

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ
В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ**

УДК 533.6.011

С. М. Аульченко, А. Ф. Латыпов

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

В работе описан метод решения задач проектирования оптимальных двумерных конфигураций, включающий модифицированный вариант метода граничных элементов для решения задач внешнего обтекания. Приводятся примеры использования этого метода для проектирования дозвуковых крыловых профилей, обладающих заданными характеристиками.

Важная задача прикладной аэродинамики до- и околозвуковых скоростей полета — проектирование крыловых профилей с желаемыми аэродинамическими характеристиками. К ним относятся задачи построения оптимальных профилей, при обтекании которых реализуется экстремальное значение некоторого параметра, например подъемной силы, аэродинамического качества, критического числа Маха, момента тангажа и т. д. Корректность постановки задачи, определяющая существование содержательного решения и успех в практическом проектировании, зависит от учета ограничений. Ограничения могут иметь различную природу: аэродинамические — на подъемную силу и момент, газодинамические — на безотрывный и дозвуковой режимы обтекания, геометрические — на площадь, кривизну, толщину профиля, алгоритмические — на гладкость, например, функций, задающих контур. Для решения этих задач применяются прямые методы и методы решения обратных краевых задач [1, 2]. Авторами данной работы также были предложены и апробированы некоторые новые подходы к решению этих задач, опубликованные в [3–6]. В настоящей работе описан метод проектирования плоских оптимальных конфигураций, в основу которого положен метод граничных элементов для расчета дозвуковых двумерных течений идеального газа, являющийся развитием метода [7], и используется не постоянное, а линейное распределение плотности источников на граничных элементах, что позволяет повысить точность расчетов, не увеличивая число этих элементов и размерность обрабатываемой матрицы. Для описания геометрии искомой границы, каковой является проектируемый контур профиля, предложен способ, основанный на применении параметрических полиномов четвертого порядка со специальным выбором точек сопряжения, свободный от возможных осцилляций при варьировании определяющих параметров и охватывающий широкий класс конфигураций. Оптимизация осуществляется неградиентным методом поиска с адаптацией и с использованием элемента случайности, предназначенным для минимизации функции многих переменных при наличии функциональных ограничений в виде равенств и неравенств [8].

Алгоритм решения задачи обтекания. Дифференциальные уравнения невязкого безвихревого течения газа после применения соотношений

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \partial V / \partial s + V \partial \theta / \partial n, \quad \partial V / \partial s = V / (M^2 - 1) \partial \theta / \partial n, \quad \partial V / \partial n = V \partial \theta / \partial s \quad (1)$$

запишем в виде

$$\nabla \mathbf{V} = M^2 \partial V / \partial s, \quad (2)$$

где s — направление по касательной к линии тока; n — перпендикуляр к ней; θ — угол наклона вектора скорости; M — локальное число Маха.

После введения потенциала возмущений φ такого, что $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla\varphi$, с учетом (1), (2) получим

$$\Delta\varphi = M^2\partial V/\partial s = Q(M, V) \quad (3)$$

($\mathbf{V}_\infty = \nabla\Phi$ — скорость невозмущенного потока). Условие непротекания на контуре профиля накладывает на φ требование

$$\varphi'_n = -\mathbf{V}_\infty \mathbf{n}. \quad (4)$$

Численная реализация условия Кутта — Жуковского для профиля с нулевым углом задней кромки заключается в требовании равенства тангенциальных скоростей в точках с радиусами-векторами ξ_h и ξ_d на верхней и нижней поверхностях профиля соответственно, если выполнено условие

$$|\xi_h - \xi_e| = |\xi_d - \xi_e| \sim \varepsilon$$

(ξ_e отвечает концевой точке профиля, $\varepsilon \ll 1$). Декартова система координат (x, y) имеет начало в крайней левой точке контура, а ось x направлена по его хорде.

Используя теорему Грина, запишем потенциал как

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} \left(\int_C (q + i\omega) f(z - z_C) dl + \int_D Q f(z - z_C) ds \right) \quad (5)$$

(D — область, внешняя к контуру C , $f(z) = \ln z/2\pi$, q, ω — плотности распределения источников и завихренности на контуре, Q — плотность источников в D).

Опираясь на представление (5), получим выражения для условий непротекания в точке ξ_i и условия Кутта — Жуковского (4):

$$\begin{aligned} & \int_C q(\xi) (\partial \ln r(\xi_i, \xi) / \partial n_i d\xi_x - \partial \theta(\xi_i, \xi) / \partial n_i d\xi_y) - \omega (\partial \theta(\xi_i, \xi) / \partial n_i d\xi_x + \\ & + \partial \ln r(\xi_i, \xi) / \partial n_i d\xi_y) = -2\pi \mathbf{V}_\infty \mathbf{n} - \int_D Q(s) \partial \ln r(\xi_i, s) / \partial n_i ds. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_C [q(\xi) (\partial \ln r(\xi_h, \xi) / \partial \tau_h - \partial \ln r(\xi_d, \xi) / \partial \tau_d) d\xi_x - (\partial \theta(\xi_h, \xi) / \partial \tau_h - \partial \theta(\xi_d, \xi) / \partial \tau_d) d\xi_y - \\ & - \omega [(\partial \theta(\xi_h, \xi) / \partial \tau_h - \partial \theta(\xi_d, \xi) / \partial \tau_d) d\xi_x + (\partial \ln r(\xi_h, \xi) / \partial \tau_h - \partial \ln r(\xi_d, \xi) / \partial \tau_d) d\xi_y] = \\ & = 2\pi \mathbf{V}_\infty (\tau_h - \tau_d) - \int_D Q(s) (\partial \ln r(\xi_h, \xi) / \partial \tau_h - \partial \ln r(\xi_d, \xi) / \partial \tau_d) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $r(\xi_i, \xi) = \sqrt{(\xi_{ix} - \xi_x)^2 + (\xi_{iy} - \xi_y)^2}$; ξ_i, ξ — радиусы-векторы соответствующих точек на контуре; s — радиус-вектор точки в области; $\theta(\xi_i, \xi)$ — угол между векторами ξ_i, ξ ; \mathbf{n}_i — нормаль в точке ξ_i ; τ_h, τ_d — касательные к контуру векторы в точках с радиусами-векторами ξ_h, ξ_d .

Разобьем контур C на N , а область D на K элементов. При дискретизации область D покрывается неравномерной сеткой типа C , и в расчетах участвует ее подобласть D_K , длина которой по оси x равна пяти длинам хорды, а по y — четырем длинам. Расчеты показывают, что выбранное положение внешней границы подобласти D_K обеспечивает на ней выполнение условия невозмущенности потока с той же точностью, что и решение уравнений. Будем считать, что плотность источников на граничном элементе l_i распределена по линейному закону:

$$q(\eta) = q_{i-1} f_1 + q_i f_2, \quad f_1 = (1 - \eta)/2, \quad f_2 = (1 + \eta)/2, \quad \eta \in (-1, 1).$$

Тогда (6) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N l_j q_{j-1} \int_{-1}^1 f_1(\eta) (\partial \ln r_{ij} / \partial n_i d\eta_x - \partial \theta_{ij} / \partial n_i d\eta_y) + \sum_{j=1}^N l_j q_j \int_{-1}^1 f_2(\eta) (\partial \ln r_{ij} / \partial n_i d\eta_x - \\ & - \partial \theta_{ij} / \partial n_i d\eta_y) - \omega \sum_{j=1}^N l_j \int_{-1}^1 (\partial \theta_{ij} / \partial n_i d\eta_x + \partial \ln r_{ij} / \partial n_i d\eta_y) = \\ & = -4\pi \mathbf{V}_\infty \mathbf{n}_i - 2 \sum_{k=1}^K Q_k \int_{\Delta S_k} \partial \ln r_{ik} / \partial n_i ds. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} g_{ij}^1 &= l_j \int_{-1}^1 f_1(\eta) (\partial \ln r_{ij} / \partial n_i d\eta_x - \partial \theta_{ij} / \partial n_i d\eta_y), \\ g_{ij}^2 &= l_j \int_{-1}^1 f_2(\eta) (\partial \ln r_{ij} / \partial n_i d\eta_x - \partial \theta_{ij} / \partial n_i d\eta_y), \\ G_{ij} &= g_{ij+1}^1 + g_{ij}^2 \quad (j = 1, \dots, N-1), \quad G_{iN} = g_{i1}^1 + g_{iN}^2, \\ G_{i,N+1} &= \sum_{j=1}^N l_j \int_{-1}^1 (\partial \theta_{ij} / \partial n_i d\eta_x + \partial \ln r_{ij} / \partial n_i d\eta_y), \\ H_i &= -4\pi \mathbf{V}_\infty \mathbf{n}_i - 2 \sum_{k=1}^K Q_k \int_{\Delta S_k} \partial \ln r_{ik} / \partial n_i ds, \end{aligned}$$

то для N точек коллокации ξ_i ($i = 1, \dots, N$) на контуре получим систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{H}. \quad (8)$$

Здесь матрица коэффициентов \mathbf{G} состоит из элементов G_{ij} ($i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N+1$); вектор правых частей $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_N)$; вектор решения $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N, \omega)$. Стандартный вид уравнения, замыкающего систему (8), находим из (7) введением следующих обозначений:

$$\begin{aligned} g_{hj}^1 &= l_j \int_{-1}^1 f_1(\partial \ln r_{hj} / \partial \tau_h d\eta_x - \partial \theta_{hj} / \partial \tau_h d\eta_y), \quad g_{hj}^2 = l_j \int_{-1}^1 f_2(\partial \ln r_{hj} / \partial \tau_h d\eta_x - \partial \theta_{hj} / \partial \tau_h d\eta_y), \\ g_{dj}^1 &= l_j \int_{-1}^1 f_1(\partial \ln r_{dj} / \partial \tau_d d\eta_x - \partial \theta_{dj} / \partial \tau_d d\eta_y), \quad g_{dj}^2 = l_j \int_{-1}^1 f_2(\partial \ln r_{dj} / \partial \tau_d d\eta_x - \partial \theta_{dj} / \partial \tau_d d\eta_y), \\ g_{hj}^{12} &= g_{hj+1}^1 + g_{hj}^2, \quad g_{dj}^{12} = g_{dj+1}^1 + g_{dj}^2, \quad g_{hN}^{12} = g_{h1}^1 + g_{hN}^2, \quad g_{dN}^{12} = g_{d1}^1 + g_{dN}^2, \\ G_{N+1,j} &= g_{hj}^{12} - g_{dj}^{12} \quad (j = 1, \dots, N), \end{aligned}$$

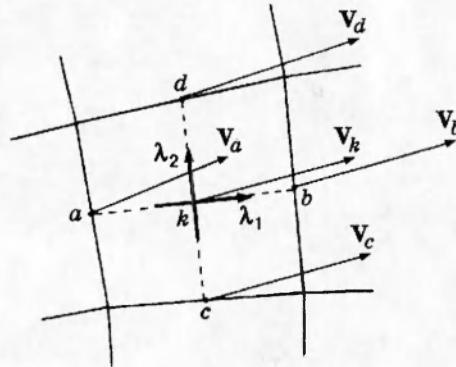


Рис. 1

$$G_{N+1, N+1} = - \sum_{j=1}^N l_j \int_{-1}^1 (\partial \theta_{h_j} / \partial \tau_h - \partial \theta_{d_j} / \partial \tau_d) d\eta_x + (\partial \ln r_{h_j} / \partial \tau_h - \partial \ln r_{d_j} / \partial \tau_d) d\eta_y,$$

$$H_{N+1} = 4\pi V_\infty (\tau_h - \tau_d) - 2 \sum_{k=1}^K Q_k \int_{\Delta S_k} (\partial \ln r_{hk} / \partial \tau_h - \partial \ln r_{dk} / \partial \tau_d) ds.$$

Полученная система уравнений решается методом простой итерации по нелинейной правой части. Начальное значение Q в области полагается равным нулю, что соответствует течению несжимаемой жидкости. Процедура вычисления Q_k в ячейках области ΔS_k на каждой итерации следующая. Дифференцирование (5) по x и y в точках на границах и центре ячейки ΔS_k (рис. 1) дает значения скоростей V_a, V_b, V_c, V_d, V_k . В приближении конечных разностей запишем

$$\begin{aligned} \partial V_k / \partial s (s\lambda_1) + \partial V_k / \partial n (n\lambda_1) &= \partial V_k / \partial \lambda_1 = (V_b - V_a) / ba, \\ \partial V_k / \partial s (s\lambda_2) + \partial V_k / \partial n (n\lambda_2) &= \partial V_k / \partial \lambda_2 = (V_d - V_c) / dc, \end{aligned}$$

откуда

$$\partial V_k / \partial s = (\partial V_k / \partial \lambda_1 (n\lambda_2) - \partial V_k / \partial \lambda_2 (n\lambda_1)) / ((s\lambda_1)(n\lambda_1) - (s\lambda_2)(n\lambda_1)).$$

Тогда

$$Q_k = [(V_k / V_\infty)^2 M_\infty^2 / (1 - ((\gamma - 1) / 2) M_\infty^2 (1 - (V_k / V_\infty)^2))] \partial V_k / \partial s.$$

Представление геометрии. В задачах проектирования оптимальных конфигураций всегда необходимо решать вопрос об описании искомой границы. Как правило, от функций, ее задающих, в задачах гидродинамики и дозвуковой аэрогазодинамики требуется гладкость не меньше первого порядка. В процессе их определения в зависимости от способа представления необходимо варьировать определяющие параметры: либо координаты узлов, либо коэффициенты полиномов и т. д. Это может, вообще говоря, приводить к «паразитным» осцилляциям, что нарушает корректность оптимизационных задач. Существуют различные методы [9] проектирования кривых и поверхностей, из которых можно выделить метод полиномиальных кривых Фергюсона — Бернштейна — Безье. Однако для построения неизвестной границы из численного решения оптимизационных задач требуется большое число определяющих параметров. Это приводит, в частности, к кривым Безье высокого порядка, что значительно ослабляет связь характеристической ломаной с получаемой кривой. Предлагается метод, основанный на использовании параметрических полиномов со специальным выбором точек сопряжения интервалов интерполяции, свобод-

№ п/п	M_∞	K_a	C_l	C_d	C_m	$d_{\max}, \%$	S_C
1	0,5	82,1	0,586	0,007	-0,245	11,9	0,074
2	0,7	62,2	0,402	0,006	-0,191	11,2	0,072
3	0,5	15,0	1,198	0,079	-0,510	11,3	0,066
4	0,5	29,4	0,600	0,020	-0,019	11,6	0,068

ный от этих недостатков. Подробно он изложен в [10].

Контур профиля строится следующим образом. Для верхней его части задаются значения $r_h, x_1^h, \dots, x_N^h, y_1^h, \dots, y_N^h$. Здесь r_h — радиус закругления носка контура; x_i^h, y_i^h — абсциссы и ординаты узлов каркаса (причем центр окружности лежит на оси x); $x_N^h = 1$; $y_N^h = 0$. Вычисляются координаты точки сопряжения дуги окружности в носке с первым отрезком каркаса с учетом требования первого порядка гладкости. Дальнейшее построение кривой носит локальный характер: на $[x_{i-1}^h, x_i^h], [x_i^h, x_{i+1}^h]$ из условия знакопостоянства второй производной выбираются узлы z_{i-1}^h, z_i^h , в которых обеспечивается сопряжение первого порядка гладкости с соседними сегментами, на отрезке $[z_{i-1}^h, z_i^h]$ строится кривая, задаваемая в виде параметрического полинома четвертого порядка. Реализуется описанный выше алгоритм построения кривых, вписанных в каркас, с первой точки вплоть до концевой. При оптимизации варьируемыми параметрами являются r_h, x_i^h, y_i^h и величины η_i^h , определяющие z_i^h из допустимого интервала. Аналогично строится нижняя часть контура.

Постановка задач оптимизации. Спроектируем крыловой профиль, удовлетворяющий аэродинамическим ограничениям

$$M_\infty = \text{const}, \quad M < 1, \quad C_l > C_l^0, \quad f(s) > f_0, \quad \alpha_0 < \alpha < \alpha_1,$$

геометрическим ограничениям

$$d_{\max} < d_1, \quad S_0 < S_C, \quad b = \text{const}, \quad \text{контур } C \in C^1(0, 1)$$

и доставляющий минимум (максимум) некоторому целевому функционалу. Здесь M_∞ — число Маха невозмущенного потока; $f(s)$ — формпараметр; s — длина дуги вдоль контура; f_0 — эмпирическая константа, связанная с выбранным критерием безотрывности; α — угол атаки относительно хорды; d_{\max} — максимальная толщина профиля, %; S_C — площадь профиля; b — длина хорды профиля. В качестве целевых функционалов были выбраны: максимум аэродинамического качества $F_1 = K_a$, максимум коэффициента подъемной силы $F_2 = C_l$, минимум коэффициента момента тангажа $F_3 = C_m$ ($K_a = C_l/C_d$, C_d — коэффициент сопротивления).

Значительно упростить процесс проектирования крыловых профилей можно с учетом того, что обычно обтекание крыльев происходит при больших (порядка $10^5 \div 10^6$) числах Рейнольдса. При таком режиме обтекания вязкость будет сказываться лишь в достаточно тонком слое, и поэтому ее учет можно провести в рамках модели пограничного слоя. Приближенный расчет величины C_d можно сделать, используя известную формулу Сквайра — Юнга, а величину f_0 взять из критерия безотрывности Кочина — Лойцянского.

Результаты расчетов. На рис. 2 представлен результат проектирования профиля, обладающего максимальным качеством при следующих значениях в ограничениях: $M_\infty = 0,5$, $C_l^0 = 0$, $f_0 = -2,5$, $\alpha_0 = -5^\circ$, $\alpha_1 = 20^\circ$, $d_{\max} < 12\%$, $S_0 = 0,06$, $b = 1$. В качестве исходного взят произвольный симметричный контур, обтекаемый под нулевым углом атаки. На рисунке показано распределение коэффициента давления C_p по верхнему и нижнему контурам. Интегральные и геометрические характеристики полученного оптимального профиля приведены в таблице (строка 1).

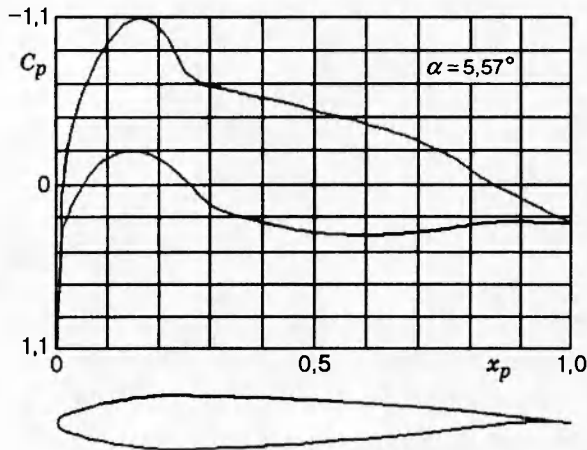


Рис. 2

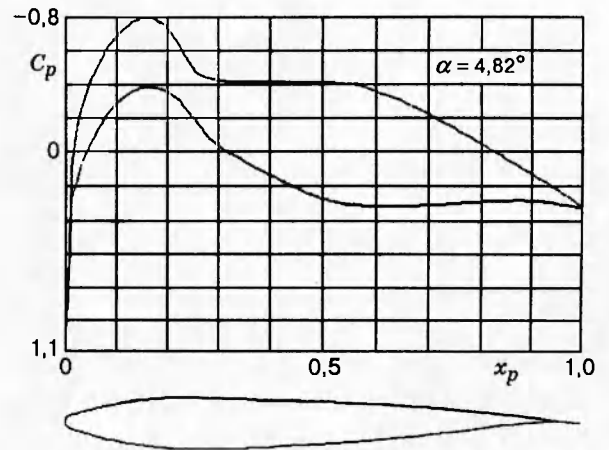


Рис. 3

На рис. 3 представлен результат проектирования профиля, обладающего максимальным качеством при тех же значениях в ограничениях, кроме $M_\infty = 0,7$. Исходным являлся оптимальный профиль из предыдущей задачи. Интегральные и геометрические характеристики модифицированного профиля приведены в таблице (строка 2). В распределении коэффициента давления на верхнем контуре наблюдается выход на критическое значение $C_p^* = -0,78$. Сам профиль имеет характерную для околосвуковых профилей отрицательную кривизну $-0,372\%$.

Результат проектирования профиля с максимальной подъемной силой при $M_\infty = 0,5$ и прежних ограничениях показан на рис. 4. В качестве начального также был выбран оптимальный профиль из первой задачи. Характеристики полученного профиля приведены в таблице (строка 3). По сравнению с начальным профилем (строка 1) коэффициент C_l вырос в 2 раза, и наблюдается характерное для профилей с большими C_l смещение расположения стрелки вогнутости к крайним положениям. Для профиля на рис. 4 абсцисса максимальной его кривизны $x_f = 0,14$.

На рис. 5 представлены результаты проектирования профиля с минимальным значением коэффициента момента тангажа C_m при ограничении снизу на коэффициент подъемной

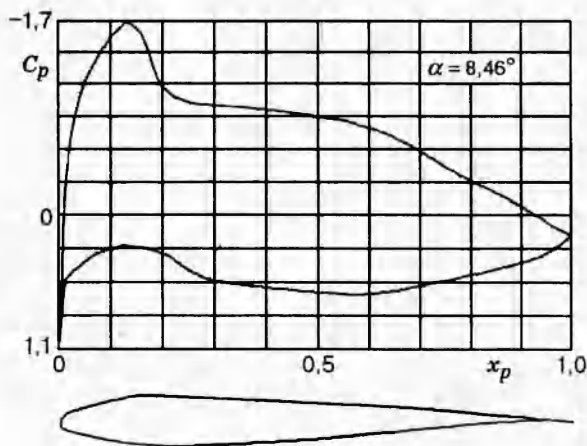


Рис. 4

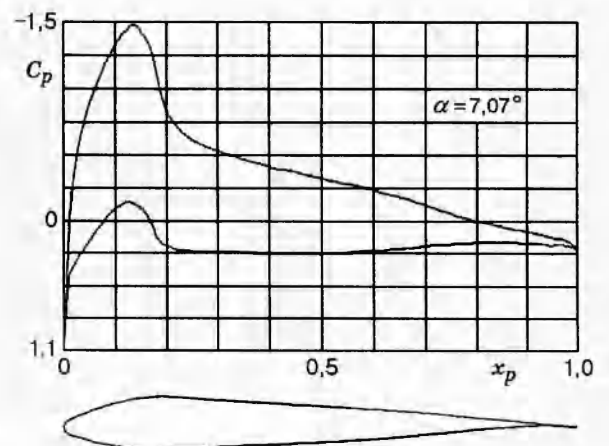


Рис. 5

силы $C_l > 0,6$. Остальные ограничения прежние. В качестве исходного был взят предыдущий оптимальный профиль. Характеристики приведены в таблице (строка 4). Видно значительное уменьшение C_m как за счет уменьшения C_l (его значение вышло на границу), так и за счет смещения центра давления к носовой части профиля: абсцисса центра давления у полученного профиля 0,329, у исходного 0,424. В расчетах число граничных элементов N на контуре C было 70, число ячеек K в подобласти D_K — 1360.

В заключение можно отметить следующее. При решении оптимизационных задач прямыми методами определяющим условием эффективности алгоритмов расчета обтекания является обеспечение равномерной точности для всего множества рассчитываемых в процессе поиска конфигураций. Предложенный алгоритм решения прямой задачи удовлетворяет этому требованию, так как структура обрабатываемой матрицы G не зависит от дискретизации области, и, следовательно, исключается возможность потери точности вычисления функционалов при произвольной вариации свободной границы. Указанное преимущество данного алгоритма перед конечно-разностными и конечно-элементными методами дает возможность получать решения при конечных вариациях параметров геометрии исходного профиля, что иллюстрируется приведенными расчетами. Это обстоятельство является важным, так как в силу нелинейной зависимости функционалов от геометрии профиля и наличия ограничений получаемые решения являются локальными экстремумами задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аульченко С. М. Метод оптимизации профилей в дозвуковом потоке идеального газа. Новосибирск, 1987. (Препр./ ИТПМ СО АН СССР; № 30–87).
2. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994.
3. Аульченко С. М., Латыпов А. Ф., Самарин В. Г. Проектирование симметричных профилей с максимальным критическим числом Маха потока при заданных ограничениях // Уч. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19, № 2. С. 19–28.
4. Аульченко С. М. Оптимизация профилей в дозвуковом потоке идеального газа // Моделирование в механике. Новосибирск, 1988. Т. 2(19), № 6. С. 16–21.
5. Аульченко С. М. Вариационный метод построения дозвуковых крыловых профилей // ПМТФ. 1992. Т. 33, № 4. С. 90–93.
6. Aulchenko S. M., Latypov A. F. Numerical method for designing two-dimensional optimal aerodynamic configurations // Int. Conf. on the Method of Aerophysical Research. Novosibirsk, 1994. Pt 1. P. 24–26.
7. Аульченко С. М. Применение метода граничных элементов для расчета скоростного дозвукового профиля // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 94–97.
8. Латыпов А. Ф., Никуличев Ю. В. Специализированный комплекс программ оптимизации. Новосибирск, 1985. (Препр./ ИТПМ СО АН СССР; № 15–85).
9. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982.
10. Аульченко С. М., Латыпов А. Ф. Построение плоских кривых с помощью параметрических полиномов четвертого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 7. С. 1139–1143.

Поступила в редакцию 4/XII 1995 г.,
в окончательном варианте — 21/XII 1995 г.