

## ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН ГОРЕНИЯ ГАЗА В ИНЕРТНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Н. А. Какуткина, В. С. Бабкин

Институт химической кинетики и горения СО РАН, 630090 Новосибирск

Проведены теоретические и экспериментальные исследования стационарных сферических волн горения газа в пористых средах. Показано, что волны в сферически сходящихся и расходящихся газовых потоках различаются типом устойчивости: устойчивы в расходящемся и неустойчивы в сходящемся потоке. Предложена математическая модель стоячих сферических волн, устанавливающая зависимости координаты стоячей волны от расхода газа, состава смеси, параметров пористой среды и газа и адекватно описывающая эксперимент. Показано, что учет теплопотерь приводит к появлению пределов существования стоячих сферических волн.

Систематические исследования горения газов в инертных пористых средах, результаты которых суммированы в [1, 2], выявили существенную роль межфазного теплообмена в этих процессах. При постоянстве тепловых и кинетических параметров газовой смеси и пористой среды ключевым параметром, определяющим такие характеристики волны горения, как направление и скорость распространения, тепловая структура волны и равновесная температура продуктов, является скорость фильтрации газа  $v$ . Теоретические модели и экспериментальные исследования показывают, что при скорости фильтрации, не зависящей от координаты распространения, реализуется стационарная волна горения, характеристики которой зависят от значения  $v$ . При сферической симметрии потока скорость фильтрации является функцией координаты при постоянстве расхода газа. Это позволяет ожидать новых явлений и закономерностей при горении газа в сферической волне. Настоящая работа посвящена исследованию характеристик стационарных сферических волн горения газа в инертных пористых средах.

### МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

Рассматриваются структура и характеристики стационарной тепловой волны в пористой среде, заполняющей сферу. Через пористую среду в радиальном направлении движется горячая газовая смесь, которая реагирует в зоне тепловой волны. Фильтрация газовой смеси может осуществляться от центра к периферии сферы (расходящийся поток) или наоборот (сходящийся поток). Пористая среда предпола-

гается химически инертной, а коэффициент теплообмена газа с пористой средой в общем случае — конечным; температуры газа и пористой среды, вообще говоря, различны. Размер полостей в пористой среде считается меньшим критического диаметра [3], поэтому волну горения будем рассматривать в режиме низких скоростей (РНС) [1].

Одномерную сферическую волну РНС можно описать следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (c_{\theta} \rho_{\theta} \theta) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_{\theta} r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_0 S_c}{1-m} (T - \theta), \\ \frac{\partial}{\partial t} (c_T \rho_T T) &= \mp \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (c_T \rho_T v r^2 T) - \\ &\quad - \frac{\alpha_0 S_c}{m} (T - \theta) + Q_{\rho T} W(\eta, T), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_T \eta) = \mp \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_T v \eta) - \rho_T W(\eta, T),$$

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} = \mp \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\rho_T v r^2)}{\partial r}, \quad \rho_T T = \text{const},$$

состоящей из уравнений переноса тепла в пористой среде и газе, переноса массы недостающего компонента газовой смеси, сохранения полной массы газа и уравнения состояния. Здесь  $t$  и  $r$  — текущее время и координата;  $\theta$  и  $T$  — температура пористой среды и газа;  $\eta$  — относительная массовая концентрация недостающего компонента;  $v$  — скорость газа;  $\rho_{\theta}$  и  $\rho_T$  — плотности пористой среды и газа, а  $c_{\theta}$  и  $c_T$  — соответствующие теплоемкости;  $\lambda_{\theta}$  — коэффициент теплопроводности пористой среды;  $m$  — пористость;  $\alpha_0$  — коэффициент теплообмена;  $S_c$  — удельная поверхность пористой среды;

$Q$  — тепловой эффект реакции;  $W(\eta, T)$  — скорость химической реакции, представляемая в виде  $W(\eta, T) = \eta k_0 \exp(-E/RT)$ , где  $E$  — энергия активации,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $k_0$  — предэкспонент. Двойные знаки в уравнениях относятся соответственно к расходящемуся (верхний знак) и сходящемуся потокам газа.

Исследование стационарных сферических волн горения сводится к анализу стационарных решений системы (1). При больших значениях  $r$  система (1) переходит в систему, описывающую плоскую волну горения РНС [1]. Для таких волн в [4] показано, что при постоянной скорости фильтрации существует решение, определяющее стационарную волну горения. В сферическом случае скорость фильтрации меняется с координатой волны ( $v \sim 1/r^2$ ), и существование стационарного решения проблематично. Предположим, что существует стационарное решение системы (1), которое описывает сферическую волну горения, распространяющуюся в лабораторной системе координат с постоянной скоростью  $u$ . Тогда, переходя в движущуюся систему координат (т. е. к переменным  $t, x = r - ut$ ) и приравнявая нулю производные по времени, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых в явном виде присутствует время  $t$ , и, следовательно, решение этой системы не будет стационарным. Исключить время из уравнений, описывающих стационарное решение, можно только положив  $u = 0$  (случай стоячей волны). Поэтому единственным стационарным состоянием сферической волны может быть стоячая волна, т. е. волна, покоящаяся в лабораторной системе координат. Таким образом, исследование стационарных сферических волн РНС сводится к исследованию стоячих волн.

Из уравнения сохранения массы получим  $\rho_T v r^2 = \text{const} = G_0$ , где  $G_0$  — с точностью до коэффициента массовый расход газа через сферу. С учетом этого, а также постоянства  $c_\theta, c_T$  и  $\rho_\theta$  система (1) приобретает вид

$$c_\theta \rho_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_\theta r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\alpha_0 S_c}{1-m} (T - \theta),$$

$$0 = \mp \frac{c_T G_0}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\alpha_0 S_c}{m} (T - \theta) + Q \rho_T W(\eta, T), \quad (2)$$

$$\rho_T \frac{\partial \eta}{\partial t} = \mp \frac{G_0}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \rho_T \tilde{v} \tilde{v}(\eta, T), \quad \rho_T \tilde{v} = \text{const}.$$

Рассмотрим сначала случай бесконечно интенсивного теплообмена газа с пористой сре-

дой ( $\alpha_0 = \infty$ ). При этом  $T \equiv \theta$  (однотемпературная модель). После преобразований получим систему, описывающую стоячую сферическую волну в одностепенном приближении:

$$\frac{1}{m r^2} \frac{d}{dr} \left( \lambda_\theta r^2 \frac{dT}{dr} \right) \mp \frac{c_T G_0}{1-m} \frac{1}{r^2} \frac{dT}{dr} + \frac{Q \rho_T W(\eta, T)}{1-m} = 0, \quad (3)$$

$$\pm \frac{G_0}{r^2} \frac{d\eta}{dr} + \rho_T W(\eta, T) = 0.$$

Граничные условия имеют вид

$$r = r_0: \quad T = T_0, \quad \eta = 1,$$

$$(1-m) r_0^2 \lambda_\theta \frac{dT}{dr} = \pm c_T m G_0 (T_0 - T_i) \quad (4)$$

в свежей смеси и вид

$$r^2 \frac{dT}{dr} = 0, \quad \eta = 0 \quad (5)$$

в продуктах (при  $r \rightarrow \infty$  для расходящегося газового потока и при  $r = 0$  — для сходящегося). Здесь  $T_i$  — температура газа на входе в пористую среду,  $r_0$  — координата начального сечения. Частный случай этой задачи, а именно для расходящегося потока с  $r_0 = 0$ , рассмотрен в [5].

Исключим величину  $W$  из (3) и проведем интегрирование с учетом граничных условий от  $r_0$  до  $r$ :

$$\frac{\lambda_\theta}{m} \frac{1}{r^2} \frac{dT}{dr} \mp \frac{c_T G_0}{1-m} (T - T_i) \mp \frac{Q G_0}{1-m} (\eta - 1) = 0. \quad (6)$$

Из этого соотношения легко получить равновесную температуру в продуктах:  $T_e = T_i + Q/c_T = T_b$ , т. е., как и в случае плоской стоячей волны, равновесная температура равна адиабатической температуре горения смеси в условиях ламинарного пламени [1].

Координату узкой зоны химических реакций обозначим через  $r^*$ . Тогда условие сшивки на зоне химических реакций имеет вид

$$T_{r^*+0} = T_{r^*-0},$$

$$\frac{\lambda_\theta}{m} (r^*)^2 \left( \frac{dT}{dr} \Big|_{r^*+0} - \frac{dT}{dr} \Big|_{r^*-0} \right) = \mp \frac{Q G_0}{1-m}.$$

Вне зоны химических реакций  $W(\eta, T) = 0$ . Интегрируя (6) с учетом граничных условий (4) и (5), получим распределение температуры в зоне подогрева

$$T_1 = T_i + (T_b - T_i) \exp \left[ \mp \mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right) \right], \quad (7)$$

$$\mu = \frac{c_T G_0 m}{\lambda_\theta (1 - m)},$$

и в продуктах

$$T_2 \equiv T_b.$$

Здесь и далее индекс 1 относится к зоне подогрева, 2 — к продуктам сгорания. Значение  $T_0$  определяется из (7) при  $r = r_0$ :

$$T_0 = T_i + (T_b - T_i) \exp \left[ \pm \mu \left( \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r_0} \right) \right].$$

Таким образом, температура  $T_0$  зависит как от координаты начального сечения  $r_0$ , так и от положения стоячей волны. В случае расходящегося потока  $T_0 = T_i$  при  $r_0 = 0$ . В сходящемся сферическом потоке  $T_0 = T_i + (T_b - T_i) \exp(-\mu/r^*)$  при  $r_0 \rightarrow \infty$ .

Соотношение для  $r^*$  найдем, проинтегрировав второе уравнение системы (3) в зоне химических реакций. Для этого воспользуемся методом встречной экстраполяции, предложенным в [2]. Его суть состоит в том, что температурные и концентрационные профили из зон подогрева и продуктов сгорания линейно экстраполируются в зону химических реакций и берется средняя величина. В зоне химических реакций получим

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \left[ \eta_2(r^*) + \eta_1(r^*) + \frac{d\eta_2}{dr}(r^*)(r - r^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\eta_1}{dr}(r^*)(r - r^*) \right] = \frac{1}{2}, \\ T &= \frac{1}{2} \left[ T_2(r^*) + T_1(r^*) + \frac{dT_2}{dr}(r^*)(r - r^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dT_1}{dr}(r^*)(r - r^*) \right] = T_b \pm \frac{(T_b - T_i)\mu(r - r^*)}{2(r^*)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя  $\eta$  и  $T$  в уравнение

$$\mp \frac{G_0}{(r^*)^2} \frac{d\eta}{dr} = \rho_0 \frac{T_0}{T_b} k_0 \eta \exp \left( -\frac{E}{RT} \right)$$

и интегрируя по  $r$  от  $r_0$  до  $r^*$ , запишем

$$\begin{aligned} G_0^2 &= \frac{\rho_0(r^*)^4 k_0 \lambda_\theta (1 - m) RT_b T_i \exp(-E/RT_b)}{c_T m (T_b - T_i) E} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \exp \left[ \pm \frac{E(T_b - T_i)\mu(r_0 - r^*)}{2RT_b^2 (r^*)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если  $r_0 = \infty$  (сходящийся поток), то

$$G_0^2 = \frac{(1 - m) \lambda_\theta \rho_0 (r^*)^4 k_0 RT_b T_i \exp(-E/RT_b)}{m c_T (T_b - T_i) E}.$$

При  $r_0 = 0$  (расходящийся поток)

$$G_0^2 = \frac{(1 - m) \lambda_\theta \rho_0 (r^*)^4 k_0 RT_b T_i \exp(-E/RT_b)}{c_T m (T_b - T_i) E} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{E(T_b - T_i)\mu}{2RT_b^2 r^*} \right] \right\}.$$

Оценки показывают, что  $\mu/r^* \gg 1$  для реальных физических значений параметров, поэтому последнее выражение совпадает с соотношением, полученным для сходящегося потока и, следовательно, положение стоячей сферической волны как для сходящегося, так и для расходящегося потока определяется одним и тем же соотношением:

$$r^* = G_0^{1/2} \left[ \frac{m(T_b - T_i) c_T E \exp(E/RT_b)}{(1 - m) k_0 RT_b \rho_0 T_i \lambda_\theta} \right]^{1/4}. \quad (8)$$

Из (7) определим толщину тепловой зоны в волне:

$$\Delta r = \left| \frac{(r^*)^2}{\pm r^* + \mu} \right|.$$

Для случая  $\mu/r^* \gg 1$ , используя (8), получим

$$\Delta r = \left[ \frac{E(T_b - T_i) \lambda_\theta (1 - m) \exp(E/RT_b)}{c_T \rho_0 k_0 RT_b T_i m} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Подстановка численных значений, например, для 2 %-й пропановоздушной смеси дает  $\Delta r \approx 0,2$  см. Интересно заметить, что толщина тепловой зоны в стоячей волне не зависит от расхода газа  $G_0$ , а определяется только термодинамическими и кинетическими параметрами газовой смеси и пористой среды, причем чем выше температура горения смеси, тем резче тепловой фронт.

Перейдем к рассмотрению стоячих сферических волн при конечных значениях  $\alpha$ . Из (2) имеем систему уравнений, описывающую стационарную волну:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \lambda_\theta r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{\alpha_0 S_c}{1 - m} (T - \theta) &= 0, \\ \mp \frac{c_T G_0}{r^2} \frac{dT}{dr} - \frac{\alpha_0 S_c}{m} (T - \theta) + Q \rho_T W &= 0, \quad (10) \\ \mp \frac{G_0}{r^2} \frac{d\eta}{dr} - \rho_T W &= 0, \quad \rho_T T = \text{const.} \end{aligned}$$

Для того чтобы получить аналитическое решение такой системы, введем упрощающие ограничения. Пусть узкая зона химических реакций находится в окрестности  $r = r^*$ . Перейдем в систему координат, связанную с волной:  $x = r - r^*$ . Будем считать, что  $|x| \ll r^*$ , т. е. будем рассматривать только стоячие волны со значением  $r^*$ , много большим толщины тепловой зоны. Используя приведенную выше оценку ширины тепловой зоны из однотемпературной модели, получим, что  $r^* \gg 0,2$  см (для более

агрессивных смесей эта величина еще меньше). Таким образом, уже для  $r^* \geq 2$  см приводимое ниже рассмотрение будет справедливым. Очевидно, что это незначительно ограничивает прогностические свойства модели. С помощью этого ограничения можно перейти к бесконечным граничным условиям в зоне подогрева

$$x = \mp\infty: \quad \eta = 1, \quad T = T_0, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0$$

и в продуктах

$$x = \pm\infty: \quad \eta = 0, \quad \frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx} = 0.$$

После понижения порядка системы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_\theta}{m} \frac{d\theta}{dx} \mp \frac{c_T G_0}{(1-m)(r^*)^2} (T - T_0) \mp \\ \mp \frac{Q G_0}{(r^*)^2 (1-m)} (\eta - 1) = 0, \\ \mp \frac{c_T G_0}{(r^*)^2} \frac{dT}{dx} - \frac{\alpha_0 S_c}{m} (T - \theta) + Q \rho_\theta W = 0, \\ \mp \frac{G_0}{(r^*)^2} \frac{d\eta}{dx} - \rho_T W = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим равновесную температуру в продуктах:  $T_e = T_0 + Q/c_T = T_b$ . Аналогично [1] введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{L}, \quad y = \frac{T - T_0}{T_m - T_0}, \quad z = \frac{\theta - T_0}{T_m - T_0}, \\ L = \frac{(1-m)\lambda_\theta(r^*)^2}{m c_T G_0}, \quad y_b = \frac{Q}{c_T(T_m - T_0)}, \\ \alpha = \frac{\alpha_0 S_c L (r^*)^2}{m c_T G_0}, \quad \tau = \frac{L \rho_m (r^*)^2 k_0 e^{-1/\beta}}{G_0}, \\ \beta = \frac{R T_m}{E}, \quad \delta = \frac{T_m - T_0}{T_m}, \quad \gamma = \frac{\beta}{\delta}, \\ W(\eta, y) = \eta \exp \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{y - 1}{1 + \delta(y - 1)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $T_m$  — максимальная температура, а  $\rho_m$  — плотность газа при  $T_m$ . В безразмерных переменных система приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\xi} \mp y \mp y_b(\eta - 1) = 0, \\ \mp \frac{dy}{d\xi} - \alpha(y - z) + y_b \tau W(\eta, y) = 0, \\ \mp \frac{d\eta}{d\xi} - \tau W(\eta, y) = 0. \end{aligned}$$

Соответственно преобразуются и граничные условия:

$$\begin{aligned} \xi = \mp\infty: \quad \eta = 1, \quad y = 0, \quad \frac{dz}{d\xi} = 0; \\ \xi = \pm\infty: \quad \eta = 0, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{dz}{d\xi} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку задача полностью сведена к задаче для плоской волны, рассмотренной в [1], приведем только конечное выражение для определения  $r^*$ :

$$y_b \tau \exp \left[ \frac{\varphi(z_m)}{\gamma} + 1 \right] = \frac{\gamma \alpha}{\varphi'(z_m)}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} z_m = \frac{1 - \exp(-\mu_1 e/\alpha)}{\mu_1 e} \alpha y_b \frac{\alpha/2 + C}{2C}, \\ C = \left( \frac{\alpha^2}{4} + \alpha \right)^{1/2}, \quad \varphi(z_m) = \frac{z_m - 1}{1 + \delta(z_m - 1)}. \end{aligned}$$

Здесь  $e$  — основание натурального логарифма. Уравнение (11) решалось численно. Определялись положение стоячей волны  $r^*$  и ее тепловая структура. Расчеты проведены для пропановоздушных смесей с использованием следующих численных параметров:  $\rho_T = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_T = 1,3 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К),  $k_0 = 1 \cdot 10^{10}$  с<sup>-1</sup>,  $E = 170$  кДж/моль,  $\lambda_\theta = 4$  Вт/(м · К). Результаты расчетов по двухтемпературной модели и их сопоставление с предсказаниями одностепенной модели обсуждаются ниже.

## ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПТЕРЬ

При распространении тепловых волн в бесконечной сфере, заполненной пористой средой, теплопотери во внешнюю среду отсутствуют. Однако, сферические волны горения могут быть получены в сферическом секторе, ограниченном внешними стенками. В этом случае теплопотери через стенки, возрастающие в узкой (близкой к вершине) части сектора, могут влиять на структуру и характеристики волн горения. Поскольку экспериментальные исследования стоячих волн в настоящей работе проведены именно в условиях сферического сектора, рассмотрим влияние этих теплопотерь.

Первое уравнение системы (10) с учетом теплопотерь приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \lambda_\theta r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{\alpha_0 S_c (T - \theta)}{1 - m} - \\ - \frac{1}{r} \frac{\alpha_1 e}{1 - m} (\theta - T_0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_{1e} = \alpha_{0e} \sin \psi / (1 - \cos \psi)$ ,  $\alpha_{0e}$  — коэффициент внешней теплоотдачи,  $2\psi$  — угол раствора сферического сектора. Используя введенные ранее безразмерные величины, для значений  $r^*$ , много больших толщины тепловой зоны, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \alpha(y - z) - \alpha_e z &= 0, \\ \mp \frac{dy}{d\xi} + \alpha(y - z) + y_b \tau W(\eta, y) &= 0, \\ \mp \frac{d\eta}{d\xi} - \tau W(\eta, y) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\alpha_e = \frac{\alpha_{0e} \sin \psi}{1 - \cos \psi} \frac{Lr^*}{m c_T G_0}.$$

Таким образом, систему снова удалось свести к соответствующей системе для плоских волн РНС. Характеристическое уравнение системы (12) имеет три разных действительных корня, из которых  $\mu_1 > 0$  ( $< 0$ ) и  $\mu_2, \mu_3 < 0$  ( $> 0$ ). Знак в скобках соответствует сходящемуся потоку. Из условия ограниченности решений следует, что в зоне подогрева

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 \exp(\mu_1 \xi), \\ y_1 &= \frac{a_1 \alpha}{\mu_1 \pm \alpha} \exp(\mu_1 \xi), \quad \eta_1 = 1 \end{aligned}$$

и в продуктах

$$\begin{aligned} z_2 &= -a_2 \exp(\mu_2 \xi) - a_3 \exp(\mu_3 \xi), \\ y_2 &= -\frac{a_2 \alpha}{\mu_2 \pm \alpha} \exp(\mu_2 \xi) - \frac{a_3 \alpha}{\mu_3 \pm \alpha} \exp(\mu_3 \xi), \\ \eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты определяются из условия сшивки решений в зоне реакций:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{y_b(\mu_1 + \alpha)(\mu_2 + \alpha)(\mu_3 + \alpha)}{\alpha(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)}, \\ a_2 &= \frac{y_b(\mu_1 + \alpha)(\mu_2 + \alpha)(\mu_3 + \alpha)}{\alpha(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)}, \\ a_3 &= -\frac{y_b(\mu_1 + \alpha)(\mu_2 + \alpha)(\mu_3 + \alpha)}{\alpha(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)}, \\ y_b &= \left[ 1 + \frac{2\mu_1(\mu_1 \pm \alpha)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Значения  $r^*$  определяются путем численного решения уравнения (11), в котором

$$z_m = \frac{1 - e^{-2,7\mu_1 \alpha}}{2,7\mu_1} a_1 \alpha.$$

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТОЯЧИХ ВОЛН

Принципиально важной характеристикой стоячих волн является их устойчивость относительно сдвига. Рассмотрение этого вопроса требует решения нестационарной задачи. Стремясь остаться в рамках аналитического подхода, рассмотрим устойчивость решений упрощенной адиабатической однотемпературной модели для значений  $r^*$ , много больших толщины тепловой зоны. Для этого воспользуемся методом малых возмущений. Однотемпературная модель нестационарной сферической волны может быть получена из (1):

$$\begin{aligned} \frac{c_\theta \rho_\theta}{m} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_\theta r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \mp \\ &\mp \frac{c_T G_0}{r^2 (1-m)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{Q \rho_T W}{1-m}, \\ \rho_T \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \mp \frac{G_0}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \rho_T W, \quad \frac{\partial \rho_T}{\partial t} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{\partial G_0}{\partial r}, \\ G_0 &= \rho_T v r^2, \quad \rho_T T = \rho_b T_b. \end{aligned}$$

Здесь  $T_b$  — адиабатическая температура горения смеси, а  $\rho_b$  — соответствующая ей плотность газа. Перейдем в систему координат, связанную с волной:  $x = r - R + ut$ , где  $R$  — координата начала отсчета, а  $u$  — стационарная скорость волны. Системе координат, связанной с невозмущенной волной, соответствуют параметры  $u = 0$  и  $R = r^*$ . Учитывая, что значения  $r^*$  много больше толщины зоны прогрева, получим

$$\begin{aligned} \frac{c_\theta \rho_\theta}{m} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda_\theta}{m} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \mp \frac{c_T G_0}{(r^*)^2 (1-m)} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{Q \rho_T W}{1-m}, \\ \rho_T \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \mp \frac{G_0}{(r^*)^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \rho_T W, \\ \rho_b \frac{T_b}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} &= \mp \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial G_0}{\partial x}. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия для стационарной задачи запишем в виде:  $T(\mp \infty) = T_0$ ,  $dT/dx = 0$  в зоне подогрева,  $dT/dx = 0$  в продуктах. Обозначим координату зоны реакции  $x = x_f$ . Тогда дополнительно имеем условия сшивки решений в зоне химических реакций:

$$\begin{aligned} T(x_f - 0) &= T(x_f + 0), \quad G_0(x_f + 0) = G_0(x_f - 0), \\ \frac{\lambda_\theta}{m} \left[ \frac{dT}{dx}(x_f + 0) - \frac{dT}{dx}(x_f - 0) \right] &\pm \frac{Q G_0}{(r^*)^2 (1-m)} = 0. \end{aligned}$$

Для невозмущенной волны  $x_f = 0$ . Распределения температуры в невозмущенной стоячей волне в зоне подогрева и в продуктах имеют вид

$$T_1 = T_0 + (T^* - T_0) \exp(\pm \mu x),$$

$$\mu = \frac{c_T G_0 m}{(1-m)\lambda_\theta (r^*)^2}; \quad T_2 \equiv T_0 + Q/c_T = T_b.$$

Выражение для  $r^*$  получим, интегрируя стационарное уравнение для  $\eta$  по зоне химических реакций и применяя метод встречной экстраполяции:

$$(r^*)^4 = \frac{mEQG_0^2 \exp(E/RT^*)}{(1-m)k_0\rho_0 T_0 RT_b \lambda_\theta}. \quad (14)$$

Перейдем к использованию метода малых возмущений. Зададим возмущение координаты реакции в виде  $x_f = \delta x^* \exp(\omega t)$ . Соответствующие значения возмущенных  $T$  и  $G_0$  вне зоны химических реакций равны:

$$\begin{aligned} T_n &= T_n^0 + \delta T_n \exp(\omega t), \\ G_{0n} &= G_0^0 + \delta G_n \exp(\omega t), \end{aligned} \quad (15)$$

где индексом 0 сверху помечены невозмущенные решения,  $n = 1, 2$ , а  $\omega$  — инкремент возмущения. Поскольку в зоне продуктов выгорание полное, а в зоне подогрева диффузия и выгорание отсутствуют,  $\eta$  считается неизменным. Всё изменение абсолютной концентрации недостающего компонента смеси обусловлено изменением плотности газа. Подстановка (15) в (13) вне зоны химических реакций дает:

$$\begin{aligned} \frac{c_\theta \rho_\theta}{\lambda_\theta} \omega \delta T_n &= \frac{d^2 \delta T_n}{dx^2} \mp \mu \frac{d\delta T_n}{dx} \mp \mu \frac{\delta G_n}{G_0^0} \frac{dT_n^0}{dx}, \\ \frac{\rho_b T_b}{T_n^{02}} \omega \delta T_n &= \mp \frac{1}{(r^*)^2} \frac{d\delta G_n}{dx}. \end{aligned} \quad (16)$$

После линеаризации граничных условий и условий на границах зоны реакции получим дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} \delta T_1(\mp\infty) &= 0, \quad \frac{d\delta T_1}{dx}(\mp\infty) = 0, \quad \frac{d\delta T_2}{dx}(\pm\infty) = 0, \\ \delta T_2(0) &= \delta T_1(0) \pm (T_b - T_0)\mu \delta x^*, \\ \frac{d\delta T_2}{dx}(0) - \frac{d\delta T_1}{dx}(0) - (T_b - T_0)\mu^2 \delta x^* &\pm \\ \pm \mu(T_b - T_0) \frac{\delta G(0)}{G_0^0} &= 0, \quad \delta G_1(0) = \delta G_2(0); \end{aligned} \quad (17)$$

$\delta T_n$  будем искать в виде  $\delta T_n = \varepsilon(T_b - T_0) \exp(kx)$ ;  $\delta G_n$  получается интегрированием второго уравнения (16) после линеаризации  $1/T_n^{02}$ . Подстановка выражения для  $\delta G_n$  в первое уравнение (16) показывает, что последний член в правой части этого уравнения по порядку величины отличается от члена в левой части как  $c_T \rho_T / c_\theta \rho_\theta$ , т. е. примерно в 1000 раз меньше. Это позволяет пренебречь последним

членом в первом уравнении (16). Тогда из (16) имеем

$$k^2 \mp \mu k - \omega/a_\theta = 0, \quad a_\theta = \lambda_\theta / c_\theta \rho_\theta.$$

Отсюда  $k_1 = \pm(\mu/2 + C)$ ,  $k_2 = \pm(\mu/2 - C)$ ,  $C = (\mu^2/4 + \omega/a_\theta)^{1/2}$ . Знаки выбраны из условия убывания возмущения при удалении от зоны реакции.

Подставляя выражение для  $\delta G(0)$  в пятое уравнение (17), видим, что последний член примерно на три порядка величины меньше, чем предпоследний, что позволяет пренебречь им. Тогда, используя условие сшивки (17), получим

$$\begin{aligned} \delta T_1 &= \mp(T_b - T_0)\mu \delta x^* \frac{\mu/2 + C}{2C} \times \\ &\times \exp\left[\pm\left(\frac{\mu}{2} + C\right)x\right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta T_2 = \mp(T_b - T_0)\mu \delta x^* \frac{\mu/2 - C}{2C} \exp\left[\pm\left(\frac{\mu}{2} - C\right)x\right].$$

Чтобы получить соотношения для  $\omega$ , воспользуемся приемом, предложенным в [3] при рассмотрении диффузионно-тепловой неустойчивости ламинарного пламени. Устремим толщину зоны химических реакций к нулю и выразим через  $M$  количество вещества, сгорающего в единицу времени на единице поверхности зоны реакции. Рассуждая аналогично [3], легко показать, что  $M \sim \rho_T^{1/2} \exp(-E/2RT^*)$ , где  $T^*$  — температура на поверхности зоны реакции. С другой стороны,  $M = G_0/S$ , где  $S$  — площадь поверхности пламени, равная  $4\pi(r^* + x_f)^2$ . Учитывая, что  $T^* = T_b + \delta T_2(0)$ , имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_b + \delta \rho \exp(\omega t)}{\rho_b}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{E}{2R}\left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T_b}\right)\right) &= \\ = \frac{G_0^0 + \delta G \exp(\omega t)}{G_0^0} \left(\frac{r^*}{r^* + x_f}\right)^2. \end{aligned}$$

После линеаризации получим

$$\frac{E}{2RT_b} \frac{\delta T_2(0)}{T_b} - \frac{\delta T_2(0)}{2T_b} - \frac{\delta G(0)}{G_0^0} - 2 \frac{\delta x^*}{r^*}. \quad (19)$$

Поскольку  $E/RT_b \gg 1$ , в левой части пренебрегаем вторым членом. Значение  $\delta G(0)/G_0^0$  по порядку величины равно  $\delta x^* \mu c_T \rho_T / c_\theta \rho_\theta$ . Оценки показывают, что при практически используемых значениях параметров последняя величина много меньше, чем  $2\delta x^*/r^*$ , и поэтому первым членом в правой части (19) также можно пренебречь. Подставляя в (19)  $\delta T_2(0) =$

$\mp(T_b - T_0)\mu\delta x^*(\mu/2 - C)/2C$  из (18), получим соотношение для  $\omega$ :

$$\frac{c_{\theta}\rho_{\theta}\omega}{\lambda_{\theta}} = -\frac{\mu^2(1 \pm 2a)}{4(a \pm 1)^2}, \quad (20)$$

где  $a = EQr^*\mu/4Rc_{\theta}T_0^2$ . При значениях  $r^*$ , много больших ширины тепловой зоны,  $a \gg 1$ . Таким образом, знак  $\omega$  определяется знаком в скобках правой части (20). Для расходящегося потока  $\omega < 0$ . Это означает, что стоячая сферическая волна в расходящемся потоке всегда устойчива по отношению к сдвигу. Для сходящегося потока  $\omega > 0$ , т. е. стоячая волна неустойчива. Любое случайное отклонение от положения равновесия будет нарастать во времени. Практически это может означать невозможность реализации стоячей сферической волны в сходящемся потоке, несмотря на то, что теоретически такая волна существует.

#### СРАВНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ И ПЛОСКИХ СТОЯЧИХ ВОЛН

Интересно сопоставить характеристики сферических и плоских стоячих волн. Характеристики плоских стоячих волн приведены в [1]. Чтобы оставаться в рамках явного аналитического подхода, сопоставим результаты, полученные по одностепенной модели. Из [1] для плоских стоячих волн получим

$$T_1 = T_0 + (T_b - T_0) \exp(\mu x),$$

$$\mu = \frac{c_T \rho_0 v^* m}{(1 - m)\lambda_{\theta}}, \quad T_2 = T_b, \quad (21)$$

где  $v^*$  — скорость фильтрации газа, при которой наблюдается стоячая волна,

$$v^* = \left[ \frac{1 - m}{m} \frac{\lambda_{\theta} R T_0 T_b k_0 \exp(-E/RT_b)}{EQ\rho_0} \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Для сферических волн вместо  $v^*$  определяется положение стоячей волны  $r^*$  при данном расходе  $G_0$ . Отсюда находим скорость фильтрации в месте установления стоячей волны:  $v^* = G_0/\rho_0(r^*)^2$ . Используя выражение (8) для  $r^*$ , получим, что сферическая волна стабилизируется при том же значении  $v^*$ , что и плоская.

Толщина тепловой зоны для плоской волны равна  $1/\mu$  или

$$\Delta x = \frac{1 - m}{m} \frac{\lambda_{\theta}}{c_T \rho_0 v^*} =$$

$$= \left[ \frac{1 - m}{m} \frac{EQ\lambda_{\theta} \exp(E/RT_b)}{\rho_0 k_0 R T_0 T_b} \right]^{1/2},$$

что совпадает с толщиной тепловой зоны сферической стоячей волны (9). Совпадают также равновесные температуры продуктов сгорания,  $T_e = T_b$ . Таким образом, при  $r^* \gg \Delta x$  согласно одностепенной модели кривизна не влияет на характеристики и структуру стоячих волн. Они одинаковы для плоских и сферических волн в сходящемся и расходящемся газовых потоках. Иная ситуация наблюдается в проблеме устойчивости. Здесь изменение знака кривизны по отношению к направлению газового потока меняет характер устойчивости. Интересно поэтому рассмотреть устойчивость плоских стоячих волн. Сделав это аналогично случаю сферических волн горения, найдем, что  $\omega = 0$ , т. е. стоячая волна находится в безразличном равновесии. Случайно возникшие отклонения от положения равновесия не развиваются, и волна стабилизируется в новом положении. Таким образом, кривизна определяет характер устойчивости стоячих волн. В расходящемся газовом потоке стоячая волна устойчива относительно сдвига, в сходящемся — неустойчива, и плоская волна занимает промежуточное положение, находясь в безразличном равновесии.

#### МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Изучение сферических волн РНС проводилось в кварцевом конусе, заполненном пористой средой. Если отвлечься от пристеночных эффектов, в таком конусе сохраняется сферическое распределение потоков и, следовательно, сферическая симметрия волны горения. В то же время в конусе технически проще, чем в сфере, решается проблема ввода и вывода газовой смеси при организации сходящегося и расходящегося газовых потоков. Угол раствора конуса  $14^\circ$ , толщина стенок 3 мм, высота конуса 40 см, а диаметр меньшего основания 2 см. Конус заполняли зернистым карборундом с размером зерен  $2 \div 3$  мм. По оси конуса с засыпкой устанавливали тонкостенный кварцевый капилляр с внутренним диаметром 2 мм и толщиной стенки 0,5 мм. В капилляр вводилась хромель-алюмелевая термопара с диаметром сая  $\approx 100$  мкм. Горючую газовую смесь составляли по известным расходам компонентов. Расходы компонентов — пропана и воздуха — измеряли ротаметрами типа РС-3 и РС-5. Давление газа перед засыпкой контролировалось образцовым манометром. Горючую смесь при комнатной температуре подавали с ниж-

него конца, а горение инициировали с верхнего открытого конца конуса. После прогрева пористой среды в ней формировалась волна горения с четким светящимся фронтом. Положение волны регистрировалось визуально по положению светящейся зоны относительно линейки, установленной около конуса.

Эксперимент проводили в следующем порядке. Смесь зажигали сверху, и волна вводилась в пористую среду. Затем устанавливали заданные режимные характеристики состава смеси и расхода. С этого момента начиналась регистрация координаты волны в зависимости от времени. Волна считалась стоячей, если ее координата не менялась в течение 40 мин.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 приведены типичные экспериментальные зависимости координаты фронта сферической волны от времени для расходящегося и сходящегося газовых потоков. Видно, что для расходящегося потока существует выделенная координата  $r = r^*$ , определяющая изменение направления распространения волны. При одних и тех же параметрах газовой смеси (состав смеси, расход) волна, инициированная при  $r > r^*$ , распространяется против потока (встречная волна), а при  $r < r^*$  — по потоку (спутная волна). В обоих случаях волна распространяется с замедлением и в конце концов

стабилизируется на уровне  $r = r^*$  (стоячая волна). Положение стабилизации  $r^*$  одинаково при подходе к нему сверху и снизу.

В сходящемся газовом потоке также существует координата, при переходе через которую меняется направление движения волны. Однако в этом случае волны горения не сходятся к  $r^*$ , а, наоборот, расходятся от нее. Вероятно, эту координату следует считать положением неустойчивой стоячей волны, хотя экспериментально получить собственно стоячую волну, т. е. волну горения, неподвижную в течение длительного времени, в сходящемся потоке не удалось, что, вероятно, обусловлено ее неустойчивостью. Таким образом, экспериментальные наблюдения подтверждают теоретические выводы о существовании двух типов стоячих сферических волн горения — устойчивых в расходящемся потоке и неустойчивых в сходящемся.

Согласно теоретическим моделям равновесная температура пористой среды в стоячей волне равна  $T_b$ . Термопарные измерения максимальной температуры пористой среды при установлении стоячей волны на бедных пропановоздушных смесях показали, что действительно  $T_{\max} = T_b \pm 5^\circ$ .

На рис. 2 представлены зависимости координаты стоячей волны от адиабатической температуры горения смеси. Расчеты по одностепенной модели дают значения  $r^*$ , занижен-

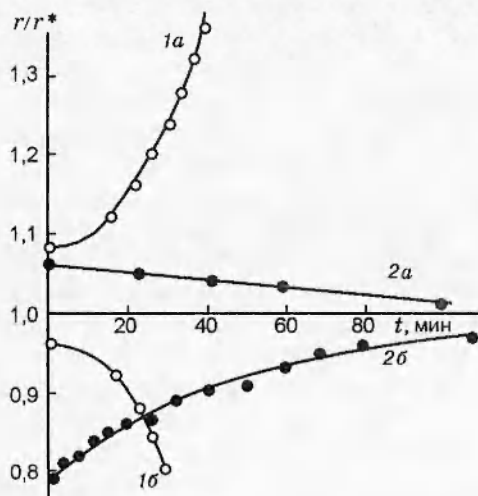


Рис. 1. Типичные траектории движения сферической волны горения газа в пористой среде:

1 — 2,5%  $C_3H_8$  + воздух, сходящийся поток; 2 — 2%  $C_3H_8$  + воздух, расходящийся поток; расход газа  $7 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с; а — встречная волна, б — спутная

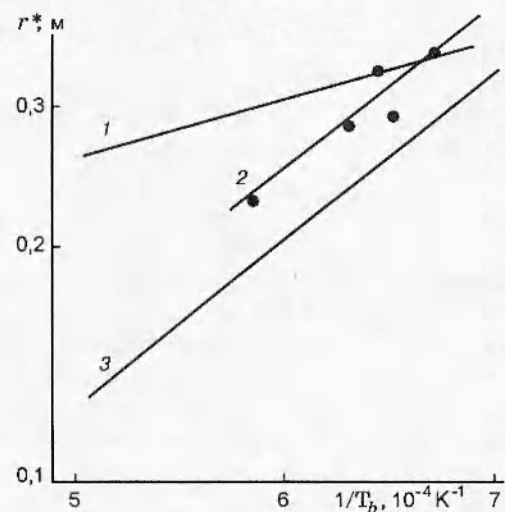


Рис. 2. Зависимости координаты стоячей сферической волны от  $1/T_b$ :

1 — расчет по двухтемпературной модели, 2 — эксперимент (расходящийся поток), 3 — расчет по одностепенной модели;  $G_0 = 0,076$  г/с



ные по отношению к двухтемпературной модели. В целом обе модели правильно описывают тенденцию изменения  $r^*$  в зависимости от  $T_b$ . Однако экспериментально измеренные значения  $r^*$  меняются с  $T_b$  резче, чем предсказывает двухтемпературная модель, и по наклону ближе к предсказаниям одностепенной.

Двух- и одностепенные модели дают одинаковые зависимости  $r^*$  от расхода газа  $G_0$  (рис. 3), а именно  $r^* \sim G_0^{1/2}$ . Количественно одностепенная модель дает меньшие значения  $r^*$  при тех же значениях  $G_0$ . Эксперимент показывает более резкую зависимость  $r^*$  от  $G_0$  по сравнению с теоретическими расчетами. Так, данные, приведенные на рис. 3, подчиняются закону  $r^* \sim G_0^{0,82}$ .

Одной из причин отклонения от предсказанной зависимости  $r^*(G_0)$  могут быть внешние теплопотери через стенку конуса. В пользу этого свидетельствуют данные рис. 4, на котором показаны значения скорости фильтрации  $v^*$ , при которых устанавливается стоячая волна. Теоретически  $v^*$  должна быть одинаковой при всех значениях  $G_0$  и равняться скорости фильтрации, при которой устанавливается плоская стоячая волна для той же газовой смеси. Действительно, при больших значениях  $G_0$ , когда относительные теплопотери уменьшаются, скорость фильтрации стремится к постоянной величине ( $v^* \approx 60$  см/с). Плоская стоячая волна в трубке диаметром 8 см стабилизируется при  $v^* = 62 \pm 3$  см/с. Однако по мере

уменьшения  $G_0$ , а следовательно, и  $r^*$  значения  $v^*$  увеличиваются (см. рис. 4), что позволяет предположить влияние теплообмена через стенку.

Рис. 5 показывает влияние теплопотерь через стенки конуса на координату  $r^*$ . Видно, что учет теплопотерь приводит к завышению значений  $r^*$  относительно адиабатических, причем с уменьшением  $G_0$  это завышение прогрессирует, приводя к более пологой кривой  $r^*(G_0)$ , чем в адиабатическом случае. Следовательно, теплопотери не могут объяснить более резкую экспериментальную зависимость  $r^*(G_0)$ , чем предсказывает адиабатическая модель. Кроме того, теплопотери приводят к тому, что при  $G_0$ , меньшем некоторого критического значения  $G_0^*$ , стоячая волна не существует. Чем выше коэффициент внешней теплопередачи  $\alpha_e$ , тем больше  $G_0^*$  (рис. 6).

Увеличение  $r^*$  при наличии теплопотерь можно понять, рассмотрев баланс тепла в зоне подогрева стоячей волны. В газовой фазе поступление тепла от пористой среды компенсируется конвективным сносом тепла, который пропорционален скорости фильтрации. Если за счет теплопотерь поступление тепла уменьшается, то, чтобы сохранить состояние стоячей волны, конвективный снос тоже должен уменьшиться, что достигается уменьшением  $v^*$ , т. е. увеличением  $r^*$ . Чем меньше  $G_0$ , а значит, и  $r^*$ , тем больше относительный вклад поверхности конуса в общий баланс тепла и больше

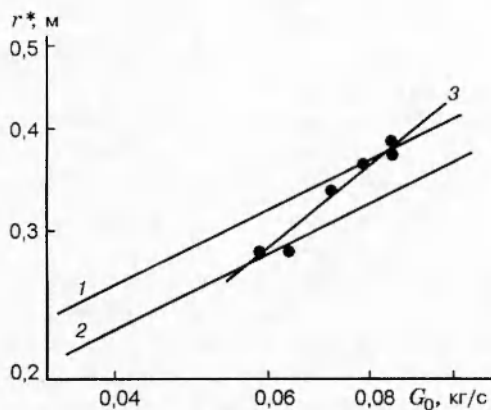


Рис. 3. Зависимости координаты стоячей сферической волны от  $G_0$ :

1 — расчет по двухтемпературной модели, 2 — по одностепенной, 3 — эксперимент (расходящийся поток); смесь 2%  $C_3H_8$  + воздух

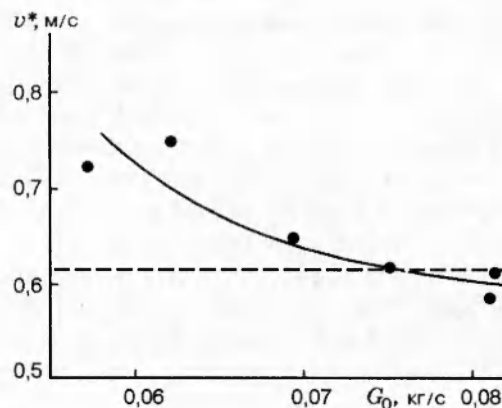


Рис. 4. Экспериментальная зависимость скорости фильтрации, при которой стабилизируется сферическая волна, от  $G_0$ :

расходящийся поток; штриховой линией показана скорость стабилизации плоской волны; смесь 2%  $C_3H_8$  + воздух

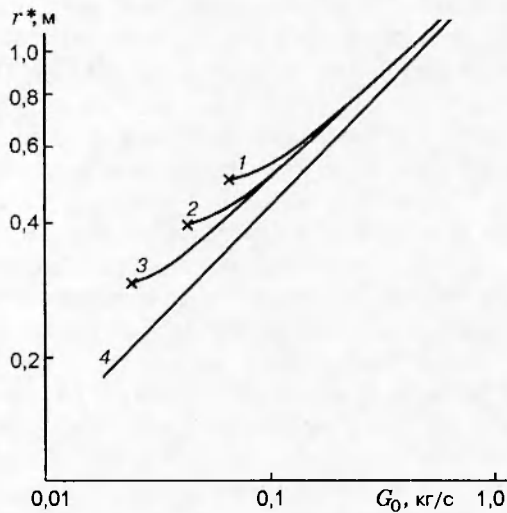


Рис. 5. Расчетные зависимости положения стоячей сферической волны в конусе от расхода газа при наличии внешних теплотерь:

$\alpha_{1e} = 1000$  (1), 800 (2), 600 (3), 0 (4) Вт/(м<sup>2</sup>·К); смесь 2% C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> + воздух

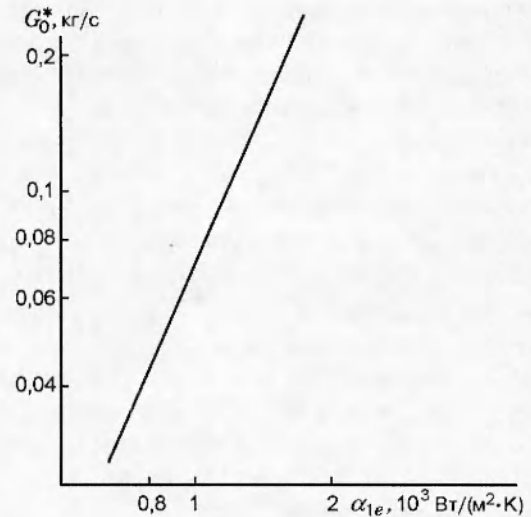


Рис. 6. Расчетная зависимость критического расхода газа, ниже которого стоячая сферическая волна не существует, от коэффициента внешней теплоотдачи (смесь 2% C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> + воздух)

отклонение значений  $r^*$  от адиабатических (см. рис. 5).

Эти рассуждения позволяют предложить другое объяснение более резкой экспериментальной зависимости  $r^*(G_0)$  по сравнению с расчетной. Если тепло не теряется из зоны подогрева через стенки конуса, а, наоборот, поступает от стенок, то, проводя подобные рассуждения, можно показать, что это приводит к занижению величин  $r^*$  по отношению к адиабатическим. Механизмом передачи тепла в зону подогрева может быть внешняя рекуперация тепла из зоны продуктов сгорания теплопроводностью по стенкам конуса. С уменьшением  $G_0$  (уменьшением  $r^*$ ) увеличивается отношение поверхности конуса к объему, а значит, увеличивается относительный вклад тепла, поступающего в зону подогрева от стенок за счет внешней рекуперации. Поэтому с уменьшением  $G_0$  прогрессирует занижение  $r^*$ , т. е. зависимость  $r^*(G_0)$  оказывается более резкой, чем адиабатическая.

## ВЫВОДЫ

1. Показано, что аналогично ламинарным пламенам в инертной пористой среде могут реализовываться сферические стоячие волны в режиме низких скоростей. При значениях радиусов, существенно превышающих толщину

зоны пламени, структурные и скоростные характеристики сферических волн близки к характеристикам соответствующих плоских стоячих волн.

2. Теоретически и экспериментально исследованы характеристики стационарных сферических волн горения газа в инертных пористых средах: установлены определяющие параметры и параметрические зависимости положения стоячих волн, области их существования, тепловая структура, устойчивость, особенности стоячих волн в сходящихся и расходящихся потоках.

3. Показано, что стоячие волны в пористых средах обладают различными типами устойчивости в зависимости от геометрии потока: волны устойчивы в сферически расходящемся газовом потоке, неустойчивы в сходящемся и находятся в безразличном равновесии в случае плоской волны.

4. Предложены теоретические модели сферических волн горения газа в пористых средах, удовлетворительно согласующиеся с экспериментом. Некоторые отклонения обусловлены краевыми эффектами: теплотерями во внешнее пространство через стенки конуса и возможностью рекуперации тепла с участием стенок конуса.

5. Показано, что наличие теплотерь при горении газа в инертных пористых средах приводит к появлению пределов существования

стоячих волн. В этом случае критическими параметрами могут быть расход газа, коэффициент внешней теплоотдачи и т. д.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-03-32968а) и INTAS (код проекта 96-1173).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабкин В. С., Лаевский Ю. М. Фильтрационное горение газов // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 5. С. 49-57.
2. Лаевский Ю. М., Бабкин В. С. Фильтрационное горение газов // Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука, 1988.
3. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
4. Лаевский Ю. М. О существовании решений системы уравнений, описывающих фильтрационное горение газа // ПМТФ. 1983. № 6. С. 67-71.
5. Kakutkina N. A., Borovykh I. V., Laevskii Yu. M., Babkin V. S. Spherical waves of filtrational gas combustion // Proc. Zel'dovich Memorial Intern. Conf. on Combustion. Moscow, 1994. V. 2. P. 191-194.

*Поступила в редакцию 8/І 1997 г.,  
в окончательном варианте — 28/ІІ 1997 г.*