\ a_0(a_0 q_0 - b_0 r_0)\}$$

в невозмущенной точке 0 имеет знаки $\{-, +, -\}$ при любых параметрах. Этим двум переменам знака, согласно критерию Рауса, соответствуют два корня с положительной вещественной частью, и интегральная кривая системы (2.2) всегда может войти в точку 0 (напомним, что невозмущенное состояние плазмы выбрано при $x < 0$).

В возмущенном состоянии

$$a_1 = \mathrm{M}(1 - n_1\sin^2\theta/\mathrm{M}^2) > 0,$$
$$b_1 = n_1^2\{\cos\theta + [(B_1 - \cos\theta)/\mathrm{M}^2]\sin^2\theta\} > 0,$$
$$r_1 = -(3/2)B_1 u_1 < 0,$$
$$q_1 = (5/4)\,p_1 + B_1^2 - \mathrm{M} u_1(3/2 + B_1 b_1/\mathrm{M}^2)$$

и число перемен знака в последовательности Рауса зависит от знака величины q_1. Если $q_1 > 0$, то имеем $\{+, -, +\}$, что соответствует двум корням с положительной вещественной частью в особой точке 1, и интегральная кривая не может выйти из точки 1 (напомним, что возмущенное состояние плазмы выбрано при $x > 0$). Если $q_1 < 0$, то имеем $\{-, -, +\}$, что соответствует наличию одного отрицательного корня и интегральная кривая может выйти из точки 1. Таким образом, переход от непрерывных решений к разрывным осуществляется при параметрах, когда $q_1 = 0$. Эти критические параметры представлены в табл. 1.

Таблица 1

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
M	2,76	2,741	2,677	2,575	2,439	2,277	2,097	1,907	1,716	1,530
n_1	2,66	2,661	2,654	2,641	2,623	2,596	2,558	2,506	2,435	2,342
B_1	2,66	2,638	2,564	2,445	2,286	2,096	1,882	1,657	1,432	1,217
p_1	3,42	3,388	3,241	3,011	2,722	2,397	2,060	1,740	1,451	1,20
T_1	1,28	1,273	1,221	1,140	1,038	0,923	0,806	0,696	0,596	0,512

При учете теплопроводности необходимо исследовать число перемен знака в последовательности Рауса для уравнения (4.3)

$$\{A,\ B,\ C - AD/B,\ D\},$$

где A, B, C, D — коэффициенты уравнения (4.3) в порядке убывания степени k. В особой точке 0 имеем $\{-, +, -, +\}$, этим трем переменам знака соответствуют три корня с положительной вещественной частью и интегральная кривая всегда может войти в точку 0. В особой точке 1, как показывает анализ, последовательность Рауса имеет знаки $\{-, -, +, -\}$ при числах Маха, меньших некоторого значения $M_*(\theta)$, и $\{+, -, +, -\}$ при $M > M_*(\theta)$, т. е. в первом случае интегральная кривая может выйти из точки 1, поскольку есть один отрицательный корень характеристического уравнения (4.3), а во втором — не может, поскольку уравнение (4.3) не имеет ни одного корня с отрицательной вещественной частью. Этот переход имеет место, когда коэффициент f_1 обращается в нуль. Полученные таким образом критические параметры при наличии теплопроводности представлены в табл. 2. Учет теплопроводности приводит к увеличению критического числа Маха для всех углов θ, причем эта разница уменьшается с увеличением угла θ. Интересно отметить, что, как и в случае ударных волн, распространяющихся поперек магнитного поля и рассмотренных в [10—12], для косых волн при критических параметрах имеем $p_1 = 2Mu_1$ или (в размерных переменных) $u_1 = (T_1/m_i)^{1/2}$, т. е. продольная скорость плазмы за волной (в системе координат, связанной с волной) равна скорости ионного звука за волной.

Таблица 2

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
M	3,464	3,431	3,334	3,177	2,970	2,724	2,454	2,175	1,904	1,652
n_1	3,00	2,999	2,994	2,986	2,974	2,954	2,926	2,884	2,821	2,732
B_1	3,00	2,968	2,875	2,723	2,523	2,282	2,015	1,737	1,463	1,209
p_1	8,00	7,852	7,423	6,759	5,933	5,024	4,116	3,282	2,570	2,00
T_1	2,667	2,618	2,479	2,263	1,995	1,700	1,407	1,138	0,911	0,732

5. Ударные волны включения. Рассмотрим отдельно ударные волны, распространяющиеся вдоль невозмущенного магнитного поля (θ = 90°), которые называются ударными волнами включения. Из системы (3.1) в этом случае имеем

(5.1)
$$n_1 = \mathrm{M}^2,\ u_1 = M^{-1},$$
$$p_1 = p_0 + 2(\mathrm{M}^2 - 1) - B_1^2,$$
$$[\gamma p_0/(\gamma - 1) + \mathrm{M}^2]\,\mathrm{M}^2 = \gamma p_1/(\gamma - 1) + 1 + B_1^2.$$

Считая, как и прежде, $p_0 \ll 1$, $\gamma = 5/3$, получим простую связь между магнитным полем за волной и числом Маха (либо плотностью)

(5.2)
$$B_1^2 = (2/3)(5\mathrm{M}^2 - \mathrm{M}^4 - 4) = (2/3)\left(5n_1 - n_1^2 - 4\right).$$

При отсутствии теплопроводности, как и для косых волн, переход от непрерывных решений к разрывным происходит при критических параметрах, которые определяются из уравнения

$$q_1 = (5/4)p_1 - (3/2) = 0,$$

откуда, используя (5.1), (5.2), получаем уравнение для критического числа Маха M_*

$$5\mathrm{M}_*^4 - 10\mathrm{M}_*^2 - 4 = 0.$$

Таким образом, для ударных волн включения при $\chi = 0$ критические параметры равны

$$\mathrm{M}_* = (1 + 3/\sqrt{5})^{1/2} \approx 1{,}53,\quad n_{1*} = 1 + 3/\sqrt{5} \approx 2{,}34,\quad B_{1*} = [1{,}2(\sqrt{5} - 1)]^{1/2} \approx 1{,}22,\quad p_{1*} = 1{,}2.$$

Если принять во внимание теплопроводность ($\chi \neq 0$), то число перемен знака в последовательности Рауса зависит от знака коэффициента $f_1 = \chi_1(p_1 - 2\mathrm{M}u_1)/\mathrm{M}$ в характеристическом уравнении. Критическое число Маха определяется из уравнения $\mathrm{M}_*^4 - 2\mathrm{M}_*^2 - 2 = 0$, и критические параметры ударных волн включения с учетом теплопроводности равны

$$\mathrm{M}_* = (1 + \sqrt{3})^{1/2} \approx 1{,}65,\quad n_{1*} = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73,\quad B_{1*} = [2(\sqrt{3} - 1)]^{1/2} \approx 1{,}21,\quad p_{1*} = 2.$$

6. Численное решение уравнений структуры. Основной целью расчетов является получение структуры ударных волн при параметрах, близких к критическим. По мере приближения к критическим параметрам профили магнитного поля и температуры имеют достаточно большую ширину, которая определяется значениями $\varkappa$ и χ, а ширина профилей плотности и продольной скорости резко уменьшается. Это обстоятельство приводит к некоторым трудностям. Поэтому предлагается метод численного решения уравнений структуры, который может быть с успехом использован во всей области изменения параметров вплоть до критических.

Полагая в уравнениях (2.2) $\beta = 0$, получим следующую систему уравнений, которая далее решается численно:

(6.1) $dH/dx = E(H, B, u)$, $dB/dx = F(H, B, u)$, $du/dx = G(H, B, u)$, где

$$E = (1/c)[\varkappa(\mathrm{M}H - nv\sin\theta) - (\mathrm{M}B - nw\sin\theta - \mathrm{M}n\cos\theta)\sin\theta];$$

$$F = (1/c)[(\mathrm{M}H - nv\sin\theta)\sin\theta + \varkappa(\mathrm{M}B - nw\sin\theta - \mathrm{M}n\cos\theta)];$$

$$G = [\mathrm{M}/\chi(p - 2\mathrm{M}u)]\{(uE/\mathrm{M})[(2\chi - \varkappa)H + B\sin\theta] + (uF/\mathrm{M})[(2\chi - \varkappa)B - H\sin\theta] + (1/2)\mathrm{M}(u^2 + v^2 + w^2) + u[(5/4)p + H^2 + B^2] - (vH + wB)\sin\theta - C_2\}.$$

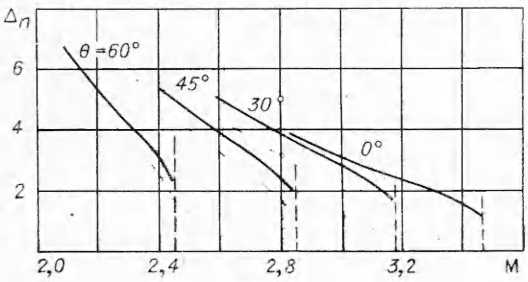
Пренебрежение дисперсионными членами, связанными с инерцией электронов и пропорциональными β, возможно в случае $0 \leqslant \theta \leqslant \sqrt{\beta}$ только при достаточно больших значениях $\varkappa$ (большая диссипация), а в случае $\theta > \sqrt{\beta}$ возможно всегда.

В уравнениях (6.1) перейдем от пространственного аргумента x к длине дуги s функции $u(x)$ по формуле $ds = \sqrt{1 + (du/dx)^2}dx$. Тогда вместо системы (6.1) получаем следующую систему:

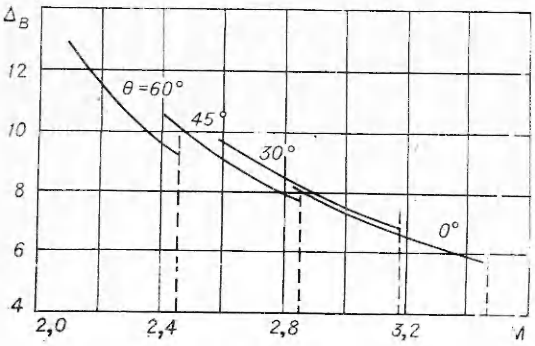
$$(6.2)\quad dH/ds = E(1 + G^2)^{-1/2},\ dB/ds = F(1 + G^2)^{-1/2},\ du/ds = G(1 + G^2)^{-1/2},$$
$$dx/ds = (1 + G^2)^{-1/2}.$$

Переход к аргументу s позволяет использовать любой из методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным шагом интегрирования.

Как следует из анализа особых точек (п. 4), численное решение уравнений структуры нужно начинать из окрестности особой точки 1, выбирая в качестве начальных условий решение линейной системы (4.1), соответствующее единственному отрицательному корню характеристического уравнения (4.3) в точке 1.

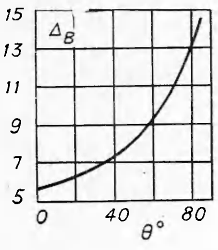


Фиг. 1

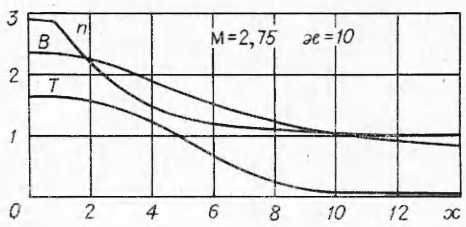


Фиг. 2

Результаты решения системы уравнений (6.2) представлены на фиг. 1—5. На фиг. 1, 2 дана зависимость ширины профиля плотности $\Delta_n = (n_1 - 1)/|dn/dx|_{\max}$ и магнитного поля $\Delta_B = (B_1 - \cos\theta)/|dB/dx|_{\max}$ от числа Маха при различных углах θ. Характер изменения ширины профиля плотности качественно один и тот же — ее резкое уменьшение происходит только в окрестности критического числа Маха $\mathrm{M}_*(\theta)$. Ширина профиля магнитного поля Δ_B при $\mathrm{M} \to \mathrm{M}_*(\theta)$ стремится к некоторому пределу Δ_B^*, который возрастает с увеличением $\varkappa$ и θ. Зависимость $\Delta_B^*(\theta)$ при фиксированном значении $\varkappa$ представлена на фиг. 3. На фиг. 4, 5 приведены профи-



Фиг. 3

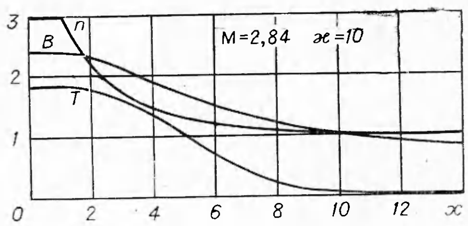


Фиг. 4

ли плотности, магнитного поля и температуры в ударной волне, распространяющейся под углом $\theta = 45°$, при разных состояниях плазмы за волной. Из этих графиков видно, что при $M \to M_*$ крутизна профиля плотности увеличивается.

Как показывает анализ уравнений структуры при $M < M_*$, в зависимости от величины частоты столкновений $\varkappa$ ударная волна может иметь монотонную (при $\varkappa \geqslant \varkappa_*$) либо осцилляторную (при $\varkappa < \varkappa_*$) структуру, где

$$\varkappa_* = \left[\frac{4(M^2-1)(M^2-\sin^2\theta)\sin^2\theta}{(2M^2-1-\sin^2\theta)^2-4(M^2-1)(M^2-\sin^2\theta)}\right]^{1/2}.$$



Фиг. 5

Характер особой точки 0 изменяется, когда дискриминант уравнения (4.4) меняет знак; из этого условия и получена формула для $\varkappa_*$. Отсюда следует, что частота столкновений $\varkappa_*$ возрастает с увеличением числа Маха M и угла θ.

Поступила 24 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hoffman F., Teller E.** Magnetohydrodynamic shocks.—«Phys. Rev.», 1950, vol. 80, N 4.
2. **Bazer J., Ericson W.** Hydromagnetic shocks.—«Astrophys. J.», 1959, vol. 129, N 3.
3. **Shercliff J. A.** One-dimensional magnetohydrodynamics in oblique fields.—«J. Fluid Mech.», 1960, vol. 9, pt. 4.
4. **Marshall W.** The structure of magnetohydrodynamic shock waves.—«Proc. Roy. Soc.», 1955, vol. 233 A.
5. **Куликовский А. Г., Любимов Г. А.** Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
6. **Половин Р. В.** Ударные волны в магнитной гидродинамике.—«Усп. физ. наук», 1960, т. 72, № 1.
7. **Anderson E.** Magnetohydrodynamic shock waves. M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.
8. **Сагдеев Р. З.** Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
9. **Morton K. W.** Finite amplitude compression waves in a collision-free plasma.—«Phys. Fluids», 1964, vol. 7, N 11.
10. **Woods L. C.** Critical Alfven — Mach numbers for transverse field MHD shocks.— «Plasma Physics», 1969, vol. 11, N 1.
11. **Березин Ю. А.** Изучение структуры ударных волн в плазме.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 1. Новосибирск, изд. Вычисл. центра СО АН СССР, 1970, № 6.

12. **Березин Ю. А., Дудникова Г. И.** Влияние теплопроводности на структуру и критические параметры ударных волн в плазме.— ПМТФ, 1972, № 2.
13. **Березин Ю. А.** К теории волн конечной амплитуды в разреженной плазме. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1966.
14. **Дудникова Г. И.** Нестационарные ударные волны в разреженной плазме.— ПМТФ, 1973, № 3.
15. **Robson A. E.** Experiments on oblique shock waves.—«Proc. Study Group ESRIN», Frascati, 1969.
16. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., «Наука», 1967.

УДК 533.6.011

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЗАДАЧИ ОБ ОСТЫВАНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ОБЪЕМА НЕРАВНОВЕСНО-ИОНИЗОВАННОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГЕЛИЯ

С. П. Попов

(*Москва*)

Излагается методика и приводятся результаты численных расчетов системы уравнений нестационарной газовой динамики, переноса излучения в сплошном спектре и кинетики столкновительной ионизации и ионизации излучением, описывающих разлет и охлаждение сферического объема He. Проведено сопоставление с расчетами, выполненными в предположении термодинамического равновесия.

Условные обозначения

u — скорость газа; ρ — плотность; p — давление; E — полная энергия; e — внутренняя энергия; q — потери энергии веществом при излучении; T — температура электронов и атомов; α_0, α_1, α_2, α_e — соответственно неравновесные концентрации атомов, одно- и двукратно ионизованных атомов, электронов; α_{0p}, α_{1p}, α_{2p}, α_{ep} — равновесные значения этих концентраций; K_1, K_2 — константы ионизационного равновесия; I_1, I_2 — потенциалы ионизации He; g_0, g_1, g_2 —соответствующие статистические веса; $I(\nu, \Omega)$ — спектральная интенсивность излучения в единичном частотном интервале на единицу телесного угла; $I_p(\nu)$ — ее равновесное значение; ν — частота излучения; $d\nu$ — частотный интервал; $d\Omega$ — элемент телесного угла; N_0 — число Лошмидта; M — масса атома; v — средняя тепловая скорость электронов; σ_0, σ_1 — сечения столкновительной ионизации атомов и однократно заряженных ионов; $\sigma_{0\nu}$ — сечение фотоионизации атомов ($\varkappa_{0\nu}$ — соответствующий спектральный линейный коэффициент поглощения); $\sigma_{1\nu}$ — сечение фотоионизации однократно заряженных ионов ($\varkappa_{1\nu}$); σ_{0e}, σ_{1e}, σ_{2e} — сечения тормозного поглощения электронами соответственно в поле атома, одно- и двукратно заряженных ионов ($\varkappa_{0e}$, $\varkappa_{1e}$, $\varkappa_{2e}$).

При изучении нестационарных газодинамических явлений в реальных газах необходимо учитывать соотношение между скоростями изменения $v_м$ макроскопических параметров E, ρ, u и скоростями $v_р$ процессов, ведущих к установлению термодинамического равновесия (ионизации, возбуждения и т. д.). Во многих задачах в областях непрерывных течений