ПМТФ, № 3, 1963

ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(_Москва_)

В работах [1, 2] было введено понятие инвариантно-группового решения (Н-решения) и разработан общий метод получения таких решений. В ряде работ [2-6] этот метод был применен к системам дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих различные физические явления. Ниже исследуются групповые свойства уравнений стационарного нормального пучка одноименно заряженных частиц в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле как при нерелятивистских скоростях, так и в релятивистском случае, когда излучением движущихся зарядов можно пренебречь.

§ 1. Основные уравнения. Нормальный [7] нерелятивистский пучок заряженных частиц в стационарном случае в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле H описывается системой дифференциальных уравнений, которая в тензорной форме имеет вид

$$v^k\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\Gamma_{pk}^{\,i}v^p\right)=g^{il}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}+\sqrt{g}\,e_{mnl}v^mH^n\right)\tag{1.1}$$

(S)

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\rho v_k\right)=0,\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)=\rho$$

Уравнения (1.1) записаны в безразмерном виде [6]; все индексы пробегают значения 1, 2, 3; при этом приняты следующие обозначения: v^k, H^n — контравариантные компоненты скорости и напряженности магнитного поля; φ — скалярный потенциал; ρ — плотность пространственного заряда; $\Gamma_{pk}^{\,i}$ — символ Кристоффеля второго рода; e_{mnl} — ковариантный изотропный псевдотензор веса 1 и, наконец, g^{ik} — контравариантный метрический тензор ($g=|g_{ik}|$).

Как будет видно из дальнейшего, Н-решения получаются в четырех ортогональных системах координат: декартовой x, y, z; цилиндрической R, ψ, z; спиральной цилиндрической q_1, q_2, z; сферической r, θ, ψ. Уравнения пучка могут быть записаны в каждой из этих координатных систем. Уравнения движения имеют интеграл

$$2\varphi-g_{ik}v^iv^k=\mathrm{const}\tag{1.2}$$

Внешнее магнитное поле H удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}H_k\right)=0\tag{1.3}$$

Для магнитных полей, которые могут существовать без специальных поддерживающих устройств в пучке, имеет место еще одно уравнение

$$e^{ikl}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}=0\tag{1.4}$$

§ 2. Групповые свойства уравнений пучка. Решение определяющих уравнений для координат инфинитезимальных операторов основной группы G уравнений пучка (1.1) показывает, что алгебра Ли основной группы порождается следующими линейно независимыми операторами:

$$
(G)\qquad
\begin{aligned}
&X_1 = \mathbf{r}\nabla + \alpha\left(\mathbf{V}\nabla_v + 2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + (\alpha - 1)\left(2\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{H}\nabla_{\text{н}}\right)\\
&X_2 = \mathbf{r}\nabla - 2\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \mathbf{H}\nabla_{\text{н}} \qquad (\alpha = 0)\\
&X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v} - H_y\frac{\partial}{\partial H_x} + H_x\frac{\partial}{\partial H_y}\\
&X_4 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} - w\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial w} - H_z\frac{\partial}{\partial H_x} + H_x\frac{\partial}{\partial H_z}\\
&X_5 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} - w\frac{\partial}{\partial v} + v\frac{\partial}{\partial w} - H_z\frac{\partial}{\partial H_y} + H_y\frac{\partial}{\partial H_z}\\
&X_6 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_7 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_8 = \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь ∇, ∇_v, $\nabla_{\text{н}}$ — операторы Гамильтона в пространстве координат, скоростей и компонент напряженности магнитного поля, соответственно. Перечисленным инфинитезимальным операторам соответствуют следующие конечные преобразования, сохраняющие систему (1.1): оператор X_1 — растяжение с произвольным параметром α; оператор X_2 — растяжение с $\alpha = 0$; операторы X_3, X_4, X_5 — одновременный поворот на одинаковый угол в одной из плоскостей координатного пространства x, y, z и соответствующих ей плоскостях пространства скоростей u, v, w и пространства компонент магнитного поля H_x, H_y, H_z; наконец, операторы X_6, X_7, X_8 — переносы вдоль осей x, y, z. Оптимальная система двухпараметрических подгрупп, обеспечивающая отыскание всех существенно различных Н-решений ранга 1, имеет вид

1°. X_7, X_8	4°. $X_1 - X_2 + X_3$, X_8	7°. $X_1 - X_2 + X_8$, X_3		(2.2)
2°. X_3, X_8	5°. $X_1 - X_2 + X_7$, X_8	8°. $X_1 - X_2 + X_3$, $X_1 - X_2 + X_8$		
3°. $X_1 + aX_3$, X_8	6°. X_1, X_3	9°. $X_1 - X_2 + X_3$, X_1,	10°. X_3, X_4	

(a — произвольная постоянная)

§ 3. Инвариантно-групповые решения ранга 1. Если магнитное поле направлено по оси z, то Н-решения, полученные на подгруппах 1°-5° системы (2.2), соответствуют плоским течениям, рассмотренным в [6]. В случае произвольной ориентации магнитного поля вид решения не меняется, однако течение становится пространственным. Следует отметить, что приводимые ниже аналитические решения для течений с двумя компонентами скорости получаются в предположениях, сводящих систему (S / H) для соответствующего Н-решения к уравнению вида (3.1), из которого были получены аналитические решения для плоских течений [6]

$$
y'' + a^2 y = y^{-\sigma} \qquad (0 < \sigma < 1) \tag{3.1}
$$

1°. Для подгруппы Н $\langle X_7, X_8\rangle$ решение имеет вид

$$
\mathbf{V} = \mathbf{J}^{(1)}(x), \qquad \varphi = J_4(x), \qquad \rho = J_5(x), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{J}^{(2)}(x) \tag{3.2}
$$

Здесь

$$
\mathbf{V} = \{v_{x^1}, v_{x^2}, v_{x^3}\}, \quad \mathbf{H} = \{H_{x^1}, H_{x^2}, H_{x^3}\}, \quad \mathbf{J}^{(1)} = \{J_1, J_2, J_3\}, \quad \mathbf{J}^{(2)} = \{J_6, J_7, J_8\}
$$

Уравнениям (1.3), (1.4) удовлетворяет однородное магнитное поле.

2°. Для подгруппы Н $\langle X_3, X_8\rangle$ получаем

$$
\mathbf{V} = \mathbf{J}^{(1)}(R), \qquad \varphi = J_4(R), \qquad \rho = J_5(R), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{J}^{(2)}(R) \tag{3.3}
$$

Общее решение (1.3), (1.4) определяет следующее магнитное поле:

$$H_R = H_{01} / R, \qquad H_\psi = H_{02} / R, \qquad H_z = H_{03} \tag{3.4}$$

3°.1. Для подгруппы H $\langle X_1 + aX_3,\ X_8\rangle$ рассмотрение естественно вести в спиральной цилиндрической системе координат q_1, q_2, z; при этом

$$\mathbf{V} = e^{\gamma q_2}\mathbf{J}^{(1)}(q_1), \qquad \varphi = e^{2\gamma q_2} J_4(q_1) \qquad (\gamma = \alpha b_2) \tag{3.5}$$

$$\rho = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} e^{2(\gamma - b_2)q_2 - 2b_1 q_1} J_5(q_1), \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} e^{(\gamma - b_2)q_2 - b_1 q_1}\mathbf{J}^{(2)}(q_1)$$

Рассмотрим случай, когда $J_2 \equiv 0$. Полагая дополнительно

$$J_1 = \varkappa e^{-b_1 q_1} J_4^{\sigma} \qquad (0 < \sigma < 1) \tag{3.6}$$

получим следующее решение:

$$J_4 = \left[\frac{j_0}{2\varkappa(1-\sigma)\gamma^2}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} \{\sin[\gamma(1+\sigma)(q_1 - q_0)]\}^{\frac{2}{1+\sigma}}, \qquad J_1 J_5 = j_0 e^{-b_1 q_1}$$

$$J_4 = \left[\frac{j_0(1+\sigma)^2}{2\varkappa(1-\sigma)}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} (q_1 - q_0)^{\frac{2}{1+\sigma}} \quad (\gamma = 0), \qquad J_3 = (2J_4 - J_1^2)^{1/2} \tag{3.7}$$

$$J_6 = -\gamma J_3, \qquad J_7 = J_3', \qquad J_8 = (\gamma + b_2) J_1$$

Возможные значения $\varkappa$ в (3.6) определяются неравенством

$$\varkappa < \sqrt{2} e^{b_1 q} \qquad (a \leqslant q_1 \leqslant b; \quad q = a, \quad b_1 < 0; \quad q = b, \quad b_1 > 0) \tag{3.8}$$

При приближении к эмиттеру тангенциальная компонента магнитного поля неограниченно возрастает; $J_6, J_8 \to 0$ при $q_1 \to q_0$. Частицы, покидая спиральный цилиндрический эмиттер $q_1 = q_0$, движутся по поверхности спирального цилиндра $q_2 = \text{const}$; при $\sigma = 1/2$ траектории будут

$$z = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{2b_1} e^{b_2 q_2}\left[e^{b_1 q_1}\sqrt{2e^{2b_1 q_1} - \varkappa^2} - \frac{\varkappa^2}{\sqrt{2}} \ln\left(e^{b_1 q_1} + \sqrt{e^{2b_1 q_1} - \varkappa^2/2}\right) + C\right] \tag{3.9}$$

В данном случае, как и везде дальше, удовлетворяются условия эмиссии, ограниченной пространственным зарядом.

Уравнениям (1.3), (1.4) удовлетворяет следующее магнитное поле:

$$H_{q_1} = -H_{01} e^{(\gamma - b_2)q_2 - b_1 q_1} \sin(\gamma q_1 + \delta), \qquad H_{q_2} = H_{01} e^{(\gamma - b_2)q_2 - b_1 q_1} \cos(\gamma q_1 + \delta),$$

$$H_z = H_{03} \qquad (H_{01},\ H_{03},\ \delta \text{ — произвольные постоянные}) \tag{3.10}$$

При этом H_{03} может быть отличным от нуля лишь при $\alpha = 1$.

3°.2. Для подгруппы H $\langle X_1,\ X_8\rangle$ имеем

$$\mathbf{V} = R^{\alpha}\mathbf{J}^{(1)}(\psi), \quad \varphi = R^{2\alpha} J_4(\psi), \quad \rho = R^{2(\alpha-1)} J_5(\psi), \quad \mathbf{H} = R^{\alpha-1}\mathbf{J}^{(2)}(\psi) \tag{3.11}$$

Полагая $J_1 \equiv 0$, $J_2 = \varkappa J_4^{\sigma}$ $(0 < \sigma < 1,\ 0 < \varkappa \leqslant \sqrt{2})$, получаем

$$J_4 = \left[\frac{j_0}{2\varkappa(1-\sigma)\alpha^2}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} \{\sin[\alpha(1+\sigma)\psi]\}^{\frac{2}{1+\sigma}}, \qquad J_4 = \left[\frac{j_0(1+\sigma)^2}{2\varkappa(1-\sigma)}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} \psi^{\frac{2}{1+\sigma}} \quad (\alpha = 0)$$

$$J_2 J_5 = j_0, \qquad J_3 = (2J_4 - J_2^2)^{1/2}, \qquad J_6 = -J_3', \qquad J_7 = \alpha J_3 + a$$

$$J_8 = -(\alpha + 1) J_2 + a\frac{J_3}{J_2} \tag{3.12}$$

При $\sigma = 1/2$ и $\varkappa = \sqrt{2}$ данное решение описывает плоское течение с круговыми траекториями [6]. При $\varkappa < \sqrt{2}$ траектории размещены на поверхности цилиндра $R = \text{const}$. Эмиттером является полуплоскость $\psi = 0$. При $\sigma = 1/2$ траектории определяются уравнениями

$$R = \text{const}, \qquad z = \frac{\sqrt{2-\varkappa^2}}{\varkappa} R\psi + \text{const} \tag{3.13}$$

Уравнениям (1.3), (1.4) удовлетворяет следующее магнитное поле:

$$\begin{aligned} &H_R = H_{01}R^{\alpha-1}\sin(\alpha\psi+\delta), \quad H_\psi = H_{01}R^{\alpha-1}\cos(\alpha\psi+\delta), \quad H_z \equiv 0 \\ &H_R = H_{01}\sin(\psi+\delta), \quad H_\psi = H_{01}\cos(\psi+\delta), \quad H_z = H_{03} \quad (\alpha = 1) \end{aligned} \tag{3.14}$$

При $\alpha = 1$ получаем однородное магнитное поле $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}_0$. Легко видеть, что $\delta = \pi/2 - \beta$, где β — угол между проекцией вектора $\mathbf{H}$ на плоскость $z = \text{const}$ и эмиттером $\psi = 0$.

4°. Для подгруппы H $\langle X_1 - X_2 + X_3, X_8\rangle$ имеем

$$\mathbf{V} = e^{\alpha\psi}\,\mathbf{J}^{(1)}(\xi), \quad \varphi = e^{2\alpha\psi}J_4(\xi), \quad \rho = e^{2\alpha\psi}J_5(\xi), \quad \mathbf{H} = e^{\alpha\psi}\,\mathbf{J}^{(2)}(\xi) \tag{3.15}$$

Полагая $J_2 \equiv 0$ и $J_1 = \varkappa e^{-1/R}J_4^{\sigma}$ $(0 < \sigma < 1)$, получим

$$\begin{aligned} &J_4 = \left[\frac{j_0}{2\varkappa(1-\sigma)\alpha^2}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}\{\sin[\alpha(1+\sigma)\xi]\}^{\frac{2}{1+\sigma}}, \qquad J_1I_5 = j_0\exp\left(-\frac{1}{R}\right) \\ &J_3 = (2J_4 - J_1^2)^{1/2}, \quad I_6 = -\alpha J_3 + a, \quad I_7 = J_3', \quad I_8 = \alpha J_1 + a\frac{J_3}{J_1} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь

$$\xi = \ln R, \qquad \mathbf{I}^{(2)} = R\,\mathbf{J}^{(2)}, \qquad I_5 = R^2J_5, \qquad a = \text{const}$$

Данное решение описывает течение, в котором частицы эмиттируются с поверхности цилиндра $R = 1$. Частицы движутся в плоскостях, проходящих через ось эмиттера, по кривым $(\sigma = 1/2)$

$$\psi = \text{const}, \qquad z = \int\left(\frac{2}{\varkappa^2}\exp\frac{2}{R} - 1\right)^{1/2} dR \tag{3.17}$$

Уравнениям (1.3), (1.4) удовлетворяет магнитное поле вида

$$H_R = -\frac{H_0}{R}e^{\alpha\psi}\sin(\alpha\xi+\delta), \qquad H_\psi = \frac{H_0}{R}e^{\alpha\psi}\cos(\alpha\xi+\delta), \qquad H_z \equiv 0 \tag{3.18}$$

5°. Для подгруппы H $\langle X_1 - X_2 + X_7, X_8\rangle$ получаем

$$\mathbf{V} = e^{\alpha y}\,\mathbf{J}^{(1)}(x), \quad \varphi = e^{2\alpha y}J_4(x), \quad \rho = e^{2\alpha y}J_5(x), \quad \mathbf{H} = e^{\alpha y}\,\mathbf{J}^{(2)}(x) \tag{3.19}$$

Полагая $J_2 \equiv 0$, $J_1 = \varkappa J_4^{\sigma}$ $(0 < \sigma < 1,\ 0 < \varkappa \leqslant \sqrt{2})$, получим

$$\begin{aligned} &J_4 = \left[\frac{j_0}{2\varkappa(1-\sigma)\alpha^2}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}\{\sin[\alpha(1+\sigma)x]\}^{\frac{2}{1+\sigma}}, \qquad J_1J_5 = j_0 \\ &J_3 = (2J_4 - J_1^2)^{1/2}, \quad J_6 = -\alpha J_3 + a, \quad J_7 = J_3', \quad J_8 = \alpha J_1 + a\frac{J_3}{J_1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Решение (3.20) является обобщением рассмотренного ранее решения [6]. При $\sigma = 1/2$ частицы движутся по прямым, наклоненным к эмиттеру $x = 0$ под углом ϑ $(\operatorname{tg}\vartheta = \varkappa/\sqrt{2-\varkappa^2})$.

Уравнениям (1.3), (1.4) удовлетворяет магнитное поле вида

$$H_x = -H_0e^{\alpha y}\sin(\alpha x+\delta), \qquad H_y = H_0e^{\alpha y}\cos(\alpha x+\delta), \qquad H_z \equiv 0 \tag{3.21}$$

Таким образом, рассмотрены те подгруппы, на которых в случае, когда магнитное поле направлено по оси z, возможно построение H-решений, описывающих плоские течения [6]. Уравнениям (1.3), (1.4) удовлетворяет лишь однородное магнитное поле, которое допускается первыми четырьмя из рассмотренных подгрупп. Для двух последних из них магнитное поле может быть однородным при $\alpha = 1$. Магнитные поля вида $e^{\alpha\psi}J(R)$ и $e^{\alpha y}\bar{J}(x)$, где $J \not\equiv 0$, не реализуются без некоторых дополнительных мер.

Пусть имеем плоское течение в однородном магнитном поле. Изменим направление вектора **H**. При этом течение станет пространственным. Как следует из приведенного выше, вид решения не изменится лишь для подгрупп $H\langle X_7, X_8\rangle$ и $H\langle X_1, X_8\rangle$.

6°. Для подгруппы $H\langle X_1, X_3\rangle$ имеем

$$\mathbf{V} = r^\alpha \mathbf{J}^{(1)}(\theta), \quad \varphi = r^{2\alpha}J_4(\theta), \quad \rho = r^{2(\alpha-1)}J_5(\theta), \quad \mathbf{H} = r^{\alpha-1}\mathbf{J}^{(2)}(\theta) \tag{3.22}$$

Рассмотрим случай, когда

$$J_1 = kJ_2, \qquad J_2 = \varkappa e^{-3\alpha k\theta}\sqrt{J_4}, \qquad J_4 = (j_0/\varkappa)^{2/3}J \tag{3.23}$$

Решение системы (S / H) сведется при этом к решению уравнения

$$J'' + \operatorname{ctg}\theta J' + 2\alpha(2\alpha+1)J = J^{-1/2}\csc\theta \tag{3.24}$$

При $\alpha(2\alpha+1) = 1$ уравнение (3.24) совпадает с уравнением, полученным в [8] для азимутального электростатического течения с конического эмиттера (однокомпонентное течение в θ-направлении). Функция J для этого случая затабулирована [8]. Таким образом, получаем готовые численные решения для двух следующих течений:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{r}\mathbf{J}^{(1)}(\theta), \quad \varphi = \frac{1}{r^2}J_4(\theta), \quad \rho = \frac{1}{r^4}J_5(\theta), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{r^2}\mathbf{J}^{(2)}(\theta) \qquad (\alpha = -1)$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{r}\,\mathbf{J}^{(1)}(\theta), \quad \varphi = rJ_4(\theta), \quad \rho = \frac{1}{r}J_5(\theta), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{J}^{(2)}(\theta) \qquad (\alpha = 1/2)$$

Соответствующее магнитное поле и ψ-компонента скорости определяются выражениями

$$J_6 = -J_3' - \operatorname{ctg}\theta J_3 + ake^{-(\alpha+1)k\theta}, \qquad J_7 = (\alpha+1)J_3 + ae^{-(\alpha+1)k\theta}\csc\theta$$

$$J_8 = kJ_2' - (\alpha+1)J_2 + ae^{-(\alpha+1)k\theta}\csc\theta\,\frac{J_3}{J_2}, \qquad J_2J_5 = j_0e^{-3\alpha k\theta}\csc\theta \tag{3.25}$$

$$J_3 = [2 - (1+k^2)\varkappa^2e^{-6\alpha k\theta}]^{1/2}\sqrt{J_4}$$

Видно, что ψ-компонента скорости исчезает при значении $\varkappa$, равном $\sqrt{2/(1+k^2)}$, и если α (или k) равна нулю. Частицы, покидая конический эмиттер $\theta = \theta_0$, движутся по поверхности $\ln r - k\theta = \mathrm{const}$, получаемой от вращения спирали вокруг оси z. При $\varkappa$, равном указанному значению, и $\alpha = 0$ траекториями являются плоские спирали, ибо при этом $\psi = \mathrm{const}$ для частицы. Интересно, что эквипотенциальными поверхностями в этом случае будут конусы $\theta = \mathrm{const}$. При $k = 0$ частица, покидающая эмиттер в точке с координатами r_0, θ_0, ψ_0, движется по сфере радиуса r_0, причем ее координаты θ, ψ связаны соотношением

$$\psi - \psi_0 = \frac{\sqrt{2-\varkappa^2}}{\varkappa}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \ln\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\right) \tag{3.26}$$

При $k = 0$ и $\varkappa = \sqrt{2}$ получаем однокомпонентные течения в θ-направлении. Решение, приведенное в [8], является частным случаем этой серии решений, когда $\alpha = -1$ и магнитное поле отсутствует. Полагая

$$3\alpha J_1 + \operatorname{ctg}\theta J_2 = 0, \qquad J_2 = \varkappa\sqrt{J_4}\sin\theta \tag{3.27}$$

получим для потенциала уравнение (3.24). Кроме того, имеем

$$J_1 = -\frac{\varkappa}{3\alpha}\sqrt{J_4}\cos\theta, \qquad J_3 = \left[2 - \varkappa^2\left(\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{9\alpha^2}\right)\right]^{1/2}\sqrt{J_4}$$

$$J_6 = -J_3' - \operatorname{ctg}\theta J_3 - \frac{a}{3\alpha}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{(\sin\theta)^\chi}, \qquad J_2J_5 = j_0 \quad \left(\chi = \frac{2\alpha-1}{3\alpha}\right) \tag{3.28}$$

$$J_7 = (\alpha+1)J_3 + \frac{a}{(\sin\theta)^\chi}, \qquad J_8 = J_1' - (\alpha+1)J_2 + \frac{a}{(\sin\theta)^\chi}\frac{J_3}{J_2}$$

Траектории расположены на поверхности фигур вращения

$$r^{3\alpha} \sin\theta = \text{const} \tag{3.29}$$

При $\varkappa = \sqrt{2}$ и $\alpha^2 = {}^1/_9$ скорость в ψ-направлении v_ψ становится нулем. При $\alpha = 1 / 3$ частицы с конического эмиттера $\theta = \theta_0$ движутся по прямым, параллельным оси z. При $\alpha = -1$, $1 / 2$ опять располагаем готовыми численными решениями. При $\mathbf{H} \equiv 0$ течения с конического эмиттера исследовались в работе [9], в которой приведены численные результаты для ряда значений α и θ_0. Течение в этом случае потенциально: $v_i = \partial W / \partial x^i$, где W — действие, отнесенное к массе частицы.

Посмотрим, какие магнитные поля удовлетворяют уравнениям (1.3), (1.4). Для радиальной компоненты J_6 магнитного поля получаем уравнение Лежандра, решением которого являются функции Лежандра первого и второго рода $P_\alpha(\xi)$ и $Q_\alpha(\xi)$. Поскольку $J_6' = \alpha J_7$, то θ-компоненту $\mathbf{H}$ можно выразить через присоединенные функции Лежандра $P_\alpha^1(\xi)$ и $Q_\alpha^1(\xi)$ первого и второго рода степени α и порядка 1. Здесь $\xi = \cos\theta$.

Для J_8 имеем следующую альтернативу:

$$J_8 = H_{03} \csc\theta \quad (\alpha = 0), \qquad J_8 = 0 \quad (\alpha \neq 0) \tag{3.30}$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$ решение уравнений (1.3), (1.4) определяется формулами (3.31)

$$H_r = \frac{H_{01}}{r} = \frac{H_{01}}{r} P_0(\xi), \quad H_\theta = \frac{1}{r}\left(H_{01} \operatorname{ctg}\theta + \frac{H_{02}}{\sin\theta}\right), \quad H_\psi = \frac{H_{03}}{r\sin\theta} \quad (\alpha = 0)$$

$$H_r = \frac{H_0}{r^2} \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -\frac{H_0}{r^2} Q_0(\xi), \quad H_\theta = \frac{H_0}{r^2 \sin\theta}, \quad H_\psi \equiv 0 \quad (\alpha = -1) \tag{3.31}$$

При $\alpha = 1$ и $J_6 = H_0 P_1(\xi)$ имеем

$$H_r = H_0 \cos\theta, \qquad H_\theta = -H_0 \sin\theta, \qquad H_\psi \equiv 0 \tag{3.32}$$

Формулы (3.32) определяют однородное магнитное поле, направленное по оси z, т. е. по оси конического эмиттера $\theta = \theta_0$.

Таким образом, течение вида (3.22) в однородном магнитном поле возможно, когда это поле направлено по оси z. При отклонении $\mathbf{H}$ от этого направления параметры потока не удовлетворяют формулам (3.22).

7°. Для подгруппы H $\langle X_1 - X_2 + X_8, X_3 \rangle$ получаем

$$\mathbf{V} = e^{\alpha z} \mathbf{J}^{(1)}(R), \quad \varphi = e^{2\alpha z} J_4(R), \quad \rho = e^{2\alpha z} J_5(R), \quad \mathbf{H} = e^{\alpha z} \mathbf{J}^{(2)}(R) \tag{3.33}$$

При $\mathbf{H} \equiv 0$ течения вида (3.33) с цилиндрического эмиттера в случае эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, исследовались в [9]. Течение в этом случае потенциально, действие определяется выражением

$$W = e^{\alpha z} J(R) \tag{3.34}$$

Общее решение уравнений (1.3), (1.4) имеет вид

$$H_R = e^{\alpha z} Z_1(\alpha R), \quad H_\psi \equiv 0, \quad H_z = e^{\alpha z} Z_0(2\alpha \sqrt{R}) \quad (Z_\alpha = c_1 J_\alpha + c_2 Y_\alpha) \tag{3.35}$$

Здесь J_α и Y_α — цилиндрические функции первого и второго рода; c_1, c_2 — произвольные постоянные.

8°. Для подгруппы H $\langle X_1 - X_2 + X_3, X_1 - X_2 + X_8 \rangle$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= e^{\alpha\psi+\beta z} \mathbf{J}^{(1)}(R), & \varphi &= e^{2(\alpha\psi+\beta z)} J_4(R) \\ \rho &= e^{2(\alpha\psi+\beta z)} J_5(R), & \mathbf{H} &= e^{\alpha\psi+\beta z} \mathbf{J}^{(2)}(R) \end{aligned} \tag{3.36}$$

При $\mathbf{H} \equiv 0$ решение вида (3.36) рассматривалось в [10]. Вид решения устанавливался методом разделения переменных.

Уравнения (1.3), (1.4) приводят к следующему уравнению:

$$\frac{d^2J_8}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dJ_8}{d\xi}+\left(1-\frac{\nu^2}{\xi^2}\right)J_8=0 \qquad (3.37)$$

Решением (3.37) являются цилиндрические функции первого и второго рода. В рассматриваемом случае $\xi=\alpha R$ и $\nu=i\alpha/\beta$.

9°. Для подгруппы H $\langle X_1-X_2+X_3,\ X_1\rangle$ имеем

$$\mathbf{V}=r^\alpha e^{\beta\psi}\mathbf{J}^{(1)}(\theta),\qquad \varphi=r^{2\alpha}e^{2\beta\psi}J_4(\theta)$$
$$\rho=r^{2(\alpha-1)}e^{2\beta\psi}J_5(\theta),\qquad \mathbf{H}=r^{\alpha-1}e^{\beta\psi}\mathbf{J}^{(2)}(\theta) \qquad (3.38)$$

Решение системы (S / H) для данного H-решения удается заменить интегрированием уравнения вида (3.1) для $\alpha=0$ и $\alpha=-1/2$. Полагая $\alpha=0$, $J_3\equiv 0$ и $J_2=kJ_4{}^\sigma\sin\theta$ $(0<\sigma<1,\ 0\leqslant k\leqslant\sqrt{2})$, получим

$$J_4=\left[\frac{j_0}{2k(1-\sigma)\beta^2}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}\{\sin[\beta(1+\sigma)(\xi-\xi_0)]\}^{\frac{2}{1+\sigma}}\qquad\left(\xi=\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) \qquad (3.39)$$

При $\sigma=1/2$ и $k=\sqrt{2}$ получаем наиболее простые выражения для компонент **V** и **H**

$$J_1=\pm\sqrt{2J_4}\cos\theta,\qquad J_2=\sqrt{2J_4}\sin\theta,\qquad J_6=(2\beta J_4\csc\theta+J_1J_7)/J_2$$
$$J_7=-\beta\csc^2\theta\left[J_1\sin\theta+\int\cos\theta(\csc\theta-1)J_1d\theta\right],\qquad J_8=J_1'-J_2 \qquad (3.40)$$

Траекториями, как следует из (3.40), будут плоские кривые

$$r\sin\theta=\mathrm{const}\quad(J_1=\sqrt{2J_4}\cos\theta),\qquad r\csc\theta=\mathrm{const}\quad(J_1=-\sqrt{2J_4}\cos\theta) \qquad (3.41)$$

Если имеет место первая формула (3.41), то частицы с эмиттера $\theta=\theta_0$ движутся по прямым, параллельным оси z.

Уравнения (1.3), (1.4) приводят к уравнению

$$(1-\xi^2)\frac{d^2I_8}{d\xi^2}-2\xi\frac{dI_8}{d\xi}+\left[\alpha(\alpha+1)-\frac{\mu^2}{1-\xi^2}\right]I_8=0 \qquad (3.42)$$

решением которого являются присоединенные функции Лежандра первого и второго рода. В рассматриваемом случае

$$\mathbf{I}^{(2)}=\sin\theta\,\mathbf{J}^{(2)},\qquad \xi=\cos\theta,\qquad \mu=i\beta$$

При $\alpha=0$ и $\alpha=-1$ находим $(\xi=\ln\operatorname{tg}{}^1/_2\theta)$ (3.43)

$$I_6=\frac{\alpha H_0}{\beta}\sin\theta\cos(\beta\xi+\delta),\quad I_7=-H_0\sin(\beta\xi+\delta),\quad I_8=H_0\cos(\beta\xi+\delta)$$

10°. Для подгруппы H $\langle X_3, X_4\rangle$ получаем

$$v_r=J_1(r),\qquad \varphi=J_4(r),\qquad \rho=J_5(r),\qquad H_r=J_6(r) \qquad (3.44)$$

Радиальное магнитное поле никак не влияет на течение, описываемое формулами (3.44). Решение в рядах системы (S / H), определяющей данное H-решение, приведено в работе [11] для случая эмиссии, ограниченной пространственным зарядом. В работах [12–14] решение системы (S/H) выражено через функции Эйри для различных условий эмиссии.

Таким образом, рассмотрены все существенно различные инвариантно-групповые решения ранга 1 уравнений стационарного пучка заряженных частиц. В работе [4] были приведены примеры H-решений ранга 2, которые строятся на однопараметрических подгруппах, но определяются в конечном счете из системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом такие решения не являются инвариантными относительно какой-либо двухпараметрической подгруппы основной группы G исследуемой системы уравнений в частных производных (S). В нашем случае таких примеров построить не удается. Это объясняется различием между пространственной координатой и временем.

§ 4. **Некоторые замечания.** В настоящей работе исследовались групповые свойства уравнений нормального нерелятивистского пучка заряженных частиц в стационарном случае в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле. Было найдено общее решение системы определяющих уравнений для координат инфинитезимальных операторов, определившее основную группу G уравнений пучка (S). Построение оптимальной системы двухпараметрических подгрупп обеспечило отыскание всех существенно различных H-решений ранга 1. Инвариантно-групповые решения были получены в четырех ортогональных системах координат: декартовой x, y, z; цилиндрической R, ψ, z; спиральной цилиндрической q_1, q_2, z; сферической r, θ, ψ. Декартова и цилиндрическая системы координат являются предельными случаями спиральной цилиндрической системы координат [6].

Выяснению вопроса о тех координатных системах, в которых возможны однокомпонентные течения [15], т. е. течения в направлении одной из координатных осей, при $\mathbf{H} \equiv 0$, был посвящен ряд работ [16-22]. В работах [16-18, 20, 21] была сделана попытка сформулировать необходимые и достаточные условия возможности однокомпонентного течения в x^1-направлении в заданной системе координат x^i $(i = 1, 2, 3)$.

Достаточные условия формулируются как условия, при которых уравнение (4.1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно w

$$f_1 \sqrt{w} \frac{d^2 w}{dx_1^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \sqrt{w} \frac{dw}{dx_1} + f_1 f_2 \sqrt{w}\, w = F(x_2, x_3)$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{h_2 h_3}{h_1^5}, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = h_1^4 \triangle \left(\frac{1}{h_1^2}\right), \qquad w(x_1) = \left(\frac{dW}{dx_1}\right)^2 \tag{4.1}$$

Здесь $h_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ — коэффициенты Ламэ, W — действие, $F(x_2, x_3)$ — некоторая функция. В работе [20] вопрос о приведении уравнения (4.1) к обыкновенному уравнению по сути дела сводится к тому же вопросу для линейного однородного уравнения

$$G(x_1, x_2, x_3) \frac{d^2 w}{dx_1^2} + H(x_1, x_2, x_3) \frac{dw}{dx_1} + K(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{4.2}$$

Окончательно достаточные условия были выписаны лишь в случае двух переменных ξ, η [22]. Вопрос о числе координатных систем, в которых возможны однокомпонентные течения, оставался открытым.

Проведенное в данной работе исследование групповых свойств уравнений пучка позволяет утверждать, что однокомпонентные течения возможны лишь в четырех указанных системах координат. В связи с этим становятся понятными результаты работы [20], в которой было исследовано большое число координатных систем и показано, что однокомпонентные течения в этих системах невозможны. Разделение переменных в уравнениях пучка возможно, по-видимому, лишь в этих четырех системах координат.

Таким образом, частицы могут эмиттироваться со следующих поверхностей:

1) плоскости $x = \mathrm{const}$; 2) круговые цилиндры $R = \mathrm{const}$;
3) полуплоскости $\psi = \mathrm{const}$; 4) спиральные цилиндры $q_1 = \mathrm{const}$ $(q_2 = \mathrm{const})$;
5) сферы $r = \mathrm{const}$; 6) конусы $\theta = \mathrm{const}$.

В работе [22] были выписаны общие выражения для потенциала в случае двух переменных ξ, η при $\mathbf{H} = 0$ в конечном виде или в квадратурах, причем потенциал полностью определялся заданием метрики в рассматриваемой системе ко ординат. В случае, когда f_1 можно было представить в виде

$$f_1(\xi, \eta) = X(\xi) Y(\eta) \tag{4.3}$$

конечное выражение для потенциала определялось формулой

$$\varphi = \varphi_0 [L(\xi)]^{-2/3} \tag{4.4}$$

Функция $L(\xi)$ следовала из выражения

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{f_1 f_2}{Y} = L(\xi) M(\eta) \tag{4.5}$$

Заметим, что для четырех указанных выше систем координат имеет место как раз этот случай. К сожалению, воспользоваться формулой (4.4) не удается. Вследствие того, что $f_2 \equiv 0$ во всех этих системах, $L(\xi)$ остается неопределенной. Все полученные в [22] соотношения, включая выражение для коэффициента пропорциональности в законе 3 / 2 для произвольного однокомпонентного течения, имеют смысл лишь для решений типа (4.6), носящего вырожденный характер и справедливо противопоставлявшегося [16, 17] решениям, описывающим однокомпонентные течения с поверхности, на которой выполнены условия термоэмиссии.

Следует отметить, что все известные автору решения, описывающие течения, берущие начало с термоэмиссионного катода, являются инвариантно-групповыми решениями. Исключение составляют лишь несколько решений, не удовлетворяющих условиям термоэмиссии.

1°. Плоское электростатическое течение по гиперболическим траекториям с вектором скорости $\mathbf{V} = \{ax, by\}$ и с постоянной плотностью пространственного заряда [23]. При $a = -b$ течение становится безвихревым и действие имеет вид

$$W = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) \tag{4.6}$$

Решение (4.6) является единственным решением, получающимся при предположении о постоянной плотности пространственного заряда [24]. При этом предположении число уравнений не уменьшается, и поэтому (4.6) является решением переопределенной системы. Действительно, для функции w в этом случае получается два дифференциальных уравнения второго порядка [20] вместо одного уравнения. Именно этим объясняется тот факт, что решение (4.6) не является инвариантным.

2°. Обобщение решения п. 1° на пространственный случай [25]. При этом вектор скорости и траектории определяются выражениями

$$\mathbf{V} = \{ax, by, -(a+b)z\}, \qquad xyz = \text{const}, \qquad x^b y^{-a} = \text{const} \tag{4.7}$$

Плотность пространственного заряда постоянна.

3°. Решение [26, 27] для плоского течения в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости течения, по гиперболическим или эллиптическим траекториям

$$(\omega + a)x^2 + (\omega - a)y^2 = \text{const} \qquad (\omega = eH / mc) \tag{4.8}$$

Плотность пространственного заряда постоянна. Потенциал определяется выражением

$$2\eta\varphi + (\omega + a)^2 x^2 + (\omega - a)^2 y^2 = 0 \tag{4.9}$$

4°. Плоское электростатическое периодическое течение [26, 19]. Траектории частиц и потенциал определяются формулами

$$\cos 2x + \operatorname{ch} 2y = \text{const}, \qquad \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y} \tag{4.10}$$

Исследование групповых свойств уравнений нерелятивистского пучка позволяет сделать определенные выводы и для случая релятивистских скоростей, когда излучением движущихся зарядов можно пренебречь.

Вследствие появления в уравнениях движения дополнительной нелинейности $\sqrt{1 - V^2}$ (при приведении к безразмерному виду в качестве характерной скорости выбрана скорость света c) основная группа уравнений релятивистского пучка будет менее широкой, чем в нерелятивистском случае. Легко видеть, что эта нелинейность не позволяет производить растяжения скорости. Поэтому Н-решения уравнений релятивистского пучка имеют тот же вид, что и Н-решения в нерелятивистском случае, соответствующие нулевому значению произвольного параметра α. При строгом учете собственного магнитного поля и для того случая, когда через каждую точку пространства проходит лишь одна линия тока, невозможны однокомпонентные течения, берущие начало с термоэмиссионного катода. В классе течений с $v_n = 0$, где v_n — нормальная к эквипотенциальным поверхностям компонента скорости, возможны следующие однокомпонентные течения: течение в z-направлении, когда эквипотенциальными поверхностями являются спиральные и круговые цилиндры, параллельные и проходящие через ось z плоскости; течение в ψ-направлении, когда эквипотенциальными поверхностями являются круговые цилиндры [28]; течения в r- и ψ-направлении, когда эквипотенциальными поверхностями являются коаксиальные конусы. Для течения в r-направлении удается получить аналитическое решение. Для потенциала получаем

$$J_4 = \frac{1 + b^2 (\operatorname{tg} {}^1/_2\, \theta)^{2a}}{2b (\operatorname{tg} {}^1/_2\, \theta)^a} \tag{4.11}$$

Здесь a, b — произвольные постоянные. При $a = b = 1$ решение имеет вид

$$v_r = \pm \cos\theta, \qquad v_\theta = v_\psi \equiv 0, \qquad \varphi = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \rho = \frac{1}{r^2 \sin^3\theta} \tag{4.12}$$

$$H_r = H_\theta \equiv 0, \quad H_\psi = \mp \frac{1}{r \sin^2\theta}$$

Релятивистское течение, берущее начало с поверхности, на которой выполнены условия термоэмиссии, возможно лишь в диоде со спиральными электродами $q_1 = \text{const}$ и в диоде, электродами в котором являются наклоненные полуплоскости $\psi = \text{const}$. Течения эти могут быть как плоскими, так и трехмерными.

Заметим в заключение, что из всех перечислявшихся решений уравнений релятивистского пучка лишь решение для однокомпонентного течения в z-направлении не является инвариантным при всех функциях f

$$v_z = \operatorname{th} f(x, y) \qquad (\Delta f = 0) \tag{4.13}$$

Оно будет Н-решением при $f = q_1$, $f = q_2$ и их предельных выражениях ($b_1, b_2 \to 0$; $b_1 \to 0$, $b_2 \to 1$).

Поступила 6 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. СО АН СССР, 1962.
4. Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае. ПМТФ, 1960, № 1.
5. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.
6. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
7. Lomax R. J. Single Component Relativistic Space Charge Flow. J. Electronics and Control, 1958, vol. 5, No. 6.
8. Waters W. E. Azimuthal Electron Flow in a Spherical Diode. J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, No. 3.
9. Kirstein P. T., Kino G. S. Solution to the Equations of Space — Charge Flow by the Method of the Separation of Variables. J. Appl. Phys., 1958, vol. 29, No. 12.
10. Kirstein P. T. Curvilinear Space-Charge Flow for Convergent Electron Guns. Techn. Rep., M. L. Report No. 440, Microwave Laboratory, Stanford University, Stanford, California.
11. Langmuir I., Blodgett K. Currents Limited by Space Charge Between Concentric Spheres. Phys. Rev., 1924, vol. 24, p. 49—59.
12. Кан В. Л. Точное решение задачи Лэнгмюра для шарового конденсатора. Ж. техн. физ., 1948, т. 18, вып. 4.
13. Поплавский Р. П. Распределение потенциала в шаровом конденсаторе в случае тока насыщения. Ж. техн. физ., 1950, т. 20, вып. 2.
14. Itzkan I. Solutions of the Equations of Space Charge Flow for Radial Flow Between Concentric Spherical Electrodes. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 4.
15. Meltzer B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space Charge Conditions. J. Electronics, 1956, vol. 2, No. 2.
16. Mueller W. M. Electronics Research Laboratory Report, Series No. 60, Issue No. 143, 1957, University of California, Berkley, California.
17. Lucas A. R., Meltzer B., Stuart G. A. A General Theorem for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 2.
18. Meltzer B., Lucas A. R. Sufficient and Necessary Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 5.
19. Kirstein P. T. Comments on «A General Theorem for Dense Electron Beams» by A. R. Lucas, B. Meltzer, and G. A. Stuart. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 5.
20. Mueller W. M. Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1959, vol. 5, No. 6.
21. Mueller W. M. Comments on Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1960, vol. 8, No. 2.
22. Rosenblatt J. Three-Dimensional Space Charge Flow. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 8.
23. Meltzer B. Electron Flow in Curved Paths Under Space-Charge Conditions. Proc. Phys. Soc. B, 1949, vol. 62, No. 355.
24. Walker G. B. Congruent Space Charge Flow. Proc. Phys. Soc. B, 1950, vol. 63, No. 372.
25. Meltzer B. Electron Flow in Curved Paths Under Space — Charge Conditions. Proc. Phys. Soc. B, 1949, vol. 62, No. 360.
26. Kirstein P. T. The Complex Formulation of the Equations of Two-Dimensional Space-Charge Flow. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 5.
27. Walker L. R. Generalization of Brillouin Flow. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 6.
28. Buneman O. Self-Consistent Electrodynamics. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, vol. 50, No. 1.