Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПРОНИЦАЕМОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ УТЕЧКАХ

УДК 539.375

О. П. Алексеенко, А. М. Вайсман

Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск

Одной из трех базовых механических моделей, на основе которых проектируются гидроразрывы продуктивных пластов, является прямолинейная трещина гидроразрыва в упругой проницаемой плоскости [1]. В настоящей работе упрощена математическая формулировка данной модели. Задача сведена к безразмерной системе уравнений, зависящей от единственного параметра. Рассмотрены асимптотики при малых и больших его значениях, причем известной оказалась только вторая.

Рассмотрим горизонтальную плоскость, занятую упругой проницаемой средой, в которой растет симметричная трещина под воздействием жидкости, нагнетаемой в полость трещины из источника в центре. Направление роста трещины ортогонально действующим на бесконечности начальным сжимающим напряжениям P_g. В рамках механики трещин задача впервые поставлена в [2, 3]. Позднее для трещины, растущей в хорошо проницаемой среде, найдено эффективное приближенное решение [4]. В [5] получены точные результаты для непроницаемой и невесомой среды. В данной работе обобщается подход, предложенный в [5]. Задача формулируется в стандартной постановке без ограничений на проницаемость. Считается, что утечки подчиняются закону Картера [1, 6], т. е. с единицы поверхности трещины за секунду в проницаемую среду отфильтровывается объем жидкости, равный

$$\Lambda/\sqrt{T - T(X)} \qquad (T = T(R)).$$

Здесь Λ — коэффициент утечек; T — момент времени, отсчитываемый от начала закачки, к которому трещина достигла размера $2L$, а граница смоченного участка оказалась в точке $X = R$; $T(X)$ — момент, с которого начались утечки на расстоянии X от центра.

Проницаемая среда может быть пропитана жидкостью, находящейся под некоторым (пластовым) давлением. Однако ее обратная фильтрация в несмоченную область считается пренебрежимо малой из-за относительно небольших размеров и перемещения зоны пониженного давления по мере роста трещины. В силу симметрии рассматривается только правая половина трещины. Ось X направлена вдоль трещины, начало координат расположено в ее центре.

Масштабы для размерных переменных определим так, чтобы задача, формулируемая ниже в безразмерном виде, зависела от минимального числа параметров. С этой целью сначала введем размерные множители, сконструированные из физических констант и параметров процесса гидроразрыва. Кроме Λ и P_g нам понадобятся: модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν упругой среды, вязкость μ жидкости разрыва и расход Q_0 в каждое крыло трещины (суммарный расход $2Q_0$ предполагается постоянным в течение закачки). Имеется в виду расход в реальном гидроразрыве через подводящую скважину, который равномерно распределяется по постоянной высоте H трещины, а не параметр расхода $Q_* = Q_0/H$ в плоской задаче. Ниже все вводимые расходные либо объемные величины отнесены к единице высоты.

Введем размерные множители времени T_c и длины L_c:

$$T_c = 3\mu/D, \qquad D = 0{,}5E/(1-\nu^2); \tag{1}$$

$$L_c = \sqrt{0{,}5Q_*T_c}, \tag{2}$$

а в качестве безразмерной характеристики начальных напряжений выберем

$$\sigma = P_g/D. \tag{3}$$

Используя величины, даваемые выражениями (1)–(3), введем следующие масштабные множители соответственно для поперечного и продольного размера трещины, времени и «плоского» объема:

$$W_* = \sigma^{-1}L_c, \quad L_* = \sigma^{-2}L_c, \quad T_* = \sigma^{-3}T_c, \quad \Omega_* = 2L_*W_* = Q_*T_*. \tag{4}$$

Обозначим размерные переменные заглавными, а безразмерные соответствующими строчными буквами. Они связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{gathered} L = L_*l, \quad X = L_*x, \quad R = L_*r, \quad T = T_*t, \quad W(X) = W_*w(x), \quad P(X) = P_*p(x), \\ Q(X) = Q_*q(x), \quad \Omega_\rho = \Omega_*\omega_\rho, \quad \Omega_{\lambda\rho} = \lambda\Omega_*\omega_{\lambda\rho}, \quad \lambda = \Lambda L_*\sqrt{T_*}/\Omega_* = \Lambda/\sqrt{0{,}5Q_*\sigma}, \end{gathered} \tag{5}$$

где размерные переменные $2W(X)$, $P(X)$, $Q(X)$ — профили раскрытия, давления и локального расхода через поперечник трещины; $2\Omega_\rho$ — объем жидкости в трещине; $2\Omega_{\lambda\rho}$ — объем утечек из нее к моменту T; λ — характеристика утечек, построенная из констант процесса.

Формулировку уравнений начнем с закона сохранения массы. Расход Q через поперечное сечение, которое находится на расстоянии X от центра трещины, монотонно уменьшается с увеличением X. Это обусловлено тем, что часть жидкости, не доходя до точки X, отфильтровывается либо идет на заполнение растущего объема трещины. Соответствующий баланс записывается в виде

$$Q + \frac{\partial\Omega}{\partial T} + \frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial T} = Q_*. \tag{6}$$

Здесь

$$\Omega(X) = \int\limits_0^X W(X')dX', \qquad \Omega(R) = \Omega_\rho; \tag{7}$$

$$\Omega_\lambda(X) = 2\Lambda\int\limits_0^X dX'\sqrt{T-T'}, \qquad \Omega_\lambda(R) = \Omega_{\lambda\rho}, \qquad T' = T(X'). \tag{8}$$

Второй член в левой части (6) характеризует скорость прироста объема $\Omega(X)$ трещины, заключенного между поперечными сечениями с координатами 0 и X соответственно, а третий — скорость утечек из этой области, т. е. скорость увеличения объема утечек $\Omega_\lambda(X)$.

Переходя в (6)–(8) к безразмерным переменным, в соответствии с (5) получим

$$q + \frac{\partial\omega}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\omega_\lambda}{\partial t} = 1, \quad \omega(x) = \int\limits_0^x w(x')dx', \quad \omega_\lambda(x) = 2\int\limits_0^x dx'\sqrt{t-t'}. \tag{9}$$

При $x = r$ запишем уравнение (9) в терминах полных производных в виде $d\omega_\rho/dt + \lambda d\omega_{\lambda\rho}/dt = 1$, после интегрирования по t

$$t = \omega_\rho + \lambda\omega_{\lambda\rho}, \quad \omega_\rho = \int_0^r w(x')dx', \quad \omega_{\lambda\rho} = 2\int_0^r dx'\sqrt{t-t'}. \tag{10}$$

Остальные уравнения задачи для краткости будем формулировать сразу в безразмерном виде. В соответствии с результатами механики трещин [7] уравнение, выражающее раскрытие через градиент давления, для трещины нормального разрыва может быть представлено в форме

$$w = -\sqrt{l^2 - x^2} - l\int_0^r a(x,x')\,\frac{\partial p}{\partial x'}\,dx', \quad a(\varphi,\psi) = \pi^{-1}[2\psi\cos\varphi + b(\varphi,\psi)]; \tag{11}$$

$$b(\varphi,\psi) = (\sin\psi)\ln\frac{\cos\varphi + \cos\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} - (\sin\varphi)\,\ln\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}. \tag{12}$$

Наличие радикала в уравнении отражает вклад в безразмерное раскрытие начальных напряжений P_g. Ядро $a(\varphi,\psi)$, согласно [5], записывается в переменных φ, ψ, которые вводятся соотношениями $x = l\sin\varphi$, $x' = l\sin\psi$, $r = l\sin\rho$. Здесь дополнительно введен параметр ρ, который характеризует в угловых единицах степень заполнения трещины жидкостью разрыва.

Между градиентом давления и раскрытием можно установить еще одно соотношение в безразмерных переменных, следующее из гидродинамических закономерностей ламинарного течения вязкой жидкости в узкой трещине [2]:

$$\partial p/\partial x = -qw^{-3}. \tag{13}$$

Итак, задача сведена к системе уравнений (9)–(13). Для анализа ее удобно преобразовать к новым неизвестным, которые были бы асимптотически ограничены при $\rho \to \pi/2$. С этой целью сначала подставим (13) в (11), чтобы исключить давление p, и перейдем от линейных к угловым переменным φ, ψ. Кроме того, от w перейдем к новой функции v:

$$w = v\sqrt{l}\cos\varphi. \tag{14}$$

В терминах v преобразованное уравнение примет вид

$$v(\varphi) = -\sqrt{l} + \int_0^\rho \alpha(\varphi,\psi)\,qv^{-3}d\psi, \quad \alpha(\varphi,\psi) = a(\varphi,\psi)(\cos\varphi\cos^2\psi)^{-1}.$$

В формулировке задачи пока не отражено противодействие разрыву, т.е . разрушению упругой среды. Поскольку на росте трещины достаточно больших размеров оно слабо сказывается [4], обычно пренебрегают соответствующей концентрацией напряжений у вершин трещины, принимая предположение о плавном смыкании берегов [2]. Можно показать, что в терминах $v(\varphi)$ это равносильно краевому условию

$$v(\pi/2) = 0. \tag{15}$$

Уравнение для v совместимо с (15) при длине трещины

$$l = \left[2\pi^{-1}\int_0^\rho \psi(\cos\psi)^{-2}q(\psi)v^{-3}(\psi)d\psi\right]^2. \tag{16}$$

При этом его можно переписать в форме, которая внешне имеет вид интегрального уравнения со степенной нелинейностью:

$$v(\varphi) = \int_0^\rho \beta(\varphi, \psi) q(\psi) v^{-3}(\psi) d\psi, \quad \beta(\varphi, \psi) = b(\varphi, \psi)(\pi \cos\varphi \cos^2\psi)^{-1}. \tag{17}$$

Функция $b(\varphi, \psi)$ определена формулой (12). Условие (15) автоматически выполняется в силу свойств ядра $\beta(\varphi, \psi)$.

На самом деле задача сводится к относительно простому интегральному уравнению только при заданном расходе. В общем же случае последний неизвестен и является довольно сложным функционалом от v.

Представляет интерес выражение давления в новых переменных. Проинтегрировав (13) по x, в терминах v, l получим

$$p(\varphi) = l^{-1/2} \int_\varphi^\rho q v^{-3} \cos^{-2}\psi d\psi.$$

Если усреднить $p(\varphi)$ по интервалу $[0, \pi/2]$, то с учетом (16), как и должно быть при плавном смыкании [2, 4], имеем совпадение среднего давления с начальным P_g, равным единице в выбранном масштабе:

$$2\pi^{-1} \int_0^{\pi/2} p(\varphi) d\varphi = 2\pi^{-1} \int_0^\rho p(\varphi) d\varphi = 1.$$

Приведем выражение для относительного превышения $\delta = p_0 - 1$ ($p_0 = p(0)$) давления в центре над начальным:

$$\delta = \left[\int_0^\rho (\pi/2 - \psi) q v^{-3} \cos^{-2}\psi d\psi\right] \left(\int_0^\rho \psi q v^{-3} \cos^{-2}\psi d\psi\right)^{-1}. \tag{18}$$

Преобразуем соотношение (9) для расхода. Удобно освободиться от производных по времени и записать расход в терминах $v(\varphi)$. Опуская несложные, но громоздкие выкладки, запишем результат в виде

$$q = 1 - \left(1 - \lambda l \int_0^\rho (t - t')^{-1/2} \cos\psi d\psi\right) s - \lambda l \int_0^\varphi (t - t')^{-1/2} \cos\psi d\psi, \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} s = s_\varphi / s_\rho, \quad s_\varphi = \int_0^\varphi v\left(\frac{3}{2} + \frac{l}{v}\frac{\partial v}{\partial l}\right) \cos^2\psi d\psi - v(\varphi, l) \sin\varphi \cos\varphi, \\ s_\rho = \int_0^\rho v\left(\frac{3}{2} + \frac{l}{v}\frac{\partial v}{\partial l}\right) \cos^2\psi d\psi + l \frac{d\rho}{dl} v(\rho, l) \cos^2\rho. \end{gathered} \tag{20}$$

Как будет видно из дальнейшего, скорость роста трещины при больших размерах оказывается разной при больших и малых утечках. При написании уравнений целесообразно учесть это явно. Но прежде чем приступить к такому преобразованию, введем функции

$$c(\gamma) = \begin{cases} 1 \\ \gamma^2 \end{cases}, \qquad d(\gamma) = \begin{cases} \gamma \\ 1 \end{cases}, \qquad \gamma = \lambda l^{1/4}, \tag{21}$$

которые принимают верхние значения при $\gamma < 1$, нижние — при $\gamma \geqslant 1$. В точке $\gamma = 1$ функции испытывают излом.

Введем далее вместо t, ω_ρ переменные τ, ω_ρ при помощи соотношений

$$t = c(\gamma)\tau l^{3/2}, \quad t' = c(\gamma)\tau' l^{3/2}, \quad \omega_\rho = l^{3/2}\omega_\rho; \tag{22}$$

$$\overline{\omega}_\rho = \int\limits_0^\rho v(\psi)\cos^2\psi d\psi. \tag{23}$$

В новых переменных уравнения (10), (19) примут вид

$$\tau = c^{-1}(\gamma)\overline{\omega}_\rho + 2d(\gamma)\int\limits_0^\rho \sqrt{\tau - \tau'}\cos\psi d\psi; \tag{24}$$

$$q = 1 - \left(1 - d(\gamma)\int\limits_0^\rho (\tau - \tau')^{-1/2}\cos\psi d\psi\right)s - d(\gamma)\int\limits_0^\varphi (\tau - \tau')^{-1/2}\cos\psi d\psi. \tag{25}$$

Итак, задача сведена к системе уравнений (16), (17), (20)-(25), после решения которой раскрытие и давление находятся по формулам (14), (18) как функции ρ, λ и φ. Чтобы не перегружать данной работы, ограничимся обсуждением аналитических результатов, которые можно получить при малых и больших γ.

Проанализируем уравнения (24), (25). В предположении ограниченности v и τ относительный порядок слагаемых в правых частях этих уравнений определяется только коэффициентами $c(\gamma)$ и $d(\gamma)$. Исходя из структуры последних, описываемой выражениями (21), можно в терминах γ дать определение трещины со слабыми либо, наоборот, очень большими утечками. При $\gamma \ll 1$ мал вклад интегральных членов в (24), (25), которые характеризуют утечки, так что можно говорить о слабых утечках. Наоборот, случай $\gamma^{-2} \ll 1$ соответствует большим утечкам. При $\gamma \ll 1$ объем утечек из трещины мал по сравнению с ее собственным объемом и оказывает слабое влияние на профиль $q(\varphi)$ расхода. При $\gamma^{-2} \ll 1$ бо́льшая часть жидкости уходит в проницаемую среду, а распределение $q(\varphi)$ формируется скоростью утечек.

Оценим характерную величину λ, используя типичные значения определяющих размерных констант. Положим, что $E \cong 4 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu \cong 0{,}24$, $P_g \cong 4 \cdot 10^7$ Па, $H \cong 25$ м, $Q_0 \cong 0{,}05$ м^3/с, $\Lambda \cong 10^{-4}$ м/с$^{1/2}$. Оценка дает $\lambda \cong 5 \cdot 10^{-2}$. При таком λ даже при $l \cong 100$ значение γ остается малым — порядка 0,1, оно станет равным единице лишь при $l \cong 1{,}6 \cdot 10^5$. Чтобы найти соответствующую размерную длину трещины L, зададим еще характерное значение вязкости $\mu \cong 0{,}05$ Па $\cdot$ с и, оценив масштабный множитель L_* ($L_* = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ м), получим $L \cong 1200$ м. Вдвое меньшее значение γ будет достигнуто при $L \cong 75$ м. Итак, при выбранных параметрах гидроразрыва утечки станут заметно влиять только на рост достаточно развитой трещины, причем случай $\gamma^{-2} \ll 1$ фактически не достижим. Наоборот, случай $\gamma \ll 1$ представляет практический интерес.

Перейдем к анализу поведения трещины при больших размерах или, принимая во внимание (15), (16), при большой степени заполнения, когда $\varepsilon = \pi/2 - \rho \to 0$. Рассмотрим сначала, как упрощается общая система уравнений при $\gamma \ll 1$. В нулевом приближении по γ переменная τ, как следует из (21) и (24), явно выражается через v в виде

$$\tau = \overline{\omega}_\rho = \int\limits_0^\rho v(\psi)\cos^2\psi d\psi. \tag{26}$$

Объем утечек при этом определяется выражением

$$\lambda\omega_{\lambda\rho} = 2\lambda\int\limits_0^\tau dx'\sqrt{t-t'} = 2\lambda l^{7/4}\int\limits_0^\rho \sqrt{\tau-\tau'}\cos\psi d\psi.$$

Оставшиеся уравнения образуют систему

$$v(\varphi) = \int\limits_0^\rho \beta(\varphi,\psi)\,qv^{-3}d\psi, \quad \sqrt{l} = 2\pi^{-1}\int\limits_0^\rho \psi qv^{-3}\cos^{-2}\psi d\psi, \quad q = 1 - s_\varphi/s_\rho,$$

$$s_\varphi = \int\limits_0^\varphi v\Big(\frac{3}{2} + \frac{l}{v}\frac{\partial v}{\partial l}\Big)\cos^2\psi d\psi - v(\varphi,l)\sin\varphi\cos\varphi, \tag{27}$$

$$s_\rho = \int\limits_0^\rho v\Big(\frac{3}{2} + \frac{l}{v}\frac{\partial v}{\partial l}\Big)\cos^2\psi d\psi + l\frac{d\rho}{dl}v(\rho,l)\cos^2\rho.$$

Переход к (27) равносилен пренебрежению утечками в выражении для расхода $q(\varphi)$. При выбранном способе обезразмеривания в (27) нет зависимости от физических констант, которые остались в масштабных множителях, так что решение универсально.

С ростом трещины в проницаемой среде условие $\gamma \ll 1$ рано или поздно нарушается, и описание гидроразрыва на основе системы уравнений (27) становится некорректным. Однако для среды с плохой проницаемостью ввиду слабой зависимости $\gamma = \lambda l^{1/4}$ от l оно сохранится достаточно долго. В этом случае возможны дальнейшие упрощения (27), основанные на учете асимптотических свойств функции v. Речь идет о следующем. С одной стороны, исходя из простых физических соображений, надо ожидать монотонного роста и выполаживания $v(\varphi)$ при увеличении l. С другой стороны, из анализа уравнения для v следует, что v ограничена. Значит, производная $\partial v/\partial l$ должна исчезать при больших l почти всюду, кроме, быть может, малой окрестности ρ.

Сама степень заполнения ρ также монотонно увеличивается с ростом l, стремясь к пределу $\pi/2$. Но тогда, рассматривая выражения для s_φ и s_ρ при больших l, можно показать, что вклады от всех производных по l исчезают. Задача при этом становится одномерной и сводится к интегральному уравнению

$$v(\varphi) = \int\limits_0^\rho \beta(\varphi,\psi)\,q(\psi)\,v^{-3}(\psi)\,d\psi; \tag{28}$$

$$q = \Big[\int\limits_\varphi^\rho v\cos^2\psi d\psi + \frac{2}{3}v(\varphi,l)\sin\varphi\cos\varphi\Big]\Big/\Big(\int\limits_0^\rho v\cos^2\psi d\psi\Big). \tag{29}$$

Попытаемся при помощи элементарных оценок показать, что функция v, получаемая из решения этой задачи, действительно обладает свойствами, которые были использованы при выводе выражения (29), т. е. v ограничена при стремлении ρ к $\pi/2$.

Предварительно разобьем смоченный участок трещины на две области: область конечного размера, почти доходящую до границы жидкости, и малую область порядка несмоченного участка с размером ε. Аргументы и характерные значения функций в первой и второй области условимся отмечать индексами 1, 2 соответственно.

Оценим сначала величины q_1 и q_2. Выделим в интервалах интегрирования в (29) участки, относящиеся к первой и второй области. Учитывая, что во второй области $\cos\psi \sim \varepsilon$, $\varepsilon = \pi/2 - \rho \ll 1$, получим $q_1 \sim 1$, $q_2 \sim \varepsilon v_2/v_1$.

Оценим далее величину ядра β в этих областях. Из его выражения, даваемого второй формулой (17), следует, что по порядку величины

$$\beta(\varphi_1, \psi_1) \sim 1, \quad \beta(\varphi_1, \psi_2) \sim \varepsilon^{-1}, \quad \beta(\varphi_2, \psi_1) \sim \varepsilon, \quad \beta(\varphi_2, \psi_2) \sim \varepsilon^{-1}.$$

Подстановка в (28) этих значений, а также полученных оценок q позволяет определить порядок v_1 и v_2:

$$v_1 \sim 1, \qquad v_2 \sim \varepsilon^{1/3}. \tag{30}$$

Отсюда, в частности, вытекает ограниченность v при $\varepsilon \to 0$.

Воспользовавшись (30), уточним оценки q:

$$q_1 \sim 1, \quad q_2 \sim \varepsilon^{4/3}. \tag{31}$$

Подставляя (30), (31) в уравнение (16), получим асимптотический закон роста трещины в зависимости от размера ε несмоченного участка в угловых единицах: $l \sim \varepsilon^{-4/3}$.

Установим ряд асимптотических формул для других переменных. Обозначим через ϖ_- предел ϖ_ρ при $\varepsilon \to 0$. В соответствии с формулами (22), (26) запишем приближенное соотношение $t \cong \omega_\rho \cong \varpi_- l^{3/2}$ или после обращения функции и перехода к размерным переменным $L \cong 0{,}589 \varpi_-^{-2/3} (D/\mu)^{1/6} Q_*^{1/2} T^{2/3}$. Размерная длина трещины, таким образом, асимптотически не зависит от коэффициента утечек и начальных напряжений.

Представляет также интерес относительная длина несмоченного участка $(l-r)/l$. Она уменьшается пропорционально квадрату ε. В линейных единицах $l - r$ падает обратно пропорционально корню из l:

$$l - r = (1 - \sin\rho)\, l \sim l\varepsilon^2 \sim l^{-1/2} \sim t^{-1/3}.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение раскрытия. Обозначим предельное значение v в центре трещины, когда $\varepsilon \to 0$, через v_-. На основании (14) приближенно запишем $w_0 \cong v_- l^{1/2} \cong v_- \varpi_-^{-1/3} t^{1/3}$, где w_0 — безразмерное полураскрытие в центре.

Для размерного раскрытия в центре трещины $2W_0$ получим асимптотическое выражение

$$2W_0 \cong k P_g^{-1} \sqrt{\mu D Q_*} \sqrt{L}, \quad k = \sqrt{6}\, v_- \varpi_-^{-1/3}.$$

В рассматриваемом приближении раскрытие трещины, как и длина, не зависит от коэффициента утечек и начальных напряжений.

Остановимся еще на асимптотике давления в центре трещины p_0. Обращаясь к (18) и проделывая выкладки, аналогичные предыдущим, имеем $\delta = p_0 - 1 \sim l^{-1/2} \sim t^{-1/3}$. Асимптотическое поведение δ и $l - r$ оказывается одинаковым.

Приведем, наконец, для справок асимптотическую формулу, характеризующую рост со временем объема утечек $\lambda\omega_{\lambda\rho}$:

$$\lambda\omega_{\lambda\rho} \cong 2\lambda\theta_- l^{7/4} \quad \Bigl(\theta_- = \lim \int\limits_0^\rho \sqrt{\tau-\tau'}\cos\psi d\psi \quad \text{при} \quad \rho \to \pi/2\Bigr).$$

Проанализируем рост трещины в среде с хорошей проницаемостью, когда выполняется условие $\gamma^{-2} \ll 1$. В нулевом приближении по γ^{-2} уравнения (24), (25) примут вид

$$\tau = 2\int\limits_0^\rho \sqrt{\tau-\tau'}\cos\psi d\psi, \quad q = 1 - \int\limits_0^\varphi (\tau-\tau')^{-1/2}\cos\psi d\psi. \tag{32}$$

Эти соотношения отщепляются от остальной системы. Для нахождения q и τ введем обозначения $\xi = \sin[\psi(\tau')]$, $\eta = d\xi/d\tau'$ и перепишем (32):

$$\tau = 2\int\limits_0^\tau \sqrt{\tau-\tau'}\eta(\tau')\,d\tau'.$$

Отсюда, используя преобразование Лапласа, находим функцию $\eta(\tau) = 1/(\pi\sqrt{\tau})$. Тогда $\xi(\tau) = \sin\rho = 2\pi^{-1}\sqrt{\tau}$. Рассматривая τ как функцию ρ, из этого соотношения получим

$$\tau = \tau_+ \sin^2\rho \quad (\tau_+ = (\pi/2)^2). \tag{33}$$

Выражение для расхода теперь можно записать в явном виде, после чего вся задача сводится к одномерному интегральному уравнению относительно v, не содержащему размерных физических параметров:

$$v(\varphi) = \int\limits_0^\rho \beta(\varphi,\psi)\,qv^{-3}d\psi, \quad q = 1 - 2\pi^{-1}\arcsin(\sin\varphi/\sin\rho). \tag{34}$$

При переходе к большим длинам дополнительное условие $l \gg 1$, или, что то же самое, $\varepsilon \ll 1$, лишь несколько упрощает вид весовой функции q в этом уравнении. С точностью до членов порядка ε^2 запишем $q \cong 1 - 2\varphi/\pi$. Отсюда имеем оценки для q, аналогичные (31), но при $\gamma^{-2} \ll 1$

$$q_1 \sim 1, \qquad q_2 \sim \varepsilon. \tag{35}$$

Таким же способом, как и в случае малых γ, получим

$$v_1 \sim 1, \qquad v_2 \sim \varepsilon^{1/4}. \tag{36}$$

Обозначим через v_+ предельное значение v_0 при $\varepsilon \to 0$. Опуская выкладки, аналогичные проделанным в случае малых γ, запишем результирующие асимптотические формулы, характеризующие поведение основных переменных при малых ε и γ^{-2}:

$$\lambda l \cong \sqrt{t/\tau_+} \sim \varepsilon^{-3/2}, \quad L \cong \pi^{-1}Q_*\Lambda^{-1}T^{1/2},$$

$$2W_0 \cong 2v_+\Bigl(\frac{3\mu Q_*}{2D}\Bigr)^{1/4} L^{1/2} \cong \frac{v_+}{\sqrt{\pi}}\Bigl(\frac{24\mu}{D}\Bigr)^{1/4} Q_*^{3/4}\Lambda^{-1/2}T^{1/4},$$

$$\omega_\rho \sim t^{3/4}, \quad \omega_{\lambda\rho} \sim t, \quad p_0 - 1 \sim l^{-1/2} \sim t^{-1/4}, \quad l - r \sim l^{-1/3} \sim t^{-1/6}.$$

Эти соотношения известны [4] и приведены здесь в основном для полноты картины. Стоит лишь отметить, что получены они более строго, и это позволило, в частности, в последней формуле поправить показатели степеней.

Сравним характерные свойства трещины рассматриваемого типа и родственного, описываемого моделью Перкинса — Керна — Нордгрена (ПКН). Обычно [1] обращают внимание только на противоположные тенденции (падение и рост) в поведении давления $P(0)$, которые связаны со степенью стесненности разнотипных трещин при их росте. С математической точки зрения интересно еще одно более тонкое различие. При формулировке рассматриваемой задачи в безразмерном виде сохраняется параметр $\lambda(\sigma)$, в то время как при надлежащем обезразмеривании модель ПКН вообще не зависит от физических констант процесса [8], которые целиком концентрируются в масштабных множителях. Для модели ПКН начальное давление P_g — это не более чем уровень отсчета переменной давления, а на поведении изучаемой трещины значение P_g сказывается весьма существенно. Появление безразмерного параметра $\lambda(\sigma)$ в анализируемой нелокальной модели вызвано существованием несмоченной зоны с нулевым давлением, размер которой зависит от начального давления. В то же время из вида сформулированной системы уравнений следует, что нельзя исключать несмоченную зону из рассмотрения, «приближенно» положив, например, что $\rho = \pi/2$. Хотя развитую трещину характеризует близость ρ к $\pi/2$, нужно учесть, что степень заполнения, по существу, играет роль времени, и ее нельзя считать константой, если хотим следить за ходом процесса.

В заключение отметим, что нелокальность задачи сохраняется и в рассмотренных асимптотических случаях. Но отсутствие зависимости от λ объясняется просто тем, что эти случаи соответствуют нулевому значению малого параметра γ либо γ^{-2}.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Reservoir** Stimulation // Eds. M. J. Economides, K. G. Nolte. Houston: Schlumberger Educational Services, 1989.
2. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
3. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
4. **Geertsma J., de Klerk F.** A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petr. Techn. 1969. V. 21, N 12. P. 1571–1581.
5. **Алексеенко О. П., Вайсман А. М.** Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 145–149.
6. **Howard G. C., Fast C. R.** Hydraulic Fracturing. Dallas: SPE, 1970. V. 2.
7. **Слепян Л. И.** Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
8. **Kemp L. F.** Study of Nordgren's equation of hydraulic fracturing // SPE Production Engineering. 1990. V. 5. P. 311–314.

Поступила в редакцию 5/V 1995 г.