

УДК 532.526

СЛОЙ СМЕШЕНИЯ НА ПОДВЕТРЕННОЙ СТОРОНЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается течение двухслойной смешивающейся жидкости над неровным дном. В приближении мелкой воды построена математическая модель развития турбулентного слоя между однородными слоями различной плотности при обтекании двухслойным потоком локального препятствия в канале. Изучено влияние процесса перемешивания на формирование начального участка стационарного плотностного течения на подветренном склоне препятствия.

Ключевые слова: двухслойное течение, перемешивание, вовлечение, слой смешения, топографические эффекты.

Введение. Одним из интересных и малоизученных аспектов течений жидкости над локальным препятствием является влияние слабой стратификации на глобальную структуру течения. К натурным явлениям, обусловленным наличием плотностной стратификации, относится развитие мощных присклоновых течений в атмосфере и океане при обтекании потоком локальных возвышенностей [1–3]. Основным механизмом развития таких течений является генерация крупных вихревых структур на подветренном склоне препятствия, обеспечивающих интенсивный вертикальный перенос массы и импульса в жидкости. К аналогичным явлениям можно также отнести отрыв пограничного слоя в течении слабостратифицированной жидкости над неровным дном [4]. В указанном классе течений процессы перемешивания играют определяющую роль, поэтому возникает необходимость построения относительно простой математической модели этих явлений.

В настоящей работе анализируется математическая модель двухслойной мелкой воды над неровным дном с учетом турбулентного перемешивания слоев [5]. Эта модель расширяет возможности применения классической теории мелкой воды для широкого класса турбулентных течений стратифицированной жидкости. При этом построенная модель достаточно проста для аналитического исследования эволюции основных типов течений, таких как слой смешения, плавучие струи, плотностные или гравитационные течения. В качестве примера использования модели рассмотрена задача о формировании слоя смешения над склоном в двухслойных течениях смешивающейся жидкости.

1. Математическая модель. Уравнения двухслойной мелкой воды с учетом турбулентного перемешивания между слоями [5] для течений над неровным дном могут быть представлены в виде

$$h_t + (hu)_x = -\chi^-, \quad (\zeta)_t + (\zeta w)_x = -\chi^+, \quad \eta_t + (\eta v)_x = \bar{\chi},$$

$$u_t + (u^2/2 + bh + \bar{b}\eta + p)_x = -bz_x, \quad w_t + (w^2/2 + p)_x = 0, \quad (bh + \bar{b}\eta)_t + (bhu + \bar{b}\eta v)_x = 0,$$

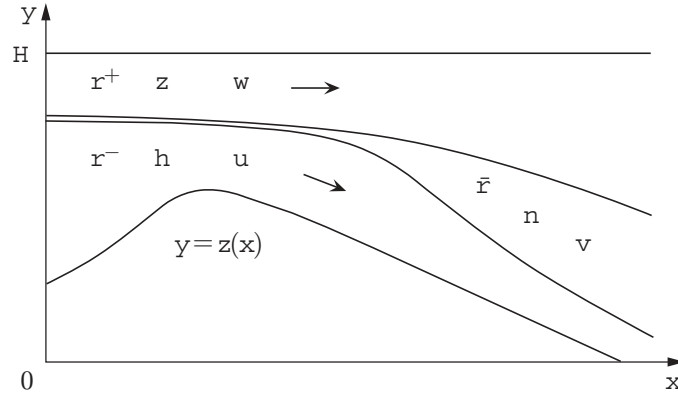


Рис. 1. Схема двухслойного течения над препятствием

$$\begin{aligned}
& (hu + \eta v + \zeta w)_t + (hu^2 + \eta v^2 + \zeta w^2 + bh^2/2 + \bar{b}\eta h + \bar{b}\eta^2/2 + \\
& \quad + (h + \eta + \zeta)p)_x = -(p + bh + \bar{b}\eta)z_x, \\
& (hu^2 + \eta(v^2 + q^2) + \zeta w^2 + bh^2 + 2\bar{b}\eta h + \bar{b}\eta^2)_t + (hu^3 + \eta v(v^2 + q^2) + \zeta w^3 + \\
& \quad + 2p(hu + \eta v + \zeta w) + 2\bar{b}\eta hu + 2\bar{b}(h + \eta)\eta v + 2bh^2u)_x = -2(bhu + \bar{b}\eta v)z_x - \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь h, ζ, η — толщины нижнего, верхнего слоев и прослойки; $z(x)$ — форма дна; u, w, v — соответствующие скорости в слоях; $b = (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+$ — заданная плавучесть нижнего слоя; $\bar{b} = (\bar{\rho} - \rho^+)g/\rho^+$ — плавучесть в прослойке; $\rho^-, \rho^+, \bar{\rho}$ — соответствующие плотности слоев; g — ускорение свободного падения; p — удельное давление на верхней границе течения; q^2 — удельная кинетическая энергия “больших вихрей”, определяющих процесс вовлечения жидкости из однородных слоев в прослойку (рис. 1). Скорости вовлечения χ^\pm , $\bar{\chi} = \chi^+ + \chi^-$ считаются известными функциями искомых переменных. В приближении Буссинеска полная глубина $H = h + \eta + \zeta + z \equiv \text{const}$. Из несжимаемости жидкости следует, что полный расход $hu + \eta v + \zeta w$ является функцией только времени, причем заданной в силу граничных условий. Учет диссипации энергии в турбулентной прослойке осуществляется в (1) заданием функции ε . Выбор функций χ^\pm, ε для различных типов течения на подводном склоне будет осуществлен ниже.

Более четкое представление о структуре системы (1) может быть получено из дифференциальной формы записи этой системы:

$$\begin{aligned}
& h_t + uh_x + hu_x = -\chi^-, \quad \zeta_t + w\zeta_x + \zeta w_x = -\chi^+, \quad \eta_t + v\eta_x + \eta v_x = \chi^+ + \chi^-, \\
& \quad u_t + uu_x + bh_x + \bar{b}\eta_x + \eta\bar{b}_x + p_x = -bz_x, \quad w_t + ww_x + p_x = 0, \\
& \quad v_t + vv_x + \bar{b}h_x + \bar{b}\eta_x + \eta\bar{b}_x/2 + p_x = -\bar{b}z_x + (\chi^-(u - v) + \chi^+(w - v))/\eta; \\
& \quad \quad \bar{b}_t + v\bar{b}_x = (\chi^-(b - \bar{b}) - \chi^+\bar{b})/\eta, \\
& q_t + vq_x = (\chi^-(u - v)^2 - q^2 - (b - \bar{b})\eta) + \chi^+((w - v)^2 - q^2 - \bar{b}\eta) - \varepsilon)/(2\eta q).
\end{aligned} \tag{2}$$

Подсистема (2) представляет собой неоднородную систему уравнений трехслойной мелкой воды в приближении Буссинеска, а левая часть в уравнениях (3) — производную вдоль траектории частиц в прослойке. Поэтому характеристики (1) совпадают с характеристиками уравнений трехслойной мелкой воды и имеют дополнительную кратную контактную характеристику [5] $dx/dt = v$. Основное преимущество сформулированного выше подхода состоит в том, что в рамках трехслойной схемы течения использование полных законов сохранения массы, импульса и энергии не только позволяет замкнуть систему и однозначно

найти соотношения на разрывах, но и дает возможность получить конкретное выражение для правых частей уравнений (2), (3), описывающих процесс вовлечения частиц в турбулентную прослойку в результате развития сдвиговой неустойчивости течения.

Для замыкания модели (1) необходимо задать функции χ^\pm , ε . Представление закона диссипации в виде

$$\varepsilon = \mu q^3, \quad \mu \equiv \text{const} \quad (4)$$

следует из выбора толщины прослойки η в качестве характерного масштаба турбулентности. При выборе закона вовлечения в прослойку простейшая гипотеза о пропорциональности скорости вертикального переноса характерной скорости вихревых структур, генерируемых сдвигом скорости в слое смешения, приводит к следующей зависимости:

$$\chi^\pm = \sigma q, \quad \sigma \equiv \text{const}. \quad (5)$$

Зависимость (5) с $\sigma = 0,15$ экспериментально обоснована в [6] для свободных сдвиговых потоков однородной жидкости. В течениях стратифицированной жидкости закон вовлечения (5) адекватно описывает нелинейную стадию развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в слоях смешения, гравитационных течениях в горизонтальных и наклонных каналах и других основных типах течений, определяемых процессами турбулентного перемешивания [5]. Если в результате эволюции турбулентная прослойка приближается к одной из внешних границ течения (дно, крышка канала или свободная поверхность), то вовлечение прекращается (χ^+ или χ^- обращается в нуль) и слой смешения переходит в затопленную струю. При соответствующем выборе закона вовлечения математическая модель (1) описывает такую трансформацию течения.

Далее рассматривается развитие стационарного слоя смешения в сверхкритическом двухслойном течении над наклонной плоскостью. Исследуется начальная стадия процесса до момента достижения слоем смешения дна или свободной поверхности, поэтому для описания течения используются уравнения (1), (4), (5). Можно выделить и другие возможные приложения уравнений (1) для описания:

- поверхностной струи $\chi^+ = 0$, $\chi^- = \sigma q$;
- придонного слоя $\chi^- = 0$, $\chi^+ = \sigma q$.

Указанные модели, позволяющие дать адекватное представление о таких важных гидродинамических процессах, как отрыв пограничного слоя и развитие мощного присклонового течения при обтекании подводного препятствия потоком слабостратифицированной жидкости, требуют дополнительного анализа и в данной работе не рассматриваются.

2. Стационарные двухслойные течения. Рассмотрим эволюцию слоя смешения в канале переменной глубины (см. рис. 1). Интенсивное перемешивание между слоями возникает на подветренном склоне препятствия в случае, когда докритическое двухслойное течение перед препятствием трансформируется в сверхкритическое течение за ним. Понятие сверх- и докритичности течения связано со скоростью длинных внутренних волн в двухслойном течении. Эксперименты [7] показывают, что в двухслойном течении смешивающейся жидкости на подветренной стороне препятствия верхний слой тормозится, а нижний ускоряется. Развитие сдвиговой неустойчивости на границе раздела слоев приводит к формированию слоя смешения, в котором развитие крупных вихревых структур в прослойке поддерживается за счет перестройки профиля скорости. Так как именно этот механизм развития турбулентной прослойки в двухслойных течениях заложен в основу рассматриваемой модели, то для описания эволюции слоя смешения над склоном воспользуемся следующей системой уравнений стационарных двухслойных течений смешивающейся жидкости над неровным дном:

$$wh_x + hu_x = -\chi^-, \quad w\zeta_x + \zeta w_x = -\chi^+, \quad v\eta_x + \eta v_x = \chi^- + \chi^+,$$

$$\begin{aligned}
uu_x + bh_x + \bar{b}\eta_x + \eta\bar{b}_x + p_x &= -bz_x, & ww_x + p_x &= 0, \\
vv_x + \bar{b}h_x + \bar{b}\eta_x + \eta\bar{b}_x/2 + p_x &= -\bar{b}z_x + (\chi^-(u-v) + \chi^+(w-v))/\eta, & \eta v\bar{b}_x &= \chi^-(b-\bar{b}) - \chi^+\bar{b}, \\
2\eta vqq_x &= \chi^-((u-v)^2 - q^2 - (b-\bar{b})\eta) + \chi^+((w-v)^2 - q^2 - \bar{b}\eta) - \varepsilon.
\end{aligned} \tag{6}$$

При $\eta > 0$ система (6) может быть разрешена относительно производных, если определитель

$$\Delta = (u^2/h + w^2/\zeta - b)(v^2/\eta + w^2/\zeta - \bar{b}) - (w^2/\zeta - \bar{b})^2$$

не обращается в нуль. При этом

$$\begin{aligned}
h_x &= (a_1(v^2/\eta + w^2/\zeta - \bar{b})/h - a_2(w^2/\zeta - \bar{b})/\eta)/\Delta, & u_x &= -\chi^-/h - uh_x/h, \\
\eta_x &= (a_1 - (u^2 - bh + hw^2/\zeta)h_x)/(hw^2/\zeta - \bar{b}h), & v_x &= (\chi^+ + \chi^- - v\eta_x)/\eta, \\
w_x &= (-\chi^+ + w(h_x + \eta_x + z_x))/\zeta, & \zeta_x &= -(\chi^+ + \zeta w_x)/w,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $a_1 = h(b - w^2/\zeta)z_x + \chi^+hw/\zeta - \chi^-u + (\chi^-(b-\bar{b}) - \chi^+\bar{b})h/v$, $a_2 = \eta(\bar{b} - w^2/\zeta)z_x + \chi^+(2v - w) + \chi^-(2v - u) + \chi^+\eta w/\zeta + (\chi^-(b-\bar{b}) - \chi^+\bar{b})\eta/(2v)$. Производные \bar{b}_x и q_x определены в (6).

Система (6) описывает широкий класс стационарных течений над неровным дном, в которых перемешивание на границе раздела между двумя однородными слоями является определяющим фактором, формирующим течение. К таким течениям относятся сверхкритические течения над склоном, рассматриваемые ниже.

3. Слой смешения над склоном. Рассмотрим генерацию турбулентного слоя в сверхкритическом двухслойном течении в канале переменной глубины. Формирование слоя смешения в результате развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца является важным элементом многих стратифицированных течений, возникающих при обтекании препятствия как в атмосфере, так и в верхнем слое океана. Если препятствие контролирует течение вверх по потоку, то перед ним реализуется докритическое течение, в котором перемешивание между слоями несущественно, и двухслойная схема течения вполне приемлема. На подветренной стороне препятствия развивается сверхкритический режим течения, а в окрестности границы раздела слоев формируется область интенсивного перемешивания. В экспериментах [7] установлено, что развитие неустойчивости двухслойного течения соответствует эволюции слоя смешения в свободных сдвиговых потоках [6]. На начальном этапе толщина слоя смешения увеличивается линейно с увеличением расстояния от гребня препятствия, как и в канале постоянной глубины, затем скорость вовлечения жидкости из однородных слоев в прослойку резко уменьшается (рис. 2). Этот участок течения формируется в результате ускорения нижнего слоя жидкости вдоль склона. Далее слой смешения достигает дна, и течение переходит в придонную турбулентную струю. Отметим, что начальный участок развития слоя смешения определяет такие основные характеристики придонной струи, как полный поток плавучести и расход жидкости в ядре плотностного течения [5]. Применим модель (1), (4), (5) для описания эволюции начального участка слоя смешения в следующей постановке.

Пусть на левой границе канала ($x = 0$) задано сверхкритическое двухслойное течение

$$\eta_0 = 0, \quad h = h_0 > 0, \quad \zeta = \zeta_0 > 0, \quad u = u_0 > 0, \quad w = w_0 \tag{8}$$

и $\Delta_0 = u_0^2/h_0 + w_0^2/\zeta_0 - b > 0$. На небольшом расстоянии от левой границы решение (4)–(6) определяется следующей асимптотикой слоя смешения, обеспечивающей ограниченность производных при $x = 0$ [5]:

$$\bar{b}_0 = b/2, \quad v_0 = (u_0 + w_0)/2, \quad q_0 = |u_0 - w_0|/\sqrt{2(2 + \mu/\sigma)}. \tag{9}$$

В силу симметрии закона вовлечения (4) и соотношений (9) средняя плавучесть в прослойке постоянна: $\bar{b} \equiv \bar{b}_0 = b/2$.

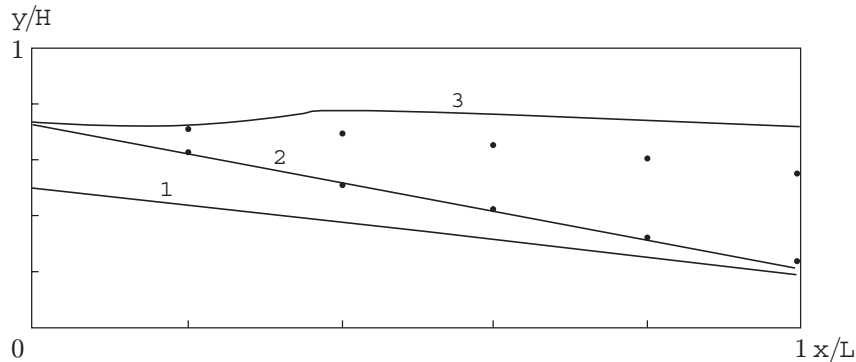


Рис. 2. Развитие слоя смешения на наклонной плоскости:

1 — дно канала; 2, 3 — нижняя и верхняя границы слоя смешения (расчет по модели (1)); точки — соответствующие границы слоя смешения, найденные по линейной части профиля скорости в слое смешения [7]

Далее, в слое смешения вовлечение из однородных слоев в прослойку начинается на левой границе канала $x = 0$ с конечной скоростью $\chi^\pm = \sigma q_0$. Поэтому при $x > 0$ толщина прослойки η положительна, и решение (7) может быть найдено в некоторой области $x > 0$. В частности, для начальных данных (8), соответствующих лабораторному эксперименту [7], сверхкритическое течение ($\Delta > 0$) может быть построено вплоть до момента перехода слоя смешения в придонную струю ($h = 0$).

На рис. 2 представлено решение задачи (7)–(9), описывающее развитие слоя смешения над наклонной плоскостью в двухслойном течении смешивающихся жидкостей, реализованном в [7]. Точка $x = 0$ соответствует началу развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в сверхкритическом течении и находится на расстоянии примерно 10 см от гребня локального препятствия, расположенного в экспериментальном лотке. В [7] показано, что на участке между гребнем и точкой, в которой начинает формироваться слой смешения, критическое течение преобразуется в сверхкритическое без существенного перемешивания между слоями.

Решение задачи (7)–(9) ($\sigma = 0,15$, $\mu = \sigma$) построено для следующих начальных и граничных условий: $H = 30$ см, $L = 50$ см, $z_0 = 15$ см, $h_0 = 7$ см, $u_0 = 5$ см/с, $w_0 = 0$, $b = 1,4$ см/с², $\varphi = 10,8^\circ$ (φ — угол наклона плоскости к горизонту). В решении можно выделить начальный участок развития слоя смешения, в котором эффекты плавучести не оказывают существенного влияния на процесс перемешивания, и основной участок развития турбулентного слоя за счет ускорения нижнего однородного слоя. Структура построенного решения качественно соответствует структуре течения, исследованного в [7]. Точками на рис. 2 показаны границы слоя смешения, найденные по представленным на рис. 9 в [7] экспериментальным данным о распределении скорости в слое смешения. При этом толщина турбулентного слоя определялась по линейному участку распределения скорости в прослойке. Заметим, что модель (1) задает внешние границы области турбулентного перемешивания, занятой “большими вихрями”. Эффективная же толщина области перемешивания, в которой профили скорости и плотности близки к линейным, существенно меньше полной толщины, найденной из (1).

Аналогичная ситуация возникает при использовании (1) для моделирования слоя смешения в однородной жидкости [5]. Точное решение (1), описывающее развитие автомодельного слоя смешения, дает скорость расширения области перемешивания $d\eta/dx = 2\sigma = 0,3$, а экспериментальная оценка скорости расширения эффективной толщины слоя смешения — $d\eta/dx = 0,18$. Как показано в [5, рис. 7.4], теоретическое значение для закона расширения эффективной толщины $d\eta/dx = 0,18$ в слое смешения может быть получено

на основе модели (1) следующим образом: найденные с помощью (1) зависимости $\eta = \eta(x)$, $q = q(x)$ используются далее в качестве линейного масштаба и масштаба турбулентности в полуэмпирической модели следующего уровня для восстановления распределений продольной компоненты скорости и напряжений Рейнольдса в слое смешения. Затем по профилю скорости находятся эффективные границы турбулентного течения. Этот подход может быть использован и для восстановления профиля скорости в турбулентных течениях стратифицированной жидкости за препятствием, однако его реализация выходит за рамки данной работы.

В уравнениях (1) влияние придонного пограничного слоя, развивающегося за счет трения потока о дно канала, не учитывалось. Такое допущение оправданно до тех пор, пока толщина пограничного слоя мала по сравнению с толщиной нижнего однородного слоя. Когда нижняя граница слоя смешения достигает дна ($h \rightarrow 0$), гравитационное течение переходит в турбулентную струю с достаточно сложной внутренней структурой, вовлечение в прослойку перестает быть симметричным и гипотеза (4) уже неприемлема. Простейшая математическая модель нестационарного плотностного течения на наклонной плоскости, учитывающая как эволюцию турбулентного слоя переменной плотности, так и наличие придонного ядра течения постоянной плотности, представлена в [5]. Заметим, что в рамках этой модели необходимые граничные условия для расчета как основного стационарного участка плотностного течения, так и нестационарной головной части течения могут быть найдены из решения рассмотренной выше задачи о формировании начального участка слоя смешения над склоном.

В заключение отметим, что модель (1) при соответствующем выборе законов вовлечения χ^\pm описывает различные стадии формирования области интенсивного турбулентного перемешивания при обтекании препятствия стратифицированной жидкостью. Эта задача имеет многочисленные приложения в океанологии и метеорологии, например для изучения подводных “водопадов”, мощных присклоновых течений и т. д. Поэтому модель (1) представляет собой достаточно простой инструмент для исследования натуральных течений, позволяющий сопоставить аналитическое решение с реальной картиной течения, и является промежуточной моделью между классической теорией мелкой воды и прямым численным моделированием турбулентных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Simpson J. E.** Gravity currents. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
2. **Farmer D. M., Armi L.** Stratified flow over topography: the role of small scale entrainment and mixing in flow establishment // Proc. Roy. Soc. London. 1999. V. A 455. P. 3221–3258.
3. **Smith R. B.** On severe downslope winds // J. Atmos. Sci. 1985. V. 42, N 3. P. 2597–2603.
4. **Lawrence G. A.** The hydraulics of steady two-layer flow over a fixed obstacle // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 605–633.
5. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
6. **Таунсенд А. А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
7. **Pawlak G., Armi L.** Mixing and entrainment in developing stratified currents // J. Fluid Mech. 2000. V. 424. P. 45–73.