

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЛАБЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ**

А. И. Ивандаев, Р. И. Нигматуллин

(Москва)

На основе линеаризованных уравнений гидромеханики [1] и уравнений состояния фаз исследовано распространение слабых возмущений в двухфазных средах, представляющих собой смесь газа с каплями или частицами, с учетом возможных фазовых переходов. Получены зависимости волнового вектора от частоты возмущения. Оценивается влияние массообмена между фазами на характер дисперсионных зависимостей.

Некоторые теоретические и экспериментальные исследования, посвященные распространению звука в двухфазных средах, имеются, например, в [2-5].

Далее везде величины, относящиеся к газу и частицам, снабжены индексом 1 или 2 внизу соответственно. Индекс 0 внизу относится к невозмущенному состоянию, индекс 3 соответствует состоянию насыщения.

1. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии фаз [1] после линеаризации принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= J^\circ - J_0, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \operatorname{div} \mathbf{v}_2 &= J_0 - J^\circ \\ \rho_{10} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -\alpha \nabla p - \rho_{20} \mathbf{f}, & \rho_{20} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} &= -(1 - \alpha) \nabla p + \rho_{20} \mathbf{f} \\ \rho_{10} \frac{\partial i_1}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial i_2}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial t} + (J_0 - J^\circ) l_0, & \rho_{20} \frac{\partial e_2}{\partial t} &= \rho_{20} q - J^\circ l_0 + J_0 p_0 \left(\frac{1}{\rho_{10}^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ , p , i , e — возмущения средней плотности, давления, энтальпии и внутренней энергии, α — объемная концентрация газа, l — удельная теплота парообразования, J_0 и J° — соответственно наблюдаемые скорости конденсации и испарения в единице объема смеси.

При заданных соотношениях, отражающих силовое взаимодействие \mathbf{f} теплообмен q и массообмен J_0 и J° , а также при заданных уравнениях состояния фаз система (1.1) является замкнутой. Для \mathbf{f} и q можно принять следующие линейные соотношения, справедливые для ламинарного обтекания одиночной сферы (при достаточно малых числах N_{Re} относительного обтекания)

$$\mathbf{f} = \frac{18\mu_1}{\rho_2^\circ d^2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad q = \frac{12k_1}{\rho_2^\circ d^2} (T_1 - T_2) \quad (1.2)$$

Здесь μ_1 — вязкость, k_1 — коэффициент теплопередачи вещества первой фазы, ρ_2° — плотность вещества капель (частиц), d — их размер (диаметр).

Влияние объемного содержания частиц на силу трения между фазами в области малых чисел N_{Re} можно учесть с помощью дополнительного множителя [6,7]

$$\varphi = (1 / \alpha)^{3.75} \quad (1.3)$$

Уравнения кинетики фазовых переходов при малых перегревах или переохлаждениях $(T_i - T_3) / T_3$ могут быть записаны в виде [1]

$$J_0 = \frac{6(1 - \alpha)l}{T_0 d} F_0 (T_3 - T_1), \quad J^\circ = \frac{6(1 - \alpha)l}{T_0 d} F^\circ (T_2 - T_3) \quad (1.4)$$

где F_0 и F° — коэффициенты, определяемые экспериментально или из каких-либо других соображений.

Отметим, что рассмотренные уравнения можно использовать, если линейный масштаб возмущения (длина волны) много больше размера капель, а амплитуды возмущений достаточно малы.

2. Для однокомпонентной двухфазной среды примем следующие уравнения состояния фаз:

$$p = \rho_1^\circ R_1 T_1, \quad i_1(p, T) = c_2(T_3 - T^\circ) + p/\rho_2^\circ + l(p) + c_{p1}(T_1 - T_3) \quad (2.1)$$

$$\rho_2^\circ = \text{const}, \quad i_2(p, T) = c_2(T_2 - T^\circ) + p/\rho_2^\circ \quad (c_{p1}, c_2 = \text{const})$$

Введем безразмерные переменные

$$P = \frac{p}{p_0}, \quad U = \frac{v}{a}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad \Phi = \frac{\rho}{\rho_2^\circ} \quad \left(a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_{10}^\circ} \right) \quad (2.2)$$

и параметры

$$C_1 = \frac{c_{p1}}{\gamma R_1}, \quad C_2 = \frac{c_2}{\gamma R_1}, \quad \theta_3 = \frac{T_3}{T_0}, \quad L = \frac{l_0}{a^2}, \quad r = \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \quad (2.3)$$

а также приведенные переменные

$$f^* = \frac{\rho_{20} f}{\rho_2^\circ a}, \quad q^* = \frac{\rho_{20} q}{\rho_2^\circ a^3}, \quad J^* = \frac{J^\circ}{\rho_2^\circ a}, \quad J_* = \frac{J_0}{\rho_2^\circ a}, \quad \tau = at \quad (2.4)$$

Здесь a — скорость звука в первой фазе, τ — приведенное время в единицах длины.

Линеаризируя (2.1) и используя (1.1) — (1.4), (2.2) — (2.4), получаем следующую систему уравнений (одномерный случай):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + \alpha r \frac{\partial U_1}{\partial x} &= J^* - J_*, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} + (1 - \alpha) \frac{\partial U_2}{\partial x} = J_* - J^* \\ \alpha r \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \frac{\alpha r}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} + f^* &= 0, \quad (1 - \alpha) \frac{\partial U_2}{\partial \tau} + \frac{(1 - \alpha) r}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} - f^* = 0 \\ \alpha r C_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + (1 - \alpha) C_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - \alpha r \left(\frac{1}{\gamma} - \beta \right) \frac{\partial P}{\partial \tau} &= (J_* - J^*) L_0 \\ (1 - \alpha) C_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} &= (1 - \alpha) q^* - L J^* + \frac{1 - r}{\gamma} J_* \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$P = \theta_1 + \Phi_1 / \alpha r + \Phi_2 / \alpha, \quad \beta = (C_2 - C_1) \theta_3' + r / \gamma + L'$$

$$f^* = (1 - \alpha) \frac{U_1 - U_2}{\tau_v} \quad \left(\tau_v = \frac{\rho_2^\circ d^2 a}{18 \mu_1} \right), \quad q^* = C_2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{\tau_T} \quad \left(\tau_T = \frac{\rho_2^\circ d^2 a c_2}{12 k_1} \right)$$

$$J^* = (1 - \alpha) \frac{\theta_2 - \theta_3' P}{\tau^\circ} \quad \left(\tau^\circ = \frac{\rho_2^\circ d a}{6 l F^\circ} \right), \quad J_* = (1 - \alpha) \frac{\theta_3' P - \theta_1}{\tau_0} \quad \left(\tau_0 = \frac{\rho_2^\circ d a}{6 l F_0} \right)$$

Здесь и далее штрихи означают полную производную по безразмерному давлению; $\tau_v, \tau_T, \tau^\circ, \tau_0$ — приведенные времена релаксации (имеют размерность длины).

Рассмотрим распространение плоских периодических волн в среде, описываемой уравнениями (2.5); решения этой системы ищем в виде затухающей бегущей волны $\exp[i(kx - \omega t)]$. Условие существования нетривиального решения такого типа приводит к следующей связи между волновым вектором и безразмерной частотой возмущения η ($\eta = \omega \tau_T / a$):

$$K^2 = \eta^2 \frac{\alpha \gamma}{\tau_T^2 m_*} \frac{(1 + m - i \eta \tau_v / \tau_T)}{(1 / \alpha m_* - i \eta \tau_v / \tau_T)} \left(1 + \frac{\Pi_0 + \pi_1 \Pi_3 - \Pi_1 \Pi_4}{\Pi_2 \Pi_4 - \pi_2 \Pi_3} \right)$$

$$m = (1 - \alpha) / \alpha r, \quad m_* = 1 - \alpha(r - 1), \quad \Pi_0 = \text{Re } \Pi_0 + i \text{Im } \Pi_0$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \Pi_0 &= (1-r) \left[\theta_3' (C_1 + mC_2) + \beta - \frac{1}{\gamma} \right] \left[(1-\alpha) \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau^{\circ}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(1-\alpha)\tau_T}{C_2\tau_0\tau^{\circ}} \left(\frac{1-r}{\gamma} - L \right) \right] \\
 \operatorname{Im} \Pi_0 &= \eta (r-1) (1-\alpha) \left[\frac{\gamma\theta_3' C_2 + \gamma L' + r - 1}{\gamma\tau_0} + \frac{\theta_3' C_1}{\tau^{\circ}} \right] \\
 \Pi_1 &= (1-\alpha) \theta_3' \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau^{\circ}} \right) - i\eta \left(\frac{1}{\gamma} - \beta \right) \frac{\alpha r}{\tau_T}, \quad \Pi_2 = (1-\alpha) \frac{L}{\tau_0} - i\eta \frac{\alpha r C_1}{\tau_T}, \\
 \Pi_3 &= (1-\alpha) \left(\frac{L}{\tau^{\circ}} - i\eta \frac{C_2}{\tau_T} \right), \quad \Pi_4 = 1 + \frac{\tau_T}{\tau^{\circ}} \frac{L}{C_2} - i\eta \\
 \pi_1 &= \frac{\theta_3' \tau_T}{C_2} \left(\frac{L}{\tau^{\circ}} + \frac{1-r}{\gamma\tau_0} \right), \quad \pi_2 = \frac{1-r}{\gamma C_2} \frac{\tau_T}{\tau_0} - 1
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из (2.6) предельным переходом могут быть получены соотношения для равновесной a^e ($\eta \rightarrow 0$) и замороженной a^f ($\eta \rightarrow \infty$) скоростей звука в газозвеси с фазовыми переходами

$$\begin{aligned}
 a^e &= a_1^e G^{1/2} [(G + \theta_3' C_2 m) (1+m) \alpha^2]^{-1/2} \\
 \left(G = \frac{L(1-\theta_3')}{1-r} + \theta_3' C_2 + L' + \frac{r-1}{\gamma}, \quad a_1^e &= \left[\frac{L}{(1-r)G} \frac{p_0}{\rho_1^{\circ}} \right]^{1/2} \right) \\
 a^f &= a_1^f \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho_1^{\circ}}{\rho_2^{\circ}} \right]^{1/2} \quad \left(a_1^f = \left[\frac{C_1}{\beta + C_1/\gamma} \frac{p_0}{\rho_1^{\circ}} \right]^{1/2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

При $\alpha = 1$ ($m = 0$) имеем $a^e = a_1^e$ и $a^f = a_1^f$. Из (2.7) видно, что $a_1^e \neq a_1^f$, так как a^e соответствует волне, за которой смесь является насыщенной ($T_1 = T_2 = T_3$). Но при $\alpha \approx 1$, если амплитуда волны ненулевая, за волной может оказаться перегретый пар ($m = 0, \alpha = 1, T_1 > T_3$). Учет этого обстоятельства устраняет кажущееся на первый взгляд несоответствие a_1^e и a_1^f . В чистом паре равновесная и замороженные скорости звука совпадают и равны a_1^f .

3. Аналогично рассмотрен более простой случай газозвеси без фазовых переходов, когда уравнения состояния фаз имеют вид

$$p = \rho_1^{\circ} R_1 T_1, \quad i_1 = c_{p1} T_1, \quad \rho_2^{\circ} = \text{const}, \quad e_2 = c_2 T_2 \quad (c_{p1}, c_2 = \text{const}) \tag{3.1}$$

В этом случае существует следующая связь между волновым числом и безразмерной частотой возмущения:

$$\begin{aligned}
 K^2 &= \eta^2 \frac{\alpha}{\tau_T^2 m_*} \frac{(1+m-i\eta\tau_v/\tau_T)(\gamma C_* / C_1 - i\eta)}{(1/\alpha m_* - i\eta\tau_v/\tau_T)(\gamma C_* / C_1 - i\eta)} \\
 \left(\Gamma = \frac{c_{p1} + mc_2}{c_{p1} - R_1 + mc_2}, \quad c_0 &= \frac{(c_{p1} - R_1) \alpha \rho_1^{\circ} + c_2 (1-\alpha) \rho_2^{\circ}}{\alpha \rho_1^{\circ} + (1-\alpha) \rho_2^{\circ}}, \quad c_* = c_0 (1+m) \right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь Γ — эффективный показатель адиабаты смеси, C_0 — теплоемкость единицы массы смеси при постоянном объеме.

Выражения для равновесной и замороженной скоростей звука в таких газозвесях имеют вид

$$a^e = a \left[\frac{\Gamma}{\gamma \alpha^2 (1+m)} \right]^{1/2}, \quad a^f = a \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho_1^{\circ}}{\rho_2^{\circ}} \right]^{1/2} \tag{3.3}$$

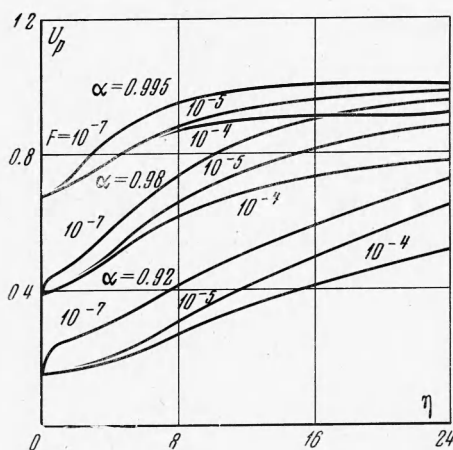
Коэффициент затухания δ при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к значению δ^f

$$\delta^f = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\rho_1^{\circ}}{\rho_2^{\circ}} \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{\tau_T^2} \frac{C_*}{C_1} (\gamma - \Gamma) + \frac{1}{\tau_v \tau_T} \frac{m(1-r)^2}{1+mr^2} \right] \tag{3.4}$$

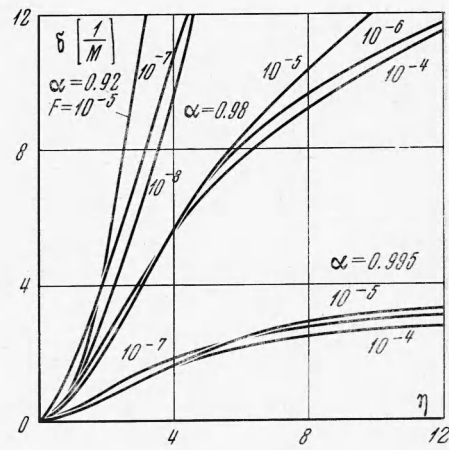
4. Интересно оценить влияние фазовых переходов на характер дисперсионных зависимостей.

На фиг. 1, 2 приведены кривые, отображающие характер зависимостей фазовой скорости U_p и коэффициента затухания δ от частоты внешнего возмущения.

Кривые построены для различных значений коэффициента $F = F^0 = F_0$ и различных объемных паросодержаний в двухфазной пароводяной смеси при начальном давлении $p_0 = 10$ бар со следующими начальными термодинамическими данными: $a = (\gamma p_0 / \rho_{10}^0)^{1/2} = 502$ м/сек, $R_1 = 429.5$ Дж/кг·град, $\mu_1 = 16.05 \cdot 10^{-6}$ н·сек/м², $k_1 = 314.4 \cdot 10^{-4}$ вт/м·град, $c_2 = 4.40 \cdot 10^3$ Дж/кг·град. Приводимые кривые соответствуют диаметру частиц $d = 10^{-5}$ м.



Фиг. 1



Фиг. 2

Расчеты показывают, что при $F \geq 10^{-4}$ кг·сек/м⁴ и $F \leq 10^{-7}$ кг·сек/м⁴ в рассматриваемой области частот процесс практически не зависит от значения этого коэффициента. При малых частотах ($\eta \rightarrow 0$), а также при достаточно больших частотах ($\eta \rightarrow \infty$) влияние изменения F может стать более сильным. Отметим, что величина коэффициента F может быть определена из измерения скорости распространения и коэффициента затухания слабого возмущения в однокомпонентной двухфазной смеси. Однако отсутствие надежно контролируемых экспериментальных данных затрудняет сравнение полученных результатов с экспериментом.

С ростом объемного содержания капель влияние фазовой и температурной неравновесности увеличивается, однако в целом остается достаточно малым. Как правило, наиболее существенным процессом, влияющим на дисперсионные зависимости, является трение между фазами. Однако с увеличением давления смеси роль трения уменьшается. В пределе при $r \rightarrow 1$ скоростная неравновесность отсутствует и вязкостные дисперсия и диссипация равны нулю.

Относительная интенсивность процессов диссипации зависит также от соотношений между временами релаксации рассматриваемых процессов. Заметим, что соотношения между временами релаксации по скорости и температуре и временами релаксации по фазовым переходам определяют степень дисперсности среды. При принятых допущениях относительно кинетики испарения и конденсации с уменьшением размеров диспергированной фазы относительная роль фазовых переходов в диссипации энергии возрастает и при достаточно малых размерах капель их влияние может стать преобладающим. Непосредственный анализ влияния явления массообмена между фазами на распространение возмущения в двухфазной среде можно выполнить, используя ее односкоростную и однотемпературную мо-

дель. Отметим, что если равновесие по фазовым переходам означает и равновесие по температурам, то обратное, вообще говоря, неверно. При равенстве температур фаз в волне могут происходить неравновесные фазовые переходы, вызывая дисперсию и диссипацию. Соответствующее рассматриваемому случаю дисперсионное соотношение имеет вид

$$K^2 = \eta^2 \frac{\gamma \alpha^2 (1+m)}{\tau_T^2} \left[\frac{2m(1-r)(G + C_2 \theta_3' m) \tau_T / \tau_0 - i\eta(Q + C_2 m)}{2mL\tau_T / \tau_0 - i\eta(C_1 + mC_2)} \right] \\ (Q = G + (1 - \theta_3')(C_1 - L/(1-r))) \quad (4.1)$$

Здесь G и равновесная скорость распространения возмущения вычисляются по (2.7). Для замороженной по массообмену скорости звука имеем выражение

$$(a_*^f)^2 = \frac{a^2}{\gamma \alpha^2 (1+m)} \frac{C_1 + mC_2}{C_1(1 - \theta_3') + C_2(m + \theta_3') + L' + (r-1)/\gamma} \quad (4.2)$$

Из (2.7) и (4.2) видно, что $a^f \neq a_*^f$, так как a_*^f вычислялась для смеси, равновесной по скоростям и температурам. В чистом паре ($\alpha = 1$) $a_1^f = a_{1*}^f$.

Некоторые оценки показывают, что коэффициенты F в линейных соотношениях для скорости фазовых переходов весьма велики. Поэтому при достаточно малых частотах внешнего возмущения однокомпонентная двухфазная среда обладает равновесным фазовым составом и удовлетворяет условию равенства температур фаз. В этом случае дисперсия и диссипация обусловлены исключительно вязкостным взаимодействием фаз, а дисперсионное соотношение имеет вид

$$K^2 = \eta^2 \frac{1}{(U_1^e)^2} \frac{\alpha}{\tau_T^2 m_*} \frac{(1+m - i\eta\tau_v/\tau_T)}{(1/\alpha m_* - i\eta\tau_v/\tau_T)} \quad (4.3)$$

Отметим, что при $r < 0.1$ учет присоединенной массы не оказывает существенного влияния на дисперсионные зависимости. С учетом этого эффекта дисперсионная связь (3.2) запишется так:

$$K^2 = \eta^2 \frac{\alpha}{\tau_T^2 m_*} \frac{[1+m - i\eta(1+0.5r(1+m))\tau_v/\tau_T][\gamma C_*/C_1 - i\eta]}{[1/\alpha m_* - i\eta(1+0.5r)\tau_v/\tau_T][\gamma C_*/C_1 - i\eta]} \quad (4.4)$$

Любое малое возмущение произвольного профиля может быть составлено из суперпозиции гармонических волн. Согласно общим результатам, изложенным, например, в [8] для случая реагирующего газа, можно утверждать, что передний фронт произвольного импульса движется со скоростью a^f и затухает по экспоненте с показателем $(-\delta^f x)$.

В заключение отметим, что полученные выражения (2.7) и (3.3) для равновесных и замороженных скоростей звука совпадают с соотношениями, следующими из рассмотрения условий существования волн уплотнения в двухфазных средах [9].

Поступила 6 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и г м а т у л и н Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
2. Д е й ч М. Е., Ф и л и п п о в, Г. А., С т е к о л ь щ и к о в Е. В. Скорость звука в двухфазных средах. Теплоэнергетика, 1964, № 8.
3. С е м е н о в Н. И., К о с т е р и н С. И. Результаты исследования скорости звука в движущихся газожидкостных смесях. Теплоэнергетика, 1964, № 6.
4. З о л о т а р е в П. П. О распространении слабых возмущений в смесях. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
5. S t ä d t k e Н. Speed of sound and shock waves in two phase flows. Electr. MHD. Proc. Sympos. Warsaw; vol 3, Vienna, 1968.
6. Г о р о ш к о В. Д., Р о з е н б а у м Р. Б., Т о д е с О. М. Приближенные закономерности гидравлики псевдооживленного слоя и стесненного падения. Изв. вузов, Нефть и газ, 1958, № 1.
7. Б у е в и ч Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.
8. К л а р к Дж., М а к к е с н и М. Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
9. Н и г м а т у л и н Р. И. К вопросу о волнах уплотнения в двухфазных средах. Вестн. МГУ, Матем. и механ., 1969, № 4.