

8. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.
9. Гончаров В. В. О некоторых особенностях внутренних волн в океане // Цунами и внутренние волны. — Севастополь: МГИ, 1976.
10. Завольский Н. А. Особенности распространения линейных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 1.
11. Rehm R. G., Radt H. S. Internal waves generated by a translation oscillating body // J. Fluid Mech. — 1975. — V. 68, N 2.

г. Москва

Поступила 27/VII 1992 г.,
в окончательном варианте — 12/X 1992 г.

УДК 533.72:551.511

Д. А. Верещагин, С. Б. Лебле, А. К. Щекин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

Введение. Известно, что наиболее последовательное описание волновых возмущений в разреженных газах должно основываться на кинетическом уравнении Больцмана или его модельных аналогах [1, 2]. Цель данной работы — исследование с помощью кинетического уравнения задачи о вынужденных колебаниях вертикально стратифицированного в поле тяжести газа при заданных граничных режимах возбуждения. Если для этой задачи определить число Кнудсена K_p через отношение длины свободного пробега молекул газа к характерному масштабу неоднородности, определяемому распространяющейся волной, то изменение вследствие стратификации длины свободного пробега дает растущее по вертикали значение K_p . Таким образом, в рассматриваемой задаче требуется описание движения газа при произвольных K_p .

Во многих отношениях рассматриваемая проблема близка к известной задаче о распространении ультразвука в однородном газе, интерес к которой в кинетической теории газов был стимулирован еще работами Ван Чан и Уленбека [2]. Важные результаты в этой области, полученные для линеаризованного уравнения Больцмана и модельных кинетических уравнений методом аналитического продолжения дисперсионных соотношений [3], методом Винера — Хопфа [4], сведением к задаче Римана — Гильберта [5, 6], численным интегрированием вдоль характеристик [7], подтверждают, что волноподобный характер возмущения в газах сохраняется и при $K_p \geq 1$. При этом зависимости фазовой скорости и коэффициента поглощения акустической волны, вычисленные с помощью модельного кинетического уравнения Бхатнагара — Гросса — Крука (БГК), находились в хорошем согласии с экспериментом. Уравнение БГК может быть положено и в основу анализа распространения волновых возмущений в стратифицированном газе. С физической точки зрения наличие стратификации газа приводит к появлению наряду с акустическими волнами и внутренних волн. Закон дисперсии внутренних волн существенно отличается от соответствующего закона для акустических волн, исследование влияния кинетического режима на характер распространения внутренних волн представляет особый интерес в связи с приложениями в физике верхней атмосферы [8]. Однако наличие внешнего поля и стратификация газа существенно усложняют задачу, так как приводят к уравнению с переменными коэффициентами. В силу этого упомянутые выше методы решения задачи о звуке в однородном газе, существенным элементом которых было разделение переменных с помощью преобразования Фурье, оказываются неприменимыми, а метод интегрирования вдоль характеристик должен быть модифицирован с учетом нелинейности характеристик.

© Д. А. Верещагин, С. Б. Лебле, А. К. Щекин, 1993

Чтобы описать распространение граничного режима в стратифицированном газе при произвольных числах Кнудсена, в данной работе сведем интегродифференциальное уравнение БГК к замкнутой системе интегральных уравнений для первых пяти моментов функции распределения. Ранее чисто интегральное кинетическое уравнение общего вида, включающее граничные условия на поверхности обтекаемых газом тел, было получено в [9]. Метод решения этого уравнения, состоящий в переходе к системе интегральных уравнений для коэффициентов разложения функции распределения в ряд по обобщенным полиномам Эрмита в пространстве скоростей, рассматривался в [10]. Для результатов, полученных в настоящей работе, существенным является использование модельной формы интеграла столкновений. Именно структура модельного интеграла столкновений позволяет замкнуть систему моментных уравнений для газа в поле тяжести с помощью интегрирования вдоль параболических характеристик.

Постановка задачи. Сформулируем следующую задачу. Пусть одноатомный газ находится в поле силы тяжести g (g — ускорение свободного падения) и является экспоненциально стратифицированным по вертикали (по переменной z) в равновесном состоянии. Будем считать, что снизу (при $z = 0$) и сверху (при $z = h$) газ ограничен плоскостями, движение которых генерирует распространяющиеся возмущения. Тогда для линейной добавки φ к функции распределения Максвелла — Больцмана

$$(1) \quad f_0 = n_0 (\sqrt{\pi} v_T)^{-3} \exp \left(-\frac{z}{H} - \frac{v^2}{v_T^2} \right)$$

запишем линеаризованное уравнение БГК

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} - g \frac{\partial \varphi}{\partial v_z} = \nu \exp \left(-\frac{z}{H} \right) \left\{ \sum_{l=1}^5 M_l(t, \mathbf{r}) \chi_l(\mathbf{v}) - \varphi \right\}$$

с граничными условиями

$$(3) \quad \varphi|_{z=0} = \varphi_0(t, x, y, v), \quad \varphi|_{z=h} = \varphi_1(t, x, y, v).$$

Здесь n_0 — плотность невозмущенного газа при $z = 0$; $v_T = \sqrt{2k_B T_0/m}$ — средняя тепловая скорость молекул; $H \equiv k_B T_0/mg$ — высота однородной атмосферы; $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — скорость молекул газа; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор молекулы газа; t — время; $\nu = n_0 k_B T_0 / \eta$ — частота столкновений между молекулами (параметр модели БГК); η — сдвиговая вязкость газа. Входящие в правую часть (2) функции χ_l являются собственными функциями линеаризованного оператора столкновений Больцмана, отвечающими нулевому собственному значению:

$$(4) \quad \chi_1 = 1, \quad \chi_2 = \sqrt{2} \frac{v_x}{v_T}, \quad \chi_3 = \sqrt{2} \frac{v_y}{v_T}, \quad \chi_4 = \sqrt{2} \frac{v_z}{v_T}, \quad \chi_5 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{v^2}{v_T^2} - \frac{3}{2} \right).$$

Моменты M_l определяются как скалярное произведение с весом f_0 (1):

$$(5) \quad M_l \equiv \langle \chi_l, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi^{3/2} v_T^3} \int d\mathbf{v} \cdot \exp(-v^2/v_T^2) \chi_l \varphi$$

и связаны с гидродинамическими параметрами газа (плотностью n , средней скоростью u и температурой T) соотношениями

$$(6) \quad M_1 = \frac{n - n_0}{n_0}, \quad M_2 = \sqrt{2} \frac{u_x}{v_T}, \quad M_3 = \sqrt{2} \frac{u_y}{v_T}, \quad M_4 = \sqrt{2} \frac{u_z}{v_T}, \quad M_5 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{T - T_0}{T_0}.$$

Интегральная форма уравнения БГК с учетом граничных условий. В духе метода характеристик преобразуем интегродифференциальное уравнение (2) совместно с граничными условиями (3) в интегральное уравнение для функции φ . С этой целью введем новые переменные $\{\alpha'\} = \{t', \mathbf{r}', v'\}$, обозначая старые переменные как $\{\alpha\} = \{t, \mathbf{r}, v\}$. Запишем прямое и обратное преобразования от $\{\alpha\}$ к $\{\alpha'\}$ в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} \{\alpha'(z)\}: & & \{\alpha(z')\}: \\ z'(z) = z, & & z(z') = z', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t'(z) &= t + v_z/g, & t(z') &= t' - \operatorname{sgn}(v_z) \sqrt{v_z'^2 - 2gz'}/g, \\
x'(z) &= x + v_x v_z/g, & x(z') &= x' - v_x' \operatorname{sgn}(v_z) \sqrt{v_z'^2 - 2gz'}/g, \\
y'(z) &= y + v_y v_z/g, & y(z') &= y' - v_y' \operatorname{sgn}(v_z) \sqrt{v_z'^2 - 2gz'}/g, \\
v_x'(z) &= v_x, & v_x(z') &= v_x', \\
v_y'(z) &= v_y, & v_y(z') &= v_y', \\
v_z'(z) &= \operatorname{sgn}(v_z) \sqrt{v_z^2 + 2gz}, & v_z(z') &= \operatorname{sgn}(v_z) \sqrt{v_z'^2 - 2gz'},
\end{aligned}$$

где подразумевается выполнение условия $v_z'^2 - 2gz' \geq 0$. Отметим, что введение в (7) функции sgn обеспечивает взаимную однозначность перехода между переменными $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$.

В новых переменных $\{\alpha'\}$ уравнение БГК (2) примет вид

$$(8) \quad v_z(z') \frac{\partial \varphi}{\partial z'} + v \exp\left(-\frac{z'}{H}\right) \varphi = v \exp\left(-\frac{z'}{H}\right) \sum_{i=1}^2 M_i(t(z'), r(z')) \chi_i(v(z')).$$

Прежде чем формально проинтегрировать уравнение (8) по z' , обсудим поведение характеристик левой части уравнения (2), задаваемых набором $\alpha'(z)$ из (7) при постоянных t', r', v' . Построим эти характеристики в плоскости (z, v_z) .

Из рисунка видно, что при изучении колебаний стратифицированного газа между двумя плоскостями имеем дело с характеристиками трех типов. Характеристики первого типа начинаются в плоскости $z = 0$ и оканчиваются в плоскости $z = h$, а второго типа начинаются в плоскости $z = 0$, далее в плоскости $v_z = 0$ испытывают поворот и возвращаются на плоскость $z = 0$. Характеристики третьего типа начинаются в плоскости $z = h$ и оканчиваются в плоскости $z = 0$. Предельная характеристика, разделяющая характеристики разных типов (на рисунке выделена жирной линией), задается уравнением $v_z^2 = 2g(h - z)$.

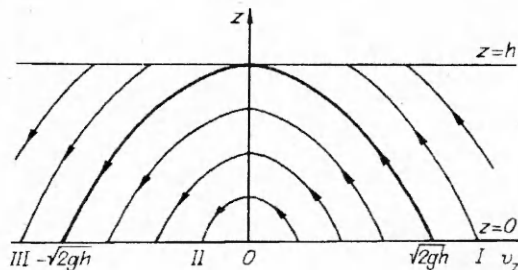
В соответствии с видом характеристик задание граничных режимов φ_0 и φ_1 в пространстве скоростей естественно проводить по областям, при этом области определения φ_0 и φ_1 соответственно разбиваются на три и на две области по v_z . С учетом этого обстоятельства φ_0 и φ_1 удобно представить в виде

$$(9) \quad \varphi|_{z=0} = \varphi_0 = \theta(v_z) \varphi_{0+} + \theta(-v_z) \theta(v_z + \sqrt{2gh}) \varphi_{0-} + \theta(-v_z - \sqrt{2gh}) \bar{\varphi}_{0-};$$

$$(10) \quad \varphi|_{z=h} = \varphi_1 = \theta(v_z) \varphi_{1+} + \theta(-v_z) \varphi_{1-},$$

где $\theta(v_z)$ — ступенчатая функция Хэвисайда.

Влияние граничных функций из правой части (9) и (10) распространяется вдоль характеристик вплоть до противоположной границы. Таким образом, все эти функции оказываются связанными между собой некоторыми соотношениями. Строго говоря, из пяти граничных функций в (9) и (10) только две (φ_{0+} и φ_{1-}), отвечающие частицам, отлетающим от плоскости, могут быть заданы как независимые. Эти функции играют активную роль в граничном условии и полностью определяются характером движения границ и взаимодействия границ с газом. При этом три оставшиеся «пассивные» функции (φ_{0-} , $\bar{\varphi}_{0-}$, φ_{1+}), учитывающие вклад от частиц, падающих на граничные поверхности, могут быть выражены через φ_{0+} и φ_{1-} с помощью определенных соотношений. Как будет показано ниже, в бесстолкновительном случае «пассивные» функции могут быть выражены через «активные» с помощью линейных соотношений в явной форме. Однако



наличие столкновений приводит к появлению в связывающих соотношениях членов интегрального характера, в которые входит полная функция распределения φ .

Теперь уравнение (8) совместно с граничными условиями (9) и (10) можно проинтегрировать по z' вдоль характеристик, считая граничные функции, входящие в соотношения (9) и (10), формально независимыми. При этом вся область пространства скоростей, в которой определяется φ , разбивается на три области (см. рисунок). Направление интегрирования вдоль характеристик в этих областях выберем следующим образом. В областях *I* и *II* будем вести интегрирование от границы $z' = 0$, а в *III* — от границы $z' = h$. Объединив соотношения, полученные в трех областях пространства скоростей, в одно и перейдя к старым переменным $\{\alpha\}$, имеем

$$(11) \quad \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varphi_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) + \theta(v_z + \sqrt{2g(h-z)}) v \int_0^z dz' \Phi(z, z', v_z) \times \\ \times \sum_{i=1}^5 M_i(\{\alpha_1(z-z')\}, z') \chi_i(\mathbf{v}'(z-z')) - \theta(-v_z - \sqrt{2g(h-z)}) v \times \\ \times \int_z^h dz' \Phi(z, z', v_z) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\alpha_1(z-z')\}, z') \chi_i(\mathbf{v}'(z-z')),$$

где

$$(12) \quad \varphi_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \Psi(z, 0, v_z) [\theta(v_z) \varphi_{0+}(\{\alpha_1(z)\}, \mathbf{v}'(z)) + \\ + \vartheta(-v_z) \theta(v_z + \sqrt{2g(h-z)}) \varphi_{0-}(\{\alpha_1(z)\}, \mathbf{v}'(z))] + \\ + \Psi(z, h, v_z) \theta(-v_z - \sqrt{2g(h-z)}) \varphi_{1-}(\{\alpha_1(z-h)\}, \mathbf{v}'(z-h))$$

и введены функции

$$(13) \quad \Psi(z, \bar{z}, v_z) = \exp \left\{ -v \int_{\bar{z}}^z dz'' \frac{\exp(-z''/H)}{v_z(z-z'')} \right\};$$

$$(14) \quad \Phi(z, \bar{z}, v_z) = \Psi(z, \bar{z}, v_z) \exp(-\bar{z}/H)/v_z'(z-\bar{z}).$$

В (13) и (14) функции $v_z'(z-z'')$ и $v_z'(z-\bar{z})$ определены, как и раньше, соотношениями (7), а набор независимых переменных $\{\alpha_1(z)\} = \{t_1(z), x_1(z), y_1(z)\}$ в (12) задается в виде

$$(15) \quad t_1(z) = t'(z) - \frac{v_z'(z)}{g}, \quad x_1(z) = x'(z) - \frac{v_x v_z'(z)}{g}, \quad y_1(z) = y'(z) - \frac{v_y v_z'(z)}{g}.$$

Функции φ_{0-} и φ_{1+} в явной форме в соотношение (12) не вошли. Это связано с тем, что вдоль характеристик первого и второго типа интегрирование велось от границы $z = 0$, а вдоль характеристик третьего типа — от $z = h$. Отметим, что при переходе к интегральной форме уравнения БГК возможен другой выбор направления интегрирования вдоль характеристик в областях *I* и *III*. При этом функция φ_s содержала бы другие граничные функции из (9) и (10), но их число осталось бы равным трем. При учете зависимости «пассивных» функций от «активных» все возможные интегральные формы уравнения БГК совпадут.

Поскольку моменты M_i связаны с функцией φ соотношениями (5), то (11) представляет собой интегральное уравнение для функции распределения φ . По способу вывода оно эквивалентно уравнению (2) с граничными условиями (9) и (10), что может быть проверено прямым дифференцированием по t , \mathbf{r} и \mathbf{v} .

Убедимся, что уравнение (11) удовлетворяет на границах условиям (9) и (10). Рассмотрим соотношения, даваемые (11) при $v_z > -\sqrt{2g(h-z)}$ и $z \rightarrow 0$. С учетом (12) имеем

$$\varphi = \theta(v_z) \varphi_{0+}(t, x, y, \mathbf{v}) + \theta(-v_z) \varphi_{0-}(t, x, y, \mathbf{v}).$$

Таким образом, уравнение (11) в данном случае удовлетворяет нижнему граничному условию. Далее, при $v_z < -\sqrt{2g(h-z)}$ и $z \rightarrow 0$ из (9) имеем $\varphi = \tilde{\varphi}_{0-}$. С другой стороны, сопоставив (9) и соотношение, получаемое при этих же условиях из (11), (12), легко устанавливаем связь между $\tilde{\varphi}_{0-}$ и φ_{1-} :

$$(16) \quad \tilde{\varphi}_{0-} = \varphi_{1-} (\{\alpha_1(-h)\}, v_1(-h)) \Psi(0, h, v_z) - \\ - v \int_0^h dz'' \Phi(0, z'', v_z) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\alpha_1(-z'')\}, z'') \chi_i(v'(-z'')).$$

Аналогично при $v_z > 0$ и $z \rightarrow h$ устанавливаем связь между φ_{1+} и φ_{0+} :

$$(17) \quad \varphi_{1+} = \Psi(h, 0, v_z) \varphi_{0+} (\{\alpha_1(h)\}, v'(h)) + \\ + v \int_0^h dz'' \Phi(h, z'', v_z) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\alpha_1(h-z'')\}, z'') \chi_i(v'(h-z'')).$$

Наконец, при $v_z < 0$, $z \rightarrow h$ из (11) и (12) получаем $\varphi = \varphi_{1-}(t, x, y, v)$, что согласуется с верхним граничным условием (10).

Движение газа в предельных режимах. Рассмотрим движение газа в различных предельных случаях, допускаемых уравнением (11). Нас будут интересовать свободномолекулярное течение, предельный случай газа без стратификации и распространение возмущений в стратифицированной атмосфере, ограниченной только снизу при $z = 0$.

Исследуем свободномолекулярное течение газа. Полагая в (11) частоту столкновения $\nu = 0$, получаем

$$(18) \quad \varphi = \theta(v_z) \varphi_{0+}(\{\alpha_1(z)\}, v'(z)) + \theta(-v_z) \theta(v_z + \sqrt{2g(h-z)}) \times \\ \times \varphi_{0-}(\{\alpha_1(z)\}, v'(z)) + \theta(-v_z - \sqrt{2g(h-z)}) \varphi_{1-}(\{\alpha_1(z-h)\}, v'(z-h)).$$

Из (18) видим, что в случае свободномолекулярного течения состояние газа в точке t, x, y определяется при $v_z > 0$ частицами, вылетевшими с поверхности $z = 0$ в момент времени $t + \frac{1}{g} [v_z - \sqrt{v_z^2 + 2gz}]$ со скоростями $v_x, v_y, \sqrt{v_z^2 + 2gz}$. При $-\sqrt{2g(h-z)} < v_z < 0$ вклад дают частицы, которые прилетят на поверхность $z = 0$ в момент времени $t - \frac{1}{g} [|v_z| - \sqrt{v_z^2 + 2gz}]$ в точку с координатами $x - v_x [|v_z| - \sqrt{v_z^2 + 2gz}] / g, y - v_y [|v_z| - \sqrt{v_z^2 + 2gz}] / g$ со скоростями $v_x, v_y, -\sqrt{v_z^2 + 2gz}$. Эти частицы вылетели с поверхности $z = 0$, были повернуты полем тяготения g и вернулись на границу $z = 0$, не испытав взаимодействия с границей $z = h$. При $v_z < -\sqrt{2g(h-z)}$ состояние газа определяется частицами, вылетевшими с границы $z = h$ в момент времени $t - \frac{1}{g} [|v_z| - \sqrt{v_z^2 + 2g(z-h)}]$ из точки с координатами $x - v_x [|v_z| - \sqrt{v_z^2 + 2g(z-h)}] / g, y - v_y [|v_z| - \sqrt{v_z^2 + 2g(z-h)}] / g$ со скоростями $v_x, v_y, -\sqrt{v_z^2 + 2g(z-h)}$. Как и следовало ожидать, если частица вылетела с границы $z = h$, то в любой точке $z < h$ ее скорость всегда меньше нуля.

Перейдем к случаю газа без стратификации. Устремляя в (11)–(15) $H \rightarrow \infty$ и $g \rightarrow 0$, находим

$$(19) \quad \varphi = \theta(v_z) \exp\left(-v \frac{z}{v_z}\right) \varphi_{0+}(\{\tilde{\alpha}(z)\}, v) + \theta(-v_z) \exp\left(v \frac{h-z}{v_z}\right) \times \\ \times \varphi_{1-}(\{\tilde{\alpha}(h-z)\}, v) + \theta(v_z) v \int_0^z dz' \frac{1}{v_z} \exp\left(-v \frac{z-z'}{v_z}\right) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\tilde{\alpha}(z-z')\}, z') \times \\ \times \chi_i(v) - \theta(-v_z) v \int_z^h dz' \frac{1}{v_z} \exp\left(-v \frac{z-z'}{v_z}\right) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\tilde{\alpha}(z-z')\}, z') \chi_i(v),$$

где $\{\tilde{\alpha}(z)\} = \{t - z/v_z, x - v_x z/v_z, y - v_y z/v_z\}$.

Если в уравнении (19) расстояние h между границами устремить к бесконечности, то

$$(20) \quad \varphi = \theta(v_z) \exp\left(-v \frac{z}{v_z}\right) \varphi_{0+}(\{\bar{\alpha}(z)\}, \mathbf{v}) + \\ + \theta(v_z) v \int_0^z dz' \frac{1}{v_z} \exp\left(-v \frac{z-z'}{v_z}\right) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\bar{\alpha}(z-z')\}, z') \chi_i(\mathbf{v}) - \\ - \theta(-v_z) v \int_z^\infty dz' \frac{1}{v_z} \exp\left(-v \frac{z-z'}{v_z}\right) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\bar{\alpha}(z-z')\}, z') \chi_i(\mathbf{v}).$$

Уравнение (20) в одномерном случае в точности совпадает с уравнением, полученным в [4, 7] для задачи о распространении одномерного звука в однородной неограниченной атмосфере. Влияние верхней границы при $h \rightarrow \infty$ исчезает благодаря тому, что экспонента, стоящая в (19) перед φ_{1-} , при $v_z < 0$ стремится к нулю при больших h . Однако из (16) видно, что в этом случае $\bar{\varphi}_{0-} \neq 0$.

Теперь перейдем к последнему предельному случаю, когда верхняя граница удаляется на бесконечность для стратифицированного газа. Полагая $H = \text{const}$ и рассматривая предел при $h \rightarrow \infty$, из (11) находим

$$(21) \quad \varphi = \Psi(z, 0, v_z) [\theta(v_z) \varphi_{0+}(\{\alpha_1(z)\}, \mathbf{v}'(z)) + \\ + \theta(-v_z) \varphi_{0-}(\{\alpha_1(z)\}, \mathbf{v}'(z))] + \\ + v \int_0^z dz' \Phi(z, z', v_z) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\alpha_1(z-z')\}, z') \chi_i(\mathbf{v}'(z-z')).$$

Именно уравнение (21) положим в основу дальнейшего исследования.

Связь между граничными функциями для отлетающих и падающих частиц. Заметим, что если попытаться сделать предельный переход к однородному газу, устремляя $H \rightarrow \infty$ в (21), то уравнение (20) при этом не получается. Это обусловлено тем, что в (21), прежде чем совершать предельный переход $H \rightarrow \infty$, необходимо учесть связь между «пассивной» граничной функцией φ_{0-} и «активной» функцией φ_{0+} .

Обсудим соотношения, связывающие граничные функции φ_{0-} и φ_{0+} , подробнее. Как видно из рисунка, функция φ_{0-} (область скоростей $-\sqrt{2gh} < v_z < 0$) формируется на характеристиках, которые начинаются и кончаются на границе $z = 0$, не пересекая $z = h$. Это означает, что условием для определения φ_{0-} должно стать условие непрерывности функции распределения на характеристиках при $v_z = 0$:

$$(22) \quad \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})|_{v_z=+0} = \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})|_{v_z=-0}.$$

Подставляя правую часть уравнения (21) при $v_z = +0$ и при $v_z = -0$ в (22), получаем соотношение, определяющее φ_{0-} через φ_{0+} :

$$(23) \quad \varphi_{0-}(t, x, y, \mathbf{v})|_{v_z < 0} = \Psi_-^2(0, v_z^2/2g, v_z) \varphi_{0+}(\{\alpha_1^+(0)\}, \mathbf{v}'(0)) + \\ + \Psi_-(0, v_z^2/2g, v_z) v \sum_{i=1}^5 \int_0^{v_z^2/2g} dz'' \Delta^\pm \{\Phi(0, z'', v_z) \times \\ \times \Psi^{-1}(0, v_z^2/2g, v_z) M_i(\{\alpha_1(-z'')\}, z'') \chi_i(\mathbf{v}'(z''))\}.$$

Здесь $\Delta^\pm(Q) \equiv Q_+ - Q_-$, индексы $+$ и $-$ определяют знак функции $\text{sgn}(v_z)$, входящей в выражения (7), (13)–(15) для $\mathbf{v}'(z)$, Ψ , Φ , $\{\alpha_1\}$ соответственно. С учетом (23) уравнение (21) можно записать в виде

$$(24) \quad \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = [\theta(v_z) + \theta(-v_z) \Psi_-^2(z, z + v_z^2/2g, v_z)] \left[\Psi_+(z, 0, v_z) \times \right. \\ \left. \times \varphi_{0+}(\{\alpha_1^+(z)\}, \mathbf{v}^+(z)) + v \int_0^z dz'' \Phi_+(z, z'', v_z) \sum_{i=1}^5 M_i(\{\alpha_1^+(z-z'')\}, z'') \times \right.$$

$$\times \chi_i (v^+ (z - z'')) \Big] + \theta (-v_z) \Psi_- (z, z + v_z^2/2g, v_z) v \sum_{i=1}^5 \int_z^{z+v_z^2/2g} dz'' \Delta^\pm \times \\ \times \{ \Phi (z, z'', v_z) \Psi^{-1} (z, z + v_z^2/2g, v_z) M_i (\{\alpha_1 (z - z''), z''\}) \chi_i (v' (z - z'')) \}.$$

Заметим, что если в (24) перейти к пределу однородного газа при $H \rightarrow \infty$, $g \rightarrow 0$, то из (24) следует уравнение (20).

Обобщение результатов на случай присутствия верхней границы при $z = h$ не встречает каких-либо трудностей. При наличии верхней границы условие непрерывности (22) накладывается на функцию распределения только на характеристиках второго типа (см. рисунок) в области $0 \leq z \leq h$.

Условие непрерывности (22), а значит, выражение (23) являются соотношениями общего характера, справедливыми для любого вида функции φ_{0+} . Для дальнейшего исследования выберем граничный режим φ_{0+} в виде условия диффузного отражения на пластине, колеблющейся относительно $z = 0$ с заданной вдоль оси z вертикальной скоростью $u_0 (t, x, y)$:

$$(25) \quad f(t, r, v) \Big|_{v_z > 0, z=0} = n_s (\sqrt{\pi} v_T)^{-3} \exp \left\{ -\frac{(v - u)^2}{v_T^2} \right\}.$$

Учтем, что в такой постановке задачи плотность n_s оказывается соответствующей установившемуся режиму движения газа. Согласно обычной процедуре [4—7], определим n_s , потребовав равенства средней вертикальной скорости при $z = 0$ величине $u_0 (t, x, y)$. Линеаризуя (25), находим

$$(26) \quad \varphi_{0+} (t, x, y, v) = \varphi \Big|_{v_z > 0, z=0} = 2 \frac{u_0}{v_T} v_z + \frac{n_s - n_0}{n_0}.$$

При этом для $(n_s - n_0)/n_0 \equiv M_{1s}$ после подстановки (26) в соотношение (5) для $M_n \Big|_{z=0}$ получаем

$$(27) \quad M_{1s} = \frac{\sqrt{\pi} u_0}{v_T} - \frac{2}{\pi v_T^4} \int_{v_z < 0} dv \exp(-v^2/v_T^2) v_z \varphi \Big|_{z=0, v_z < 0}.$$

Отсюда видим, что соотношения (26) и (27) связывают функции распределения из разных полупространств по v_z . Входящая в (27) функция $\varphi_{0-} = \varphi \Big|_{z=0, v_z < 0}$ должна определяться с помощью (23).

Система интегральных уравнений для моментов функции распределения. Характерной особенностью уравнения БГК является возможность найти функцию распределения по первым ее пяти моментам. Действительно, если известны моменты M_1, \dots, M_5 , то, подставляя их в (24) и проводя интегрирование по z , получим функцию φ . Вклад в функцию распределения высших моментов эффективно учитывается наличием в правой части уравнения (24) кинетического граничного условия и тем, что при интегрировании по z необходимо задавать значения $M_i (i = 1, \dots, 5)$ во всем пространстве и во все предшествующие моменты времени.

Положим $u_0 = (0, 0, \tilde{u}_0 \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y))$ и будем искать решение (24) в виде

$$(28) \quad \varphi(t, r, v) = \tilde{\varphi}(z, v) \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y).$$

Соответственно имеем

$$(29) \quad \varphi_{0+}(t, x, y, v) = \tilde{\varphi}_{0+}(v) \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y);$$

$$(30) \quad M_n(t, r) = \tilde{M}_n \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y),$$

причем величины \tilde{M}_n и $\tilde{\varphi}$ связаны прежними соотношениями (5).

Получим теперь из (24) систему интегральных уравнений для моментов M_n . Для этого скалярно умножим (24) на собственные функции χ_n (4), соответствующие этим моментам. В дальнейшем удобно перейти к безразмерным переменным

$$(31) \quad c \equiv v/v_T, \quad \zeta \equiv z/H.$$

Используя равенство

$$\int_{c_2 < 0} dc \int_{\xi}^{\xi + c_2/2g} d\xi' \dots = \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \int_{c_2 < \sqrt{\xi' - \xi}} dc \dots,$$

для \tilde{M}_n из (24) находим с учетом (28) — (30) систему неоднородных уравнений Фредгольма второго рода:

$$(32) \quad \tilde{M}_n(\xi) = P_n(\xi) + \tilde{M}_{1s} R_n(\xi) + \sum_{m=1}^5 \int_0^{\xi} d\xi' K_{mm}^{(1)}(\xi, \xi') \tilde{M}_m(\xi') + \\ + \sum_{m=1}^5 \int_{\xi}^{\infty} d\xi' K_{mm}^{(2)}(\xi, \xi') \tilde{M}_m(\xi').$$

Выражения для функций $P_n(\xi)$, $R_n(\xi)$, $K_{mm}^{(1)}(\xi, \xi')$, $K_{mm}^{(2)}(\xi, \xi')$ удобно записать, определив следующие две вспомогательные функции:

$$(33) \quad I_{n,m}(\xi, \xi') = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} dc \exp\{-c^2 + g^+(\xi, \xi', c)\} c^n (c^2 + \xi')^{m/2};$$

$$(34) \quad J_{n,m}(\xi, \xi') = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} dc \exp\{-c^2 + g^-(\xi, \xi', c) - 2g^-(\xi, -c^2, c)\} \times \\ \times c^n (c^2 + \xi')^{m/2}.$$

Здесь

$$g^{\pm}(\xi, \xi', c) = - \int_0^{\xi'} d\xi_1 [\delta_v(\xi) \exp(\xi') + i\delta_{\omega} \mp \delta^2 c] (c^2 - \xi_1)^{-1/2};$$

$$\delta_v(\xi) = \frac{vH}{v_T} \exp(-\xi); \quad \delta_{\omega} = \frac{\omega H}{v_T}; \quad \delta^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 = H^2 (k_x^2 + k_y^2).$$

В одномерном случае ($\delta^2 = 0$) следует $g^+ = g^-$. Для вновь введенных функций $I_{n,m}$ и $J_{n,m}$ запишем рекуррентные соотношения

$$(35) \quad I_{n,m+2}(\xi, \xi') = I_{n+2,m}(\xi, \xi') + \xi' I_{n,m}(\xi, \xi'), \\ I_{n,m+4}(\xi, \xi') = I_{n+4,m}(\xi, \xi') + 2\xi' I_{n+2,m}(\xi, \xi') + \xi'^2 I_{n,m}(\xi, \xi'), \\ I_{n,m+2p}(\xi, \xi') = \sum_{k=0}^p C_p^k I_{n+2(p-k),m} \xi'^k$$

и соотношение для производной по аргументу ξ' :

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial \xi'} I_{n,m}(\xi, \xi') = - [\delta_v(\xi) \exp(\xi') + i\delta_{\omega}] I_{n,m-1}(\xi, \xi') + \\ + \frac{m}{2} I_{n,m-2}(\xi, \xi') + \delta^2 I_{n+1,m-1}(\xi, \xi').$$

Для функций $J_{n,m}$ соотношения (35), (36) имеют такой же вид. Можно также получить и соотношения для производной от $I_{n,m}$ по параметру ξ , но их явный вид из-за громоздкости здесь приводить не будем.

Отметим также, что в пределе однородного газа $g \rightarrow 0$, $H \rightarrow \infty$ функции $J_{n,m}(\xi, \xi') \rightarrow 0$, а $I_{n,m}(\xi, \xi')$ переходят в известную в кинетической теории однородных газов функцию Абрамовица [11].

В одномерном случае ($\delta^2 = 0$), когда в уравнении (32) индексы n , $m = 1, 2, 3, \dots$, входящие в (32) величины перепишем в форме

$$P_1(\xi) = 2 \frac{u_0}{v_T} [I_{0,1} + J_{0,1}](\xi, \xi), \quad P_2(\xi) = 2 \frac{u_0}{v_T} \sqrt{2} [I_{1,1} - J_{1,1}](\xi, \xi),$$

$$P_3(\xi) = 2 \frac{u_0}{v_T} \sqrt{\frac{2}{3}} [I_{2,1} - \frac{1}{2} I_{0,1} + J_{2,1} - \frac{1}{2} J_{0,1}](\xi, \xi),$$

$$R_1(\xi) = [I_{0,0} + J_{0,0}](\xi, \xi), \quad R_2(\xi) = \sqrt{2} [I_{1,0} - J_{1,0}](\xi, \xi),$$

$$R_3(\xi) = \sqrt{\frac{2}{3}} [I_{2,0} - \frac{1}{2} I_{0,0} + J_{2,0} - \frac{1}{2} J_{0,0}](\xi, \xi),$$

$$K_{1,1}^{(1)}(\xi, \xi') = \delta_v(\xi') [I_{0,-1} + J_{0,-1}](\xi, \xi - \xi'),$$

$$K_{1,2}^{(1)}(\xi, \xi') = \delta_v(\xi') \sqrt{2} [I_{0,0} + J_{0,0}](\xi, \xi - \xi'),$$

$$\begin{aligned}
K_{1,3}^{(1)}(\zeta, \zeta') &= \delta_v(\zeta') \sqrt{\frac{2}{3}} |I_{0,1} - \frac{1}{2} I_{0,-1} + J_{0,1} - \frac{1}{2} J_{0,-1}|(\zeta, \zeta - \zeta'), \\
K_{2,1}^{(1)}(\zeta, \zeta') &= \delta_v(\zeta') \sqrt{2} |I_{1,-1} - J_{1,-1}|(\zeta, \zeta - \zeta'), \\
K_{2,2}^{(1)}(\zeta, \zeta') &= \delta_v(\zeta') 2 |I_{1,0} - J_{1,0}|(\zeta, \zeta - \zeta'), \\
K_{2,3}^{(1)}(\zeta, \zeta') &= \delta_v(\zeta') \frac{2}{\sqrt{3}} |I_{1,1} - \frac{1}{2} I_{1,-1} - J_{1,1} - \frac{1}{2} J_{1,-1}|(\zeta, \zeta - \zeta'), \\
K_{3,1}^{(1)}(\zeta, \zeta') &= \delta_v(\zeta') \sqrt{\frac{2}{3}} |I_{2,-1} - \frac{1}{2} I_{0,-1} + J_{2,-1} - \frac{1}{2} J_{0,-1}|(\zeta, \zeta - \zeta'), \\
K_{3,2}^{(1)}(\zeta, \zeta') &= \delta_v(\zeta') \frac{2}{\sqrt{3}} |I_{2,0} - \frac{1}{2} I_{0,0} + J_{2,0} - \frac{1}{2} J_{0,0}|(\zeta, \zeta - \zeta'), \\
K_{3,3}^{(1)}(\zeta, \zeta') &= \delta_v(\zeta') \frac{2}{3} \left[\frac{5}{4} I_{0,-1} - \frac{1}{2} I_{0,1} - \frac{1}{2} I_{2,-1} + I_{2,1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{4} J_{0,-1} - \frac{1}{2} J_{0,1} - \frac{1}{2} J_{2,-1} + J_{2,1} \right](\zeta, \zeta - \zeta').
\end{aligned}$$

В последних выражениях для сокращения формул общие для всех функций $I_{n,m}$ и $J_{n,m}$ аргументы в круглых скобках записаны справа от квадратных скобок. Выражения для $K_{n,m}^{(2)}(\zeta, \zeta')$ легко получаются из соотношений для $K_{n,m}^{(1)}(\zeta, \zeta')$, если в них провести следующую замену:

$$\begin{aligned}
I_{n,m}(\zeta, \zeta - \zeta') &\rightarrow (-1)^{n+m} I_{m+1, n-1}(\zeta', \zeta' - \zeta), \\
J_{n,m}(\zeta, \zeta - \zeta') &\rightarrow J_{m+1, n-1}(\zeta', \zeta' - \zeta).
\end{aligned}$$

Приведенные выше соотношения дают полный набор выражений для $P_n, R_n, K_{n,m}^{(1)}, K_{n,m}^{(2)}$ через функции $I_{n,m}, J_{n,m}$.

В систему уравнений (32) входит также величина \tilde{M}_n , являющаяся функционалом функции распределения при $c_2 < 0$ и $\zeta = 0$. Согласно [7], это затруднение можно преодолеть, если искать решение (32) в виде

$$(37) \quad \tilde{M}_n(\zeta) = a_n(\zeta) + \tilde{M}_n b_n(\zeta).$$

Подстановка (37) в (32) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}
(38) \quad a_n(\zeta) &= P_n(\zeta) + \sum_{m=1}^5 \int_0^{\zeta} d\zeta' K_{nm}^{(1)}(\zeta, \zeta') a_m(\zeta') + \sum_{m=1}^5 \int_{\zeta}^{\infty} d\zeta' K_{nm}^{(2)}(\zeta, \zeta') a_m(\zeta'); \\
(39) \quad b_n(\zeta) &= R_n(\zeta) + \sum_{m=1}^5 \int_0^{\zeta} d\zeta' K_{nm}^{(1)}(\zeta, \zeta') b_m(\zeta') + \sum_{m=1}^5 \int_{\zeta}^{\infty} d\zeta' K_{nm}^{(2)}(\zeta, \zeta') b_m(\zeta'),
\end{aligned}$$

которые уже не содержат \tilde{M}_n .

Решая уравнения (38) и (39), можно определить функции a_n и b_n . Находя затем $\tilde{\varphi}$ при $\zeta = 0$ и $c_2 < 0$ из (23) и подставляя в выражение (27) для \tilde{M}_n , с учетом (37) получаем для \tilde{M}_n линейное алгебраическое уравнение, решая которое окончательно находим

$$(40) \quad \tilde{M} = \left[\frac{2\tilde{u}_0}{v_T} S_1 - T \{a\} \right] [S_0 + T \{b\}]^{-1},$$

где

$$(41) \quad S_p = |I_{1,p} - J_{1,p}|(0, 0);$$

$$(42) \quad T \{a\} = \sum_{m=1}^5 \int_0^{\infty} d\zeta' K_{\Sigma m}^{(2)}(0, \zeta') a_m(\zeta').$$

Записанная система соотношений (33)–(42) фактически дает алгоритм решения системы (32) для моментов функции распределения и соответственно интегрального уравнения (24) для самой функции распределения φ в задаче об описании волновых возмущений, генерируемых осциллирующей плоскостью в стратифицированном в поле тяжести одноатомном газе. Ключевое значение в этом алгоритме играет расчет функций $I_{n,m}(\zeta, \zeta')$ и $J_{n,m}(\zeta, \zeta')$, роль которых аналогична роли функции Абрамовица в подходе [7] к задаче о распространении граничного режима в одном газе. На первом

шаге процедуры с учетом соотношений (33) — (36) ищется решение уравнений (38) и (39). Найденные решения подставляются в формулу (40), и с учетом (41), (42) определяется величина M_{1s} . Далее по (37) определяются моменты M_n , которые могут быть подставлены в уравнение (24) для φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978.
2. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. — М.: Мир, 1965.
3. Sirovich L., Thurber J. K. Plane wave propagation in kinetic theory // J. Math. Phys. — 1967. — V. 8, N 4.
4. Richardson T. G., Sirovich L. The sound wave boundary value problem in kinetic theory // J. Math. Phys. — 1971. — V. 12, N 8.
5. Thomas J. P., Jr., Siewert C. E. Sound wave propagation in rarefied gas // Trans. Theory and Stat. Phys. — 1979. — V. 8. — P. 219.
6. Aoki K., Gercignani K. A technique for time dependent boundary value problem. 2. Application to sound propagation // ZAMP. — 1984. — V. 35, N 3.
7. Loyalka S. K., Cheng T. C. Sound wave propagation in a rarefied gas // Phys. Fluids. — 1979. — V. 22, N 5.
8. Шекин А. К., Лебле С. Б., Верещанин Д. А. Введение в физическую кинетику разреженных газов. — Калининград: КГУ, 1990.
9. Валландер С. В. Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов // ДАН СССР. — 1960. — Т. 131, № 1; Уравнения и постановка задач в аэродинамике разреженных газов // Аэродинамика разреженных газов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. — Вып. 1.
10. Баранцев Р. Г. Метод интегральных моментных кинетических уравнений // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 5.
11. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

г. Калининград

Поступила 24/IV 1992 г.,
в окончательном варианте — 11/XI 1992 г.

УДК 534.26

С. В. Сухинин, В. Ф. Ахмадеев

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОГЛОТИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ В КАМЕРЕ СГОРАНИЯ

Исследовано качественное поведение акустических колебаний в камере сгорания с динамическим поглотителем. Построена простая модель, описывающая вынужденные акустические одномерные колебания в камере с поглотителем. Предложены целевые функции, и изучено их поведение в зависимости от управляющих параметров поглотителя. Установлено, что наличие поглотителя может увеличить возможность возникновения автоколебаний в камере сгорания. Для некоторых целевых функций определен оптимальный коэффициент трения в поглотителе. Показано, что существует оптимальный коэффициент трения в поглотителе для всех предложенных целевых функций.

Одна из острых проблем ракетостроения — борьба с акустическими колебаниями в камерах сгорания. Характерными трудностями являются: неточная информация о параметрах основного потока, нелинейность и неопределенность источника колебаний. В силу этих причин численные исследования уравнений акустических колебаний в камерах сгорания нецелесообразны, так как сами уравнения в сильной степени приближенные. Это обуславливает важность качественных исследований акустических колебаний в камерах сгорания.

Наиболее эффективные и распространенные поглотители акустических колебаний в камерах или иных замкнутых объемах — резонаторы Гельмгольца. Однако в некоторых случаях поглотитель может увеличивать восприимчивость камеры к возникновению автоколебаний. Это обуславливает важность выбора оптимальных параметров динамических поглотителей. Ра-