

ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В СТРУЕ ЗА СРЕЗОМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО УСКОРИТЕЛЯ

Г. М. Бам-Зеликович

(Москва)

Решается задача о движении проводящего газа за срезом ускорителя. Находится форма струи и распределение всех параметров в струе. Задача решается в предположении, что течение плоское, токи Холла отсутствуют и приращение скорости в струе мало по сравнению с величиной скорости на выходе из канала ускорителя.

1. Рассмотрим струю проводящего газа, вытекающую из ускорителя. Так как струя вытекает в вакуум, то на границе струи должна возникать зона разрежения. Но в силу того, что скорость газа большая (от $\sim 5 \cdot 10^6$ до 10^7 см/сек), число M также будет очень большим ($M \sim 25$ и более). Угол наклона к оси струи первой характеристики зоны разрежения будет всего порядка нескольких градусов. Таким образом, на расстоянии многих калибров высоты канала ускорителя за его срезом ядро потока будет занимать практически почти всю высоту струи, а зона разрежения являться лишь узким пограничным слоем. Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать газодинамическим расширением струи и рассматривать картину течения, возникающую лишь вследствие воздействия электромагнитных сил. Это означает, что будем пренебрегать в уравнениях градиентом давления по сравнению с электромагнитными силами.

Предположим еще, что канал ускорителя имеет сечение прямоугольной формы, причем ширина его настолько велика, что движение можно рассматривать как плоское. Толщина электродов обычно мала по сравнению с высотой канала. Поэтому будем для простоты в дальнейшем считать электроды пластинами нулевой толщины. При таком упрощении на конце электрода в математическом решении может быть особая точка для электрического потенциала. Но поскольку значения электрического потенциала ни в уравнениях, ни в граничные условия входить не будут, подобная идеализация вполне допустима.

Направим ось x по направлению оси струи, ось y — по высоте канала ускорителя. Поместим начало координат на срезе ускорителя у нижнего электрода. При сделанных предположениях движение проводящего газа в струе будет описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(\frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial vH}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} H \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \rho U \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} H \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Здесь ρ — плотность газа, U и v — проекции скорости на оси x и y , H — напряженность магнитного поля, σ — проводимость газа, которую будем считать постоянной, и c — скорость света.

Сформулируем граничные условия для этой системы. Строго говоря, движение газа внутри канала ускорителя не может рассматриваться не-

зависимо от движения вне канала, так как наличие проводящей струи вне канала вызывает искривление линий электрического тока в конце канала. Но в том случае, когда токи Холла отсутствуют и канал достаточно длинный, можно пренебречь в канале составляющей тока вдоль оси x по сравнению с составляющей вдоль оси y и в первом приближении считать, что линии электрического тока в конце канала — прямые, параллельные оси y . При этом предположении движение в канале может быть рассчитано заранее, и тогда в качестве граничных условий для плотности и скорости при решении системы уравнений (1.1) могут быть приняты следующие условия:

$$U = U(y), \quad v = v(y), \quad \rho = \rho(y) \quad \text{при } x = 0$$

Так как вне струи токи не текут, то на границах струи должно быть $H = 0$. Из уравнений (1.1) видно, что $U = \text{const}$ и $v = \text{const}$ при $H = 0$. Поэтому границы струи будут прямыми линиями, т. е. будет $H = 0$ при $y = -kx$ и $y = y_0 + kx$, где y_0 — высота канала, а k — константа, подлежащая определению в процессе решения задачи.

На некотором расстоянии от выхода из ускорителя проводимость резко падает из-за остывания газа вследствие излучения. Поэтому можно считать, что за некоторым сечением струи токи уже не текут. Тогда вторым граничным условием для H будет $H = 0$ при $x = x_0$. Наконец из предположения, что внутри канала вблизи его конца линии электрического тока параллельны оси y , следует, что $H = H_0 = \text{const}$ при $x = 0$. Значение этой константы может быть определено после решения задачи, исходя, например, из заданной разности потенциалов на электродах или величины полного тока (в зависимости от конкретных условий задачи).

При рассмотрении движения в струе будем считать в дальнейшем H_0 заданной величиной. Кроме того, для простоты будем предполагать, что плотность на выходе из ускорителя постоянна по сечению, а скорость постоянна по величине и направлена по оси x . Таким образом, граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} U = u_0, \quad v = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad H = H_0 \quad \text{при } x = 0 \\ H = 0 \quad \text{при } y = -kx, \quad y = y_0 + kx \quad \text{и при } x = x_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь u_0, ρ_0, H_0 — заданные постоянные, а k подлежит определению из условия, что на границе струи направление скорости совпадает с направлением границы.

Уравнения системы (1.1) можно упростить, если принять во внимание следующие особенности течения в рассматриваемом случае. Если канал ускорителя достаточно длинный (очень короткие каналы, так называемые торцевые ускорители, здесь рассматриваться не будут), то доля тока, протекающего вне ускорителя, мала по сравнению с токами, текущими внутри ускорителя. При этом изменение скорости в струе вне ускорителя будет мало по сравнению с величиной скорости при выходе из ускорителя. Также мал будет угол расширения струи, поэтому, если рассматривать движение на расстояниях от выхода порядка нескольких калибров высоты канала, то в этой зоне мало будет и изменение плотности газа. Кроме того, заметим, что так как размеры зоны, в которой протекает основной ток в струе в направлении осей x и y , одного порядка, то и производные по x и y должны быть одного порядка.

Положим $U = u_0 + u$, где $u \ll u_0$. Тогда, принимая во внимание сделанные выше замечания о картине течения в рассматриваемом случае,

можем линеаризировать уравнения движения и индукции

$$\rho_0 u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{H}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{H}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{4\pi\sigma u_0}{c^2} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.4)$$

Значения проекций скорости, как следует из (1.3), могут быть найдены в этом приближении без использования уравнения неразрывности. После того, как будут определены проекции скорости из уравнения неразрывности, может быть вычислено распределение плотности в струе.

Из уравнения (1.4) напряженность H может быть определена независимо от u и v . Зная H как функцию x и y , значения самих u и v легко найти интегрированием (1.3) с учетом граничных условий (1.2)

$$u = \frac{1}{8\pi\rho_0 u_0} [H_0^2 - H^2(x, y)], \quad v = -\frac{1}{8\pi\rho_0 u_0} \int_0^x \frac{\partial H^2}{\partial y} dx \quad (1.5)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению H из уравнения (1.4) и граничных условий (1.2).

С принятой степенью точности можно требовать при решении уравнения (1.4) выполнения граничного условия $H = 0$ не на линиях $y = -kx$ и $y = y_0 + kx$, а на прямых, параллельных оси струи, т. е. при $y = 0$ и $y = y_0$.

Ищем частное решение уравнения (1.4) в виде $H = f_1(x)f_2(y)$. Для определения f_1 и f_2 имеем уравнения

$$d^2 f_1 / dx^2 - (4\pi\sigma u_0 / c^2) df_1 / dx - C^2 f_1 = 0, \quad d^2 f_2 / dy^2 + C^2 f_2 = 0$$

Интегрируя эти уравнения, находим частное решение, обращающееся в нуль при $y = 0$, $y = y_0$ и $x = x_0$

$$H_n = C_n \exp(A\pi x / y_0) \operatorname{sh} \{ \sqrt{A^2 + n^2} [\pi(x_0 - x) / y_0] \} \sin n\pi y / y_0, \\ A = 2\sigma u_0 y_0 / c^2 \quad (1.6)$$

Суммируя частные решения (1.6) и определяя C_n из условия, что $H = H_0$ при $x = 0$, найдем искомое решение уравнения

$$H = \frac{4H_0}{\pi} \left(\exp \frac{A\pi x}{y_0} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\operatorname{sh} [\sqrt{A^2 + (2n+1)^2} \pi(x_0 - x) / y_0]}{\operatorname{sh} [\sqrt{A^2 + (2n+1)^2} \pi x_0 / y_0]} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{y_0}$$

После того как по формулам (1.5) и (1.7) будут вычислены значения $H(x, y)$, $u(x, y)$ и $v(x, y)$, из уравнения неразрывности может быть определена величина плотности ρ .

Линеаризируя уравнение неразрывности и интегрируя полученное соотношение с учетом граничных условий и формул (1.5), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{u_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \rho = \rho_0 + \frac{1}{8\pi u_0^2} \left[H^2 - H_0^2 + \int_0^x dx \int_0^y \frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} dy \right] \quad (1.8)$$

Формулы (1.5), (1.7), (1.8) дают полное решение поставленной задачи о течении проводящего газа за срезом ускорителя.

2. Переходя к более детальному анализу полученного решения, заметим прежде всего, что при рассматриваемых значениях x_0 ($x_0/y_0 > 3-4$) распределение H , а следовательно, и всех других величин, практически не зависит от x_0 . Действительно, множители в (1.7), зависящие от x_0 , имеют вид

$$\operatorname{sh} \frac{k_1(x_0 - x)}{y_0} \operatorname{csch} \frac{k_1 x_0}{y_0} = \operatorname{sh} \frac{k_1 x}{y_0} \operatorname{cth} \frac{k_1 x_0}{y_0} - \operatorname{ch} \frac{k_1 x}{y_0}$$

Здесь $k_1 > 3$ при $n = 0$ и возрастает с ростом n . Но при $k_1 > 3$ и $x/y_0 > 3$ с точностью до 10^{-8} имеем $\operatorname{th} k_1 x_0 / y_0 = 1$. Учитывая это, можно упростить выражение (1.7), вычисляя H при $x_0 \rightarrow \infty$

$$H = \frac{4H_0}{\pi} \exp \frac{A\pi x}{y_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp \frac{-\sqrt{A^2 + (2n+1)^2} \pi x}{y_0} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{y_0} \quad (2.1)$$

Дальнейшее упрощение этой формулы можно получить, если учесть, что при характерных значениях параметров, т. е. при $\sigma \sim 10^{13} \text{ сек}^{-1}$, $u_0 \sim 5 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$, $y_0 \sim 3 \text{ см}$ будет $A \sim 0.3$, и, следовательно, можно пренебречь A^2 по сравнению с $(2n+1)^2$ при любом n . При этом ряд в (2.1) может быть просуммирован (см., например, [1]) и для H получается выражение

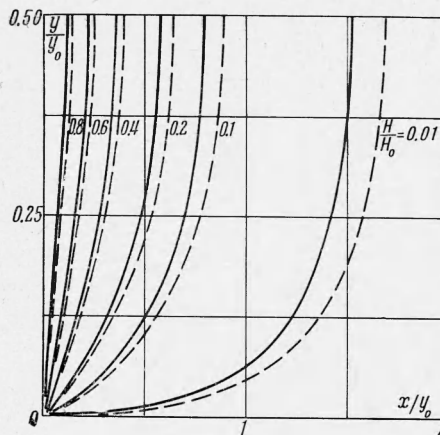
$$H = \frac{2H_0}{\pi} \left(\exp \frac{A\pi x}{y_0} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sin \frac{\pi y}{y_0} \operatorname{csch} \frac{\pi x}{y_0} \right) \quad (2.2)$$

На фиг. 1 показаны линии $H = \text{const}$ (линии электрического тока), вычисленные по формуле (2.2). Сплошные кривые соответствуют $A = 0$, пунктирные $A = 0.1$. Из фиг. 1 вытекает, что на расстоянии двух калибров от среза ускорителя магнитное поле спадает практически до нуля ($H/H_0 \sim 0.01$), причем при $A \neq 0$ магнитное поле спадает несколько медленнее. Подставляя (2.2) в (1.5), получаем:

$$v = - \frac{H_0^2 \cos(\pi y / y_0)}{\pi^2 \rho_0 u_0 y_0} \int_0^x \left(\exp \frac{2A\pi x}{y_0} \right) \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin(\pi y / y_0)}{\operatorname{sh}(\pi x / y_0)} \right] \frac{\operatorname{sh}(\pi x / y_0) dx}{\sin^2(\pi y / y_0) + \operatorname{sh}^2(\pi x / y_0)}$$

На фиг. 2 и 3 показаны профили скорости v , рассчитанные по (2.3) для $A = 0.1$. На фиг. 2 дана зависимость $v(x/y_0)$ для ряда значений $\pi y / y_0 = y^*$, а на фиг. 3 — зависимость $v(y/y_0)$ при различных $\pi x / x_0 = x^*$. По оси ординат на фиг. 2 и 3 отложены значения $v^* = - (100 \rho_0 u_0 / H_0^2) v$.

Из фиг. 3 видно, что по абсолютной величине проекция скорости на ось y монотонно возрастает от центра струи к границам. Максимальное значение v может быть получено из (2.3) предельным переходом при $y \rightarrow 0$. Оно не зависит от значения параметра A . Действительно, при $y/y_0 \ll 1$ обозначим $\pi y / y_0 = \delta^3$ и разобьем интервал интегрирования в (2.3) на два интервала: от нуля до x_1 и от x_1 до x , причем выберем x_1 так, чтобы выполнялось условие $\pi x_1 / y_0 \sim \delta$. Тогда сможем записать



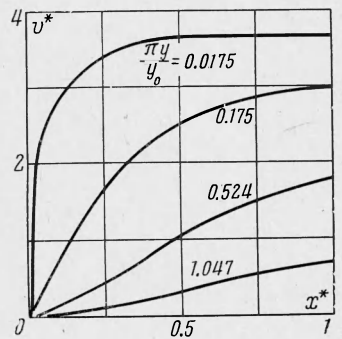
Фиг. 1

$$v = -\frac{H_0^2}{\pi^2 \rho_0 \mu_0 y_0} \left\{ \int_0^{x_1} [1 + AO(\delta)] \left[\operatorname{arctg} \frac{\sin(\pi y / y_0)}{\operatorname{sh}(\pi x / y_0)} \right] \frac{\operatorname{sh}(\pi x / y_0) dx}{\sin^2(\pi y / y_0) + \operatorname{sh}^2(\pi x / y_0)} + \right. \\ \left. + \int_{x_1}^x \left(\exp \frac{2A\pi x}{y_0} \right) \frac{\delta^3 [1 + O(\delta)]}{\operatorname{sh}^2(\pi x / y_0)} dx \right\}$$

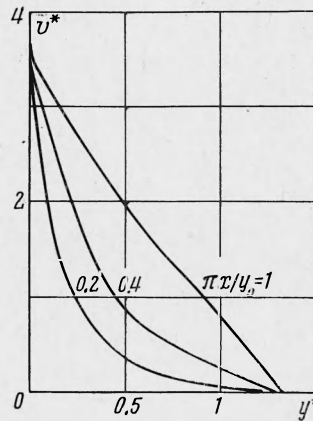
При $\delta \rightarrow 0$ первый интеграл стремится к величине, не зависящей от A , а второй — к нулю. Таким образом, при любом A в том приближении, в котором решается задача, угол расширения струи α будет один и тот же. По абсолютной величине он равен

$$\alpha = \operatorname{arctg} |v / u_0| = \operatorname{arctg} (0.037 H_0^2 / \rho_0 \mu_0^2) \quad (2.4)$$

Распределение приращения проекции скорости на ось x , подсчитанной по формулам (1.5) и (2.2) для $A = 0.1$ в разных сечениях струи, показано на фиг. 4. По оси абсцисс отложена величина $u^* = (8\pi \rho_0 \mu_0 / H_0^2) u$, по оси ординат — отношение y / y_0 . Профиль u^* , резко неравномерный в начале струи, выравнивается на расстоянии порядка от двух до трех калибров от выхода.

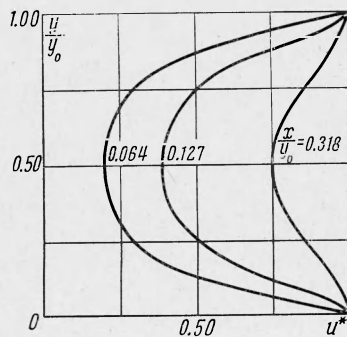


Фиг. 2

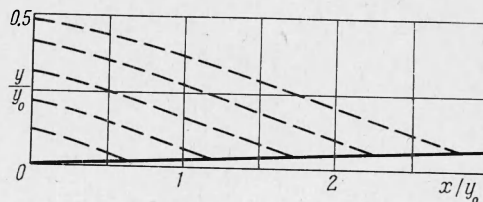


Фиг. 3

3. Представляет интерес рассмотреть течение за срезом канала, имеющего три электрода: два наружных, находящихся под одним потенциалом, и внутренний — под другим. Течение в струе, выходящей из такого канала, должно быть аналогично течению за срезом коаксиального ускорителя. Поместим в этом случае начало координат на конце среднего электрода. Координаты концов крайних обозначим соответственно $\pm y_0$. Распределение всех величин находится по тем же формулам, что



Фиг. 4



Фиг. 5

и раньше (формулы (1.5), (2.2), (2.3), (2.4)), всюду, за исключением зоны за средним электродом. Так как скорость v имеет разные знаки по обе стороны среднего электрода, то это должно приводить к образованию ударных волн, отходящих от конца среднего электрода.

Проведем расчет этих скачков уплотнения и течения за ними в первом приближении, предполагая, что скачки настолько сильные, что можно пренебречь давлением перед скачком уплотнения по сравнению с давлением за скачком. Так как число M потока перед скачком очень большое, то угол β наклона скачка к оси x будет небольшой, а следовательно, высота зоны за скачком будет мала по сравнению с шириной канала. Учитывая это, а также то, что ударная волна образуется как бы при обтекании клина неравномерным потоком (из симметрии следует, что ось x — линия тока нулевой кривизны), можно пренебречь с рассматриваемой степенью точности изменением давления поперек зоны за ударной волной. Обозначая буквами без индекса величины перед ударной волной, а буквами с индексом $^{\circ}$ сверху — за ударной волной, при сделанных предположениях сможем написать [2]

$$p^{\circ} = \frac{2}{\kappa + 1} \rho u_n^2, \quad p^{\circ} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} p, \quad u_n^{\circ} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} u_n, \quad u_{\tau}^{\circ} = u_{\tau} \quad (3.1)$$

где u_n, u_{τ} — проекции скорости на нормаль и касательную к ударной волне. Они могут быть выражены через U, v и угол β наклона скачка к оси x следующим образом:

$$u_{\tau} = U \cos \beta + v \sin \beta \approx u_0 + u, \quad u_n = -U \sin \beta + v \cos \beta \approx -u_0 \beta + v \quad (3.2)$$

Здесь во второй части равенств учтено, что $\beta \ll 1, v/u_0 \ll 1$ и $u/u_0 \ll 1$. Координата скачка уплотнения y_c может быть вычислена из рассмотрения поведения струек тока за скачком. Пусть газ в струйке тока, которая пересекает ударную волну в сечении с координатой x_* , в рассматриваемом сечении с координатой x имеет плотность $\rho^{\circ}(x, x_*)$. Тогда расход газа в рассматриваемом сечении в этой струйке тока в первом приближении равен $dq = u_0 \rho^{\circ}(x, x_*) dy$. С другой стороны, рассматривая эту струйку в сечении x_* , находим, что

$$dq = -\rho(x_*) u_n(x_*) dx_*, \quad u_0 \rho^{\circ}(x, x_*) dy = -\rho(x_*) u_n(x_*) dx_* \quad (3.3)$$

В первом из этих равенств учтено, что $\cos \beta \approx 1$. Принимая, что течение за скачком адиабатическое и учитывая (3.1), найдем

$$\frac{\rho(x_*)}{\rho^{\circ}(x, x_*)} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{p^{\circ}(x_*, x_*)}{p^{\circ}(x, x_*)} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left[\frac{p^{\circ}(x_*)}{p^{\circ}(x)} \right]^{1/\kappa} \quad (3.4)$$

Из (3.3) с учетом (3.4) получаем

$$y_c = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \int_0^x \frac{u_n(x_*)}{u_0} \left[\frac{p^{\circ}(x_*)}{p^{\circ}(x)} \right]^{1/\kappa} dx = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \int_0^x \frac{[\beta(x_*) - v(x_*)/u_0]^{(\kappa+2)/\kappa}}{[\beta(x) - v(x)/u_0]^{2/\kappa}} dx_* \quad (3.5)$$

Дифференцируя (3.5) по x и учитывая, что $\beta = y_c', \beta' = y_c''$, получаем дифференциальное уравнение для определения y_c

$$\frac{2}{\kappa} y_c y_c'' - \frac{1}{\kappa + 1} \left[2y_c' + (\kappa - 1) \frac{v}{u_0} \right] \left(y_c' - \frac{v}{u_0} \right) - \frac{2}{\kappa} y_c \frac{v'}{u_0} = 0 \quad (3.6)$$

Граничными условиями для него будут

$$y_c = 0, \quad y_c' = \beta_0 = -0.5(\kappa - 1)v_0/u_0 \quad \text{при } x = 0 \quad (3.7)$$

Второе граничное условие выражает тот факт, что при $x = 0$ скорость v° за скачком равна нулю. При этом из (3.1) и (3.2) получаем (3.7). Интегрируя (3.6) с граничными условиями (3.7), найдем форму скачка уплотнения. На фиг. 5 сплошной кривой показана форма скачка уплотнения (в верхней половине канала), вычисленная для $\kappa = 5/3$ и $H_0^2/\rho_0 u_0^2 = 2.5$ (это соответствует случаю, когда вне ускорителя скорость возрастает примерно на 10% от значения на срезе ускорителя). На этой же фигуре пунктиром нанесены линии тока в канале, рассчитанные по уравнению $dy/dx = v/u_0$, где v дается формулой (2.3). Расчет линий тока проведен для значения параметра $A = 0.1$.

Полученная выше картина течения плазмы за срезом ускорителя, по крайней мере качественно, хорошо подтверждается данными эксперимента.

Так как газ за скачком уплотнения имеет более высокую температуру, чем в ядре потока, то область за скачками уплотнения значительно ярче светится. При экспериментах обычно хорошо видны границы ярко светящейся области за центральным электродом. Эти границы и являются скачками уплотнения.

Поступила 22 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, 1956.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.