

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ

С. А. Шестериков

(Москва)

В предлагаемой работе рассмотрены некоторые общие вопросы выпучивания пластинок в условиях ползучести, когда в качестве связи между напряжениями и деформациями принята теория упрочнения в форме течения.

Основные гипотезы о деформированном и напряженном состоянии сформулированы в предыдущей работе [1], где и было получено основное уравнение для прогиба в предположении, что изменением во времени коэффициентов этого уравнения можно пренебречь. Ниже рассматривается другой вывод этого уравнения без указанного предположения и проведено исследование на основе критериев устойчивости [2,3,4], сформулированных позже выхода работы [1]. Кроме того, при выводе учитывается возможный начальный прогиб.

§ 1. Вывод основного уравнения. Связь между напряжениями и деформациями согласно теории течения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_{ij} &= \frac{3}{2} g s_{ij}, & \dot{p}_i &= g \sigma_i \\ \sigma_i^2 &= \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}, & p_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{s_{ij}}{2G}, & \dot{p}_i^2 &= \frac{2}{3} \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ε_{ij} — тензор деформаций, p_{ij} — тензор деформаций ползучести, s_{ij} — девиатор напряжений, g — функция p_i и σ_i , G — модуль сдвига; материал считается несжимаемым; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Предполагается выполнение гипотезы Кирхгофа — Лява, согласно которой

$$\delta \varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \delta \varepsilon_{12} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \delta \varepsilon_{22} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$

где w — дополнительный к начальному прогиб; x и y — координаты вдоль плоскости пластинки; вариации δ означают компоненты, характеризующие искривление. Из (1.1) легко получить для вариаций деформаций и напряжений выражения

$$\begin{aligned} \delta \dot{p}_i &= a \delta p_i + (b + 1) g \delta \sigma_i \\ [\delta \varepsilon_{ij} &= \frac{\delta \dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{3}{2} g \delta s_{ij} + \frac{3}{2} g \alpha_{ij}^* b \delta \sigma_i + \frac{3}{2} \alpha_{ij}^* a \delta p_i \alpha_{ij}^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$a = \sigma_i \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad b = \frac{\sigma_i}{g} \frac{\partial g}{\partial \sigma_i}, \quad \alpha_{ij}^* = \frac{s_{ij}}{\sigma_i}, \quad \alpha_{ii} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}$$

Умножив второе соотношение на α_{ij}^* , просуммировав по i и j и учтя первое, получим

$$\alpha_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij} = \frac{\alpha_{ij}^* \delta \dot{s}_{ij}}{2G} + \delta p_i \quad (1.4)$$

В дальнейшем исследовании примем, что выполняется условие $\alpha_{ij}^* = 0$, которое соответствует условию пропорционального нагружения.

Тогда соотношение (1.4) можно проинтегрировать

$$\delta p_i = m - \frac{\delta \sigma_i}{E} \quad \left(m = \alpha_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij}, \delta \sigma_i = \frac{3}{2} \alpha_{ij}^* \delta s_{ij} \right) \quad (1.5)$$

Согласно (1.5) и (1.3) найдем

$$\delta \sigma_i = e^{-T} \int_0^t E (\dot{m} - am) e^T dt, \quad T = \int [Eg(b+1) - a] dt \quad (1.6)$$

Подставив δp_i и $\delta \sigma_i$ из (1.5) и (1.6) во второе выражение (1.3), получим уравнение для δs_{ij} , из которого можно получить

$$\delta s_{ij} = 2G \delta \varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}^* e^{-T} \int_0^t E^2 g (b+1) m e^T dt - e^{-R} \int_0^t [2G \delta \varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}^* m E] E g e^R dt \quad (1.7)$$

$$R = \int E g dt$$

Для пластинки имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + 2h \sigma_i \Lambda (w + w_0) = 0$$

$$G_1 = \int_{-h}^h (2\delta s_{11} + \delta s_{22}) z dz, \quad G_2 = \int_{-h}^h (2\delta s_{22} + \delta s_{11}) z dz \quad (1.8)$$

$$\Lambda = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Подставив (1.7) в (1.8), получим интегродифференциальное уравнение для прогиба w

$$\Delta \Delta w - \sigma_0 \Lambda (w + w_0) - e^{-R} \int_0^t E g \Delta \Delta w e^R dt +$$

$$+ \frac{3}{4} e^{-R} \int_0^t E g \Lambda \Lambda w e^R dt - \frac{3}{4} e^{-T} \int_0^t E g (b+1) \Lambda \Lambda w e^T dt = 0 \quad (1.9)$$

$$\sigma_0 = \frac{9\sigma_i}{(2h)^2 E}$$

Из уравнения (1.9) при $w_0 = 0$ получается уравнение (4.7) работы [1], если производными по времени от коэффициентов уравнения можно пренебречь. В общем случае если учитывать зависимость коэффициентов от времени, то после перехода от интегродифференциального уравнения к дифференциальному уравнению в последнее войдут производные по времени второго порядка.

В случае $\dot{\alpha}_i^* \neq 0$ из (1.3) можно получить для определения $\delta \sigma_i$ интегральное уравнение, которое в общем виде решить не удастся. Используя это выражение для определения $\delta \sigma_i^*$ через $\delta \varepsilon_{ij}$, можно получить с учетом (1.8) интегродифференциальное уравнение для прогиба.

При переходе к дифференциальному уравнению в общем случае максимальный порядок производных по времени будет более высоким.

Если на пластинку действует некоторая поперечная нагрузка q , то уравнение (1.9) запишется в виде

$$L(w) = \frac{q}{D} \quad (1.10)$$

Здесь под L понимается оператор, определяемый из (1.9) условием $L(w) = 0$; D — цилиндрическая жесткость пластинки. Выражение (1.10) необходимо для исследования устойчивости пластинки по квазистатическому критерию.

§ 2. Квазистатический критерий устойчивости и выпучивание пластинки, имеющей начальное искривление. Следуя Ю. Н. Работнову [3], будем под квазистатическим критерием понимать следующий метод исследования поведения пластинки. Пластинка без начальных прогибов находится под нагрузкой, действующей в плоскости пластинки. В течение некоторого конечного интервала времени на пластинку действуют возмущающие нагрузки. После снятия возмущающих нагрузок прогиб пластинки может возрасти или убавиться в зависимости от исследуемого момента времени.

Под критическим будем понимать время, для которого

$$\dot{w} = 0 \quad (2.1)$$

Остановимся на некоторых качественных особенностях метода исследования, которые проследим на простейшем случае равномерно сжатой пластинки. Тогда операторы Λ и Δ совпадают. Сделаем замену переменного

$$x = \int_0^t Egd dt$$

Из (1.10) получим уравнение

$$u - se^{-x} \int_0^x e^x u dx - 3se^{-(1+b)x-\alpha} \int_0^x x^\alpha (1+b) e^{(1+b)x} u dx = k_0$$

$$g \equiv A\sigma_i^{n-1} p_i^{-\alpha}, \quad k_0 = \beta u_0 + m_0, \quad \beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \quad (2.2)$$

$$4(1-\beta)s = 1, \quad w(t, x, y) = u(t) \varphi(x, y)$$

где σ_0 — эйлерова критическая сила для упругой пластинки; φ — функция, удовлетворяющая решению задачи устойчивости для упругой пластинки. Здесь для простоты исследования сделаны предположения о том, что выполнены условия

$$w_0 = u_0 \varphi, \quad q = Dm_0 \varphi$$

В общем случае уравнение (2.2) приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами, сводящемуся к уравнению Уиттекера. Здесь ограничимся некоторыми качественными характеристиками и дадим метод приближенного исследования задачи.

Остановимся на общем случае. При переходе от (2.2) к дифференциальному уравнению всегда имеет место связь между u и u_x' в начальный момент. Поэтому на общее решение дифференциального уравнения второго порядка накладывается ограничение этой связью, которое позволяет выразить одну произвольную постоянную через другую. Следовательно, общее решение однородного уравнения (2.2) будет иметь лишь одну произвольную постоянную и условие (2.1) дает единственное решение.

Так как в общем случае исследовать (2.2) не удастся, то дадим две приближенные оценки.

1°. Случай β близко к единице, тогда x , при котором наступает критическое состояние, мало и вторым слагаемым в соотношении (2.2) можно пренебречь. Действительно, если оценить u_x' в начальный момент, то пренебрежение вторым слагаемым по сравнению с третьим равносильно пренебрежению единицей по сравнению с $3n/\alpha$. Тогда для определения u получим уравнение

$$u_x' + \left[1 + b - \frac{3}{4} \frac{1+b}{1-b} + \frac{\alpha}{x} \right] u = \frac{k_0}{1-\beta} \left(1 + b + \frac{\alpha}{x} \right) \quad (2.3)$$

Отсюда

$$u = e^{kx} x^{-\alpha} \int_0^x \frac{k_0}{1-\beta} \left(1 + b + \frac{\alpha}{\xi}\right) e^{-k\xi} \xi d\xi + u(0)$$

$$k = \frac{4\beta - 1}{4(\beta - 1)} \quad (2.4)$$

В случае исследования устойчивости по квазистатическому критерию имеем $k_0 = m_0 \neq 0$ на $[x_1, x_2]$ и $k_0 = 0$ при $x > x_2$, где x_2 может быть сколь угодно мало. Следовательно, при $x > x_2$ интеграл в (2.4) представляет собой постоянную и условие $\dot{w} = 0$, аналогичное $u_x' = 0$, примет вид

$$k - \frac{\alpha}{x} = 0 \quad \text{или} \quad p_i = \frac{\alpha}{n} \frac{4\beta}{4\beta - 1} (1 - \beta) \varepsilon_0 \quad (2.5)$$

Отсюда получаем, что $p_i = 0$ только при $\beta = 1$, как это имеет место и для стержней [1], для этого случая результат оказался отличным от полученного в работе [1] для пластинок по теории течения в силу того, что там было получено достаточное, но не необходимое условие потери устойчивости.

2°. Случай β близко к нулю, тогда x , при котором наступает критическое состояние, нельзя считать малым и для оценки второго слагаемого примем

$$e^{-x} \int_0^x e^{\xi} u d\xi \approx u \quad (2.6)$$

что достаточно хорошо отражает действительность, если u мало меняется. Тогда получим уравнение

$$u_x' + \left[1 + b - 3 \frac{1+b}{3-4\beta} + \frac{\alpha}{x}\right] u = \frac{4k_0}{3-4\beta} \left(1 + b + \frac{\alpha}{x}\right) \quad (2.7)$$

Отсюда

$$u = e^{k_1 x} x^{-\alpha} \int_0^x \frac{4k_0}{3-4\beta} \left(1 + b + \frac{\alpha}{\xi}\right) e^{-k_1 \xi} \xi d\xi + u(0)$$

$$k_1 = \frac{4\beta(1+b)}{3-4\beta} \quad (2.8)$$

Аналогично первому случаю критическое состояние наступит при p_i , определяемом из условия

$$k_1 - \frac{\alpha}{x} = 0 \quad \text{или} \quad p_i = \frac{\alpha}{n} \left(\frac{3}{4} - \beta\right) \varepsilon_0 \quad (2.9)$$

Условие (2.9) полностью совпадает с условием, полученным в работе [1]. Очевидно, что p_i , определяемое из условия (2.5), всегда больше p_i , определяемого из (2.9). Точное значение p_i практически совпадает с (2.5) при $\beta > 3/4$, с (2.9) при $\beta < 1/4$ и лежит между (2.5) и (2.9) при $3/4 > \beta > 1/4$.

Перейдем к исследованию выпучивания пластинки, имеющей начальное искривление. Здесь легко показать, что $\dot{w}(t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ при любых β , следовательно, условие $\dot{w} = 0$ выполняется при $t \neq 0$ для $\beta < 1$. В этом случае также сохраняют силу все качественные особенности, отмеченные выше. Для простоты исследования примем $\alpha = 1$.

3°. Случай β близко к единице. Тогда, принимая прежнее предположение из (2.4), получим

$$u = e^{kx} x^{-1} \int_0^x \frac{\beta u_0}{1-\beta} [n\xi + 1] e^{-k\xi} d\xi$$

ИЛИ

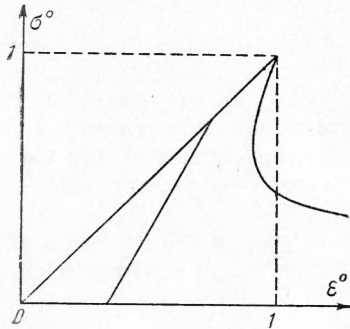
$$\left[\frac{u(1-\beta)}{\beta u_0} + \frac{n}{k} \right] \frac{k}{n+k} = \frac{e^{kx} - 1}{kx} \quad (2.10)$$

Критическое условие $u_{tt}'' = 0$ для соотношения (2.10) даст [2]

$$kx \approx 1.36 \quad \text{или} \quad p_i = 1.36 \frac{1}{n} \frac{4\beta}{4\beta - 1} (1 - \beta) \varepsilon_0 \quad (2.11)$$

4°. Случай β близко к нулю. Тогда из (2.8) аналогично предыдущему случаю получим

$$p_i \approx 1.36 \frac{1}{n} \left(\frac{3}{4} - \beta \right) \varepsilon_0 \quad (2.12)$$



Фиг. 1.

Отсюда можно сделать вывод, что критическое состояние для пластинок по теории течения, определяемое по двум критериям, аналогично состоянию стержня, исследуемому в работе [2].

На фиг. 1 в координатах σ^0 , ε^0 представлены кривые (2.11) и (2.12), обозначенные индексами 1 и 2 соответственно, где $\sigma^0 = \beta$ и $\varepsilon^0 = (\varepsilon_y + p_i) / \varepsilon_0$. Кривая, соответствующая условию $\dot{u} = 0$, полученная числовыми решениями уравнения (2.2) для значений параметров $\alpha = 1$ и $n = 3$, лежит между указанными кривыми аналогично кривой 1 на фиг. 2. Точное значение критического времени лежит между значениями определяемого из (2.11) и (2.12), что подтверждает возможность применения приближенных методов, использованных выше.

§ 3. Прямоугольная, свободноопертая пластинка, равномерно сжатая в одном направлении. В предыдущем параграфе исследован простейший случай граничных условий и условий нагружения, для которого форма выпучивания пластинки совпадает с формой, определяемой из решения чисто упругой задачи. Здесь рассмотрим на примере прямоугольной, свободноопертой пластинки, равномерно сжатой в одном направлении, изменение формы выпучивания пластинки в зависимости от величины приложенной нагрузки. Форма выпучивания определяется из условия минимума критического времени.

Для пластинки, сжатой в одном направлении, имеем

$$\Lambda = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0 \quad (3.1)$$

Форму прогиба для свободноопертой прямоугольной пластинки примем в виде

$$w = a(t) \sin \frac{\pi x m_1}{l_1} \sin \frac{\pi y m_2}{l_2}, \quad w_0 = \alpha_0 \sin \frac{\pi x m_1}{l_1} \sin \frac{\pi y m_2}{l_2} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в (1.9), получим уравнение для

$$a - \beta_1(a + a_0) - (1 - s_1) e^{-R} \int_0^t E g a e^{Rt} dt - s_1 e^{-T} \int_0^t E g (b + 1) a e^{Tt} dt = 0 \quad (3.3)$$

$$\pi^2 \left(\frac{m_1^2}{l_1^2} + \frac{m_2^2}{l_2^2} \right) \beta_1 = \sigma_0 \frac{m_1^2}{l_1^2}, \quad s_1 = \frac{3}{4} \pi^2 \frac{m_1^2 \beta_1}{\sigma_0 l_1^2}$$

Для случая степенного закона упрочнения заменой переменной из (3.3) получим уравнение (3.4)

$$a - \beta_1(a + a_0) - (1 - s_1)e^{-x} \int_0^x ae^x dx - s_1 e^{-nx} x^{-\alpha} \int_0^x x^\alpha n e^{nx} a dx = 0$$

Аналогично тому, как это было сделано во втором параграфе, рассмотрим два предельных случая, когда критическое состояние наступает при малых и больших x , что соответствует нагрузке, близкой к эйлеровой критической и близкой к нулю.

1°. Пусть x мало, тогда

$$\int_0^x ae^x dx \approx 0$$

и из (3.4) имеем

$$a - \beta_1(a + a_0) - s_1 e^{-nx} x^{-\alpha} \int_0^x x^\alpha n e^{nx} a dx = 0 \quad (3.5)$$

Из (3.5) легко получить для a уравнение

$$a_x' (1 - \beta_1) + a \left[(1 - \beta_1) \left(n + \frac{\alpha}{x} \right) - s_1 n \right] = a_0 \beta_1 \left(n + \frac{\alpha}{x} \right) \quad (3.6)$$

Согласно квазистатическому критерию критическое состояние наступает при выполнении условия

$$(1 - \beta_1) \left(n + \frac{\alpha}{x} \right) - s_1 n = 0 \quad (3.7)$$

Здесь, как и обычно, легко показать, что при малых x , меньших значения x_1 , определяемого из (3.7), имеет место устойчивое состояние и при x , больших x_1 , — неустойчивое. Это обстоятельство просто проверить и для всех других случаев, поэтому в дальнейшем не будем на нем останавливаться.

Из (3.7) получим

$$x = \frac{\alpha}{n} \frac{1}{s_1/(1 - \beta_1) - 1} \quad \left(\beta_1 < 1, \frac{s_1}{1 - \beta_1} > 1 \right) \quad (3.8)$$

С ростом m_2 параметры s_1 и β_1 убывают и, следовательно, x растет, а так как m_2 может быть только целым положительным, то минимум x реализуется при $m_2 = 1$. Используя условие $x_{m_1}' = 0$ из (3.8), получим

$$m_1 = \frac{l_1}{l_2 \sqrt{2\beta - 1}}, \quad \beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \quad (3.9)$$

Перейдем к критерию $\ddot{a} = 0$. Из (3.6) получим для a выражение

$$a = x^{-\alpha} e^{nx} a_1 \int_0^x \left(n + \frac{\alpha}{x} \right) x^\alpha e^{-nx} dx$$

$$n_1 = n \left(\frac{s_1}{1 - \beta_1} - 1 \right), \quad a_1 = \frac{\alpha_0 \beta_1}{1 - \beta_1} \quad (3.10)$$

Для целых α легко найти a в конечном виде. Остановимся на случае $\alpha = 1$. Тогда для определения x из условия $\ddot{a} = 0$ получим уравнение

$$\left[\frac{e^{n_1 x} - 1}{x} \right]'' = 0 \quad (3.11)$$

аналогичное уравнению для стержня [2]. Откуда получим

$$x = \frac{1.36}{n} \frac{1}{s_1 / (1 - \beta_1) - 1} \quad (3.12)$$

Выражения (3.8) и (3.12) отличаются только множителем. Следовательно, в данном случае значения m_2 и m_1 по обоим критериям совпадают.

2°. Пусть x велико, тогда

$$e^{-x} \int_0^x a e^{nx} dx \approx a$$

и из (3.4) имеем

$$(s_1 - \beta_1) a - \beta_1 a_0 - s_1 e^{-nx} x^{-\alpha} \int_0^x x^\alpha e^{nx} n a dx = 0 \quad (3.13)$$

или, переходя к дифференциальному уравнению для a , получим

$$a_x' + a \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{n\beta_1}{s_1 - \beta_1} \right) = \frac{a_0 \beta_1}{s_1 - \beta_1} \left(n + \frac{\alpha}{x} \right) \quad (3.14)$$

По квазистатическому критерию критическое состояние определяется из условия

$$x = \frac{\alpha}{n} \left(\frac{s_1}{\beta_1} - 1 \right) \quad \text{или} \quad x = \frac{\alpha}{n} \left[\frac{3}{4} \frac{\pi^2}{\sigma_0} \frac{m_1^2}{l_1^2} - 1 \right] \quad (3.15)$$

Отсюда получим условие $m_1 = 1$.

Для определения момента, когда $\ddot{a} = 0$, найдем a из уравнения (3.14)

$$a = \frac{a_0 \beta_1}{s_1 - \beta_1} x^{-\alpha} e^{-n_2 x} \int_0^x \left(n + \frac{\alpha}{x} \right) x^\alpha e^{-n_2 x} dx, \quad n_2 = \frac{n\beta_1}{s_1 - \beta_1} \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) совпадает с (3.10), следовательно, имеем и в этом случае совпадение результатов по квазистатическому критерию и условию $\ddot{a} = 0$.

Из проведенного исследования видно, что форма выпучивания в зависимости от отношения приложенной нагрузки к критической, определяемой из упругого решения задачи, одна и та же по двум критериям. При этом качественная картина совпадает с результатами, полученными по условию $\ddot{a} = 0$ для пластинок по деформационной теории [5].

§ 4. Определение критического состояния по методу остаточных прогибов. В работе Г. В. Иванова [4] предложен метод оценки работоспособности элементов конструкций при ползучести, основанный на критерии отсутствия начальных прогибов. Как использованные выше критерии, так и метод остаточных прогибов дают для рассматриваемого случая небольшое количественное расхождение в числовых подсчетах, не меняя качественной стороны картины. Кроме того, все они характеризуют начальное поведение элемента. На последнем методе оценки остановимся в этом параграфе ввиду того, что он позволяет наиболее просто исследовать поведение пластинок при использовании теории течения. Действительно, в этом случае будет получено решение без дополнительных гипотез, введенных в предыдущем параграфе.

Рассмотрим пластинку без начального искривления под действием распределенных в ее плоскости усилий. Предположим, что на нее подействовала определенная система малых поперечных нагрузок, распределенных во времени так, что возникший прогиб остается постоянным. За критическое время принимается момент, когда возмущающие силы обратятся в нуль.

Исследуем два случая.

1°. *Равномерно сжатая пластинка.* Тогда согласно уравнению (2.2) критическое состояние x_1 определится из условия

$$u_0 - se^{-x_1} \int_0^{x_1} e^x u_0 dx - 3se^{-nx_1} x_1^{-\alpha} \int_0^{x_1} x^\alpha n e^{nx} u_0 dx = 0 \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) получено из (2.2) подстановкой вместо u некоторой постоянной величины u_0 при условии, что в момент x_1 возмущающие силы, т. е. k_0 , обращаются в нуль. Второй интеграл в (1.1) выражается в элементарных функциях, если α — целое число; в этом случае получается трансцендентное уравнение; в частности при $\alpha = 1$ имеем

$$e + \frac{3}{nx} (1 - e^{-nx}) = 4\beta \quad (4.2)$$

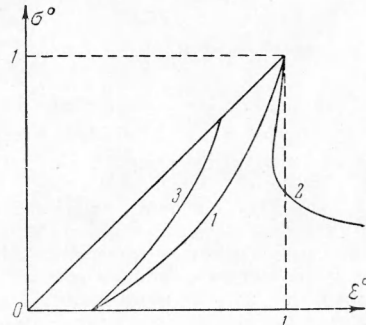
Так как здесь предположения о малости β или $1 - \beta$ не делалось, как это было в предыдущем исследовании, то легко провести анализ погрешностей, вносимых указанными гипотезами. Для случаев, когда

$$e^{-x} \int_0^x u e^x dx \approx 0, \quad e^{-x} \int_0^x u e^x dx \approx u$$

имеем соответственно уравнения

$$1 + \frac{3}{nx} (1 - e^{-nx}) = 4\beta \quad (4.3)$$

$$\frac{3}{nx} (1 - e^{-nx}) = 4\beta$$



Фиг. 2.

На фиг. 2 помещены кривые $\sigma^\circ \sim \epsilon^\circ$, определяемые по формулам (4.2), (4.3), обозначенные индексами 1, 2 и 3 соответственно. Здесь $\sigma^\circ = \beta$ и $\epsilon^\circ = x\beta$ совпадают с σ° и ϵ° , введенными в работе [1]. Из графика видно, что кривые (4.3) являются соответственно верхней и нижней оценками для истинного значения критического времени. Это дает еще одно подтверждение обоснованности гипотез, сделанных в предыдущем исследовании.

2°. *Прямоугольная свободноопертая пластинка, сжатая в одном направлении.* Это более интересный случай и на нем остановимся подробнее. Снова, положив $u = u_0$ и правую часть приравняв нулю, получим из уравнения (1.10) уравнение для x_1

$$1 - (1 - s_1) e^{-x_1} \int_0^{x_1} e^x dx - \beta_1 - s_1 e^{-nx_1} x_1^{-\alpha} \int_0^{x_1} x^\alpha n e^{nx} dx = 0 \quad (4.4)$$

Исследование проведем для случая $\alpha = 1$. Тогда из (4.4) получим трансцендентное уравнение, которое запишем в виде, удобном для исследования

$$\left(\frac{m_1^2}{l_1^2} + \frac{m_2^2}{l_2^2} \right)^2 = \frac{3}{4} \frac{m_1^4}{l_1^4} + 4\beta \frac{m_1^2}{l_1^2 l_2^2} e^{x_1} = \frac{e^{x_1} (1 - e^{-nx_1})}{nx_1} \frac{3m_1^4}{4l_1^4}, \quad \beta = \frac{\sigma_i}{\sigma_o} \quad (4.5)$$

Из условия $\partial x_1 / \partial m_2 = 0$ получим $m_2 = 0$ и так как при $m_2 \rightarrow \infty$ $x_1 \rightarrow \infty$, то имеем, что для минимума x_1 по m_2 значение m_2 должно

быть минимально. Следовательно, для любых β выполняется условие $m_2 = 1$. При этом условии из (4.5) получим для x_1 уравнение

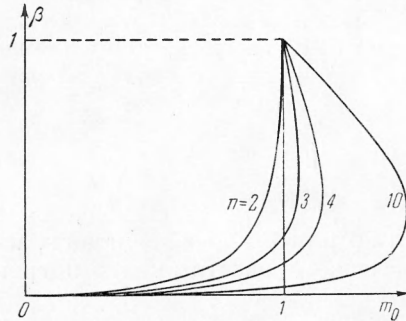
$$(m_0 + 1)^2 = \frac{3}{4} m_0^2 \left[1 - \frac{e^{x_1} (1 - e^{-nx_1})}{nx} \right] + 4\beta m_0 e^{x_1} \quad (4.6)$$

$$m_0 = \left(\frac{m_1 l_2}{l_1} \right)^2$$

Значение параметра m_0 (и, следовательно, m_1) определим из условия $\partial x_1 / \partial m_1 = 0$. Откуда получим следующую систему:

$$m_0^2 = \frac{4n \ln r}{n \ln r + 3r(1 - r^{-n})}$$

$$\beta = \frac{m_0 + 1}{2m_0 r} \quad (4.7)$$



Фиг. 3.

На фиг. 3 представлены графики m_0 в зависимости от β для значений n , равных 2, 3, 4 и 10. Условие $m_0 = 1$ соответствует упругому решению. Сравнение этих результатов с вычислениями в предыдущем параграфе показывает, что форма кривых $m_0 \sim \beta$ качественно совпадает с зависимостью формы выпучивания от β , определенной по квазистатическому критерию и условию $\ddot{a} = 0$.

В предыдущей работе [5] было проведено аналогичное исследование выпучивания пластинок по деформационной теории. Необходимо отметить, что имеют место качественные различия в поведении пластинок относительно формы искривления. При этом качественно совпадают результаты всех исследованных критериев по теории течения и они же соответствуют условию $\ddot{a} = 0$ для деформационной теории. Решение задачи выпучивания на основе квазистатического критерия по деформационной теории имеет качественное отличие.

Необходимо отметить также, что в рамках линейной постановки для пластинок по деформационной теории обнаружен эффект бесконечного возрастания прогибов за конечное время. Для пластинок по теории течения подобный результат не имеет места.

Поступила 17 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
3. Работнов Ю. Н. The theory of creep and its applications. «Plasticity». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 338—346.
4. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при неупругих деформациях. ПМТФ, 1961, № 3.
5. Шестериков С. А. Устойчивость прямоугольных пластинок при ползучести. ПМТФ, 1961, № 4.