

К ТЕОРИИ ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН
МЕХАНИЧЕСКИМИ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ

В. П. Докучаев

(Горький)

Рассмотрены вопросы излучения магнитозвуковых волн осциллирующим плоским поршнем, а также пульсирующими по радиусу цилиндром и шаром. Получены выражения для полей магнитогиродинамических возмущений в среде. Определены силы реакции излучения, действующие на эти тела. Показано существенное отличие теории генерации так называемого «магнитного» звука от теории излучения обычного звука. Например, диаграмма направленности магнитного радиально пульсирующего цилиндра и шара имеет дипольный характер, в то время как для обычного звука, генерируемого теми же источниками, диаграмма является изотропной, или монополюсной.

Магнитогиродинамические процессы описываются системой связанных уравнений гидродинамики и электромагнетизма [1]. Вследствие этого гидромагнитные возмущения можно создавать как механическим способом — осциллирующими или пульсирующими телами, так и электрическими зарядами и токами. Излучение гидромагнитных волн электрическими токами подробно анализировалось в работах [2-5]. Ниже исследуется генерация этих волн механическими излучателями. Для нахождения сил реакции излучения, действующих на источники волн, использован метод силовых источников [6].

1. Интегральная форма решения линейных уравнений магнитной гидродинамики. Система линейных уравнений магнитной гидродинамики невязкой среды при наличии внешних сил с объемной плотностью f имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } h) \times H_0 + f \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \text{rot}(v \times H_0) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \text{div } v = 0 \quad (1.3)$$

$$p = c_s^2 \rho \quad (1.4)$$

Здесь ρ_0 , H_0 — невозмущенные плотность и магнитное поле в среде, c_s — скорость звука; ρ , p , v и h — возмущения плотности, давления, скорости и магнитного поля. Будем считать, что все возмущения меняются во времени по гармоническому закону $\exp(-i\omega t)$, где ω — частота процесса. При этом из системы (1.1)–(1.4) легко получить уравнение для скорости

$$c_s^2 \text{grad div } v + c_A^2 [\text{rot rot}(v \times e_H)] \times e_H + \omega^2 v = i\omega f / \rho_0 \quad (1.5)$$

где $c_A = H_0 / (4\pi\rho_0)^{1/2}$ — скорость Альфвена, e_H — единичный вектор поля H_0 . В дальнейшем временной фактор $\exp(-i\omega t)$ у функций v и f опущен для сокращения записи.

Объемная плотность сил f с помощью формализма обобщенных функций выражается через скользящий вектор поверхностной силы

$$f = T\delta_S \quad (1.6)$$

где δ_S — функция Дирака, аргументом которой является уравнение поверхности тела [7]. Интеграл от \mathbf{f} по нормали к поверхности дает функцию \mathbf{T} . В силу законов механики ($-\mathbf{T}$) есть сила, действующая со стороны среды на тело (сила реакции среды). Уравнение (1.5) относится к векторным дифференциальным операторам с правой частью, анализ которых значительно сложнее, чем скалярных операторов [8].

В невязкой среде нормальная составляющая скорости на поверхности тела должна равняться соответствующей компоненте скорости тела [9]

$$\mathbf{v}|_S = u_0 \mathbf{n} \quad (1.7)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела. Здесь предполагается, что тела, создающие возмущения в среде, являются металлами (их электропроводность велика по сравнению с электропроводностью окружающей среды) вследствие этого $(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)_s \cdot \mathbf{n} = 0$.

Сформулируем основную задачу применительно к соотношениям (1.5) — (1.7). По известному дифференциальному оператору (1.5) с граничным условием (1.7) требуется определить поверхностную силу \mathbf{T} (1.6). В такой постановке задача относится к классу обратных задач теории дифференциальных уравнений, когда по известному оператору и краевым условиям восстанавливается правая часть уравнения [10]. Обратные задачи этого вида обычно приводят к интегральным уравнениям для искомой правой части исходного дифференциального уравнения. Например, в теории дозвукового обтекания тонких тел получается интегральное уравнение для распределения источников и стоков массы.

Интенсивность излучения волн I связана с силой \mathbf{T} простым соотношением

$$I = -\frac{1}{2} (\mathbf{v} \mathbf{T}^*)_S \quad (1.8)$$

где \mathbf{T}^* — комплексно-сопряженная величина.

Для решения задачи используем преобразования Фурье

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{r} \quad (1.9)$$

и соответствующие формулы обращения

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}_1(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_1(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (1.10)$$

$$d\mathbf{r} = dx dy dz, \quad d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z, \quad (\mathbf{k}\mathbf{r}) = k_x x + k_y y + k_z z$$

где $\mathbf{v}_1(\mathbf{k})$ и $\mathbf{f}_1(\mathbf{k})$ — фурье-образы скорости и плотности силы. Предполагается, что функции \mathbf{v} и \mathbf{f} допускают преобразования Фурье в пространствах обобщенных функций [7, 11]. Выберем ось z системы координат x, y, z в направлении магнитного поля \mathbf{H} ($e_z = e_H$). Применяя преобразование (1.9) к уравнению (1.5), получим векторное алгебраическое уравнение для $\mathbf{v}_1(\mathbf{k})$, из которого находим компоненты этого вектора. Пользуясь формулами обращения (1.10), получим интегральную форму решения уравнения (1.5)

$$\rho_0 v_x = i\omega \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_y (k_y f_{1x} - k_x f_{1y})}{(k_x^2 + k_y^2) D_A} + \frac{k_x (\omega^2 - c_S^2 k_z^2) (k_x f_{1x} + k_y f_{1y})}{(k_x^2 + k_y^2) D_S} + \frac{c_S^2 k_x k_z f_{1z}}{D_S} \right] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (1.11)$$

$$\rho_0 v_y = i\omega \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_x(k_y f_{1y} - k_y f_{1x})}{(k_x^2 + k_y^2) D_A} + \frac{k_y(\omega^2 - c_S^2 k_z^2)(k_x f_{1x} + k_y f_{1y})}{(k_x^2 + k_y^2) D_S} + \frac{c_S^2 k_y k_z f_{1z}}{D_S} \right] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (1.12)$$

$$\rho_0 v_z = i\omega \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\omega^2 - (c_A^2 + c_S^2)(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)] f_{1z} + c_S^2 k_z (\mathbf{k}\mathbf{f}_1)}{D_S} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (1.13)$$

Здесь введены обозначения

$$D_A = \omega^2 - c_A^2 k_z^2, \quad D_S = \omega^4 - [\omega^2(c_A^2 + c_S^2) - c_A^2 c_S^2 k_z^2] (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Условия $D_A = 0$ и $D_S = 0$ дают дисперсионные уравнения для альфвеновских и магнитозвуковых волн с фазовыми скоростями

$$u_A = c_A \cos \alpha, \quad u_{\pm}^2 = \frac{c_A^2 + c_S^2 \pm \sqrt{(c_A^2 + c_S^2)^2 - 4c_A^2 c_S^2 \cos^2 \alpha}}{2} \quad (1.14)$$

где α — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 , u_{\pm} — скорости быстрой и медленной магнитозвуковой волны. Полный анализ дисперсионных соотношений и соответствующих им волновых поверхностей содержится в работе [12].

Для плоской задачи, когда $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, z)$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, z)$, из (1.11) — (1.13) находим

$$\rho_0 v_x = i\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega^2 - c_S^2 k_z^2) f_{2x} + c_S^2 k_x k_z f_{2z}}{\omega^4 - [(c_A^2 + c_S^2)\omega^2 - c_A^2 c_S^2 k_z^2] (k_x^2 + k_z^2)} e^{-ik_x x - ik_z z} dk_x dk_z \quad (1.15)$$

$$\rho_0 v_z = i\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_S^2 k_x k_z f_{2x} + [\omega^2 - c_S^2 k_x^2 - c_A^2 (k_x^2 + k_z^2)]}{\omega^4 - [(c_A^2 + c_S^2)\omega^2 - c_A^2 c_S^2 k_z^2] (k_x^2 + k_z^2)} e^{-ik_x x - ik_z z} dk_x dk_z \quad (1.16)$$

$$\rho_0 v_y = 0$$

Здесь использован метод интегрального спуска по координате y [7, 11]

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{i8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x, z) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{r} = f_2(\mathbf{k}) \delta(k_y) \quad (1.17)$$

$$f_2(k) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x, z) e^{i(k_x x + k_z z)} dx dz \quad (1.18)$$

Интегральные формы решения (1.11) — (1.16), (1.17), (1.18) будут использованы далее при анализе задач теории генерации магнитозвуковых волн.

2. Излучение волн осциллирующим поршнем. Рассмотрим излучение магнитозвуковых волн плоскостью, которая гармонически колеблется с частотой ω в направлении нормали к поверхности. Нормаль образует угол α с осью z , вдоль которой направлены силовые линии поля \mathbf{H}_0 (фиг. 1). Плоскость zx содержит нормаль к поверхности. Граничное условие (1.7) в проекциях на оси x, z имеет вид

$$v_x|_S = -u_0 \sin \alpha, \quad v_z|_S = u_0 \cos \alpha \quad (2.1)$$

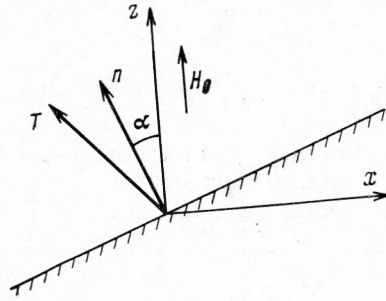
Плоскость s определяется уравнением

$$x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0 \quad (2.2)$$

Пользуясь теорией обобщенных функций, выразим распределение объемной плотности силы \mathbf{f} через поверхностную силу \mathbf{T}

$$\mathbf{f} = (T_x \mathbf{e}_x + T_z \mathbf{e}_z) \delta(x \sin \alpha - z \cos \alpha) \quad (2.3)$$

где T_x и T_z — проекции искомой силы \mathbf{T} , действующей со стороны единичной площадки поверхности поршня на среду, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_z — единичные векторы осей x, z ; δ — символ функции Дирака. Вследствие магнитной анизотропии свойств среды сила \mathbf{T} в общем случае не совпадает с направлением нормали к поверхности.



Фиг. 1

Фурье-образ распределения (2.3) находим по формуле (1.18)

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{k}) = \frac{T_x \mathbf{e}_x + T_z \mathbf{e}_z}{2\pi} \delta(k_z \sin \alpha + k_x \cos \alpha) \quad (2.4)$$

Это означает, что преобразование Фурье функции \mathbf{f} по x и z существует только в смысле обобщенных функций, имея вид δ — распределения в \mathbf{k} представлении (2.4) Подставляя вы-

ражение (2.4) в формулы (1.15), (1.16) и интегрируя по \mathbf{k}_z , получаем

$$v_x = \frac{i\omega \sin \alpha}{2\pi\rho_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega^2 - c_S^2 k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) T_x - c_S^2 k^2 T_z \operatorname{ctg} \alpha}{\omega^4 \sin^2 \alpha - [(c_A^2 + c_S^2) \omega^2 - k^2 c_A^2 c_S^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha] k^2} e^{-ik(x-z \operatorname{ctg} \alpha)} dk \quad (2.5)$$

$$v_y = \frac{i\omega \sin \alpha}{2\pi\rho_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\omega^2 - (c_S^2 + c_A^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha) k^2] T_z - c_S^2 k^2 T_x \operatorname{ctg} \alpha}{\omega^4 \sin^2 \alpha - [(c_A^2 + c_S^2) \omega^2 - c_A^2 c_S^2 k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha] k^2} e^{-ik(x-z \operatorname{ctg} \alpha)} dk \quad (2.6)$$

Здесь опущен индекс x волнового числа k_x . Вычисление несобственных интегралов в (2.5), (2.6) удобно провести в комплексной плоскости переменного k . Правила обхода полюсов подынтегральных функций выбираются в соответствии с принципом излучения, т. е. таким образом, чтобы решение с учетом временного множителя $\exp(-i\omega t)$ имело вид плоских волн, уходящих в левое полупространство от плоскости (2.2)

$$v_x = \frac{(u_+^2 - c_S^2 \cos^2 \alpha) T_x - c_S^2 T_z \sin \alpha \cos \alpha}{\rho_0 u_+ (u_+^2 - u_-^2)} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x \sin \alpha - z \cos \alpha}{u_+} \right) \right] - \frac{(u_-^2 - c_S^2 \cos^2 \alpha) T_x - c_S^2 T_z \sin \alpha \cos \alpha}{\rho_0 u_- (u_+^2 - u_-^2)} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x \sin \alpha - z \cos \alpha}{u_-} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$v_z = \frac{(u_+^2 - c_A^2 - c_S^2 \sin^2 \alpha) T_z - c_S^2 T_x \sin \alpha \cos \alpha}{\rho_0 u_+ (u_+^2 - u_-^2)} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x \sin \alpha - z \cos \alpha}{u_+} \right) \right] - \frac{(u_-^2 - c_A^2 - c_S^2 \sin^2 \alpha) T_z - c_S^2 T_x \sin \alpha \cos \alpha}{\rho_0 u_- (u_+^2 - u_-^2)} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x \sin \alpha - z \cos \alpha}{u_-} \right) \right] \quad (2.8)$$

В соотношениях (2.7), (2.8) u_+ — фазовые скорости быстрой и медленной волн (1.14).

Для определения неизвестных величин T_x и T_z воспользуемся граничными условиями на поверхности плоскости. Таким образом из соотноше-

ний (2.1), (2.2), (2.7), (2.8) получаем систему алгебраических уравнений

$$(u_+u_- + c_S^2 \cos^2 \alpha) T_x + c_S^2 T_z \sin \alpha \cos \alpha = -\rho_0 u_0 u_+ u_- (u_+ + u_-) \sin \alpha \quad (2.9)$$

$$c_S^2 T_x \sin \alpha \cos \alpha + (u_+u_- + c_A^2 + c_S^2 \sin^2 \alpha) T_z = \rho_0 u_0 u_+ u_- (u_+ + u_-) \cos \alpha \quad (2.10)$$

решение которой имеет простой вид

$$T_x = -\frac{\rho_0 u_0 \sin \alpha}{u_+ + u_-} (u_+^2 + u_-^2 + u_+ u_-) \quad (2.11)$$

$$T_z = \frac{\rho_0 u_0 \cos \alpha}{u_+ + u_-} (u_+ u_- + c_S^2) \quad (2.12)$$

Величины T_x и T_z , взятые с обратными знаками, дают компоненты силы реакции излучения, которая действует со стороны среды на единицу площади осциллирующей поверхности. Как видно из формул (2.11), (2.12), вектор \mathbf{T} не совпадает по направлению с нормалью \mathbf{n} (фиг. 1). Исключения составляют частные случаи $c_A = 0$, а также $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, когда $\mathbf{T} = T\mathbf{n}$.

Выражения (2.11), (2.12) упрощаются в двух предельных случаях горячей $c_S \gg c_A$ и холодной сред $c_A \gg c_S$ [13]. Так, при $c_S \gg c_A$ $u_+ \simeq c_S$, $u_- \simeq c_A \cos \alpha$ (1.14) и

$$T_x \simeq -\rho_0 c_S u_0 \sin \alpha \left(1 + \frac{c_A^2}{c_S^2} \cos \alpha\right), \quad T_z \simeq \rho_0 c_S u_0 \cos \alpha \quad (2.13)$$

В случае $c_A \gg c_S$ имеем $u_+ \simeq c_A$, $u_- \simeq c_S \cos \alpha$ и

$$T_x \simeq \rho_0 u_0 c_A \sin \alpha \left(1 - \frac{c_S^2}{c_A^2} \cos \alpha\right), \quad T_z \simeq \rho_0 u_0 c_S \cos \alpha \left(\cos \alpha + \frac{c_S}{c_A}\right) \quad (2.14)$$

Заметим, что если $c_S \rightarrow 0$, то $T_z \rightarrow 0$.

Подставляя T_x и T_z из формул (2.11), (2.12) в (2.7), (2.8), находим окончательные выражения для компонент скорости

$$v_x = -\frac{u_0 \sin \alpha}{u_+^2 - u_-^2} [u_+^2 \exp(i\Psi_+) - u_-^2 \exp(i\Psi_-)] \quad (2.15)$$

$$v_z = \frac{u_0 \cos \alpha}{u_+^2 - u_-^2} [(c_S^2 - u_-^2) \exp(i\Psi_+) - (c_S^2 - u_+^2) \exp(i\Psi_-)] \quad (2.16)$$

где введены обозначения для фаз быстрой и медленной магнитозвуковой волн

$$\Psi_{\pm} = -\omega_0 (t + (x \sin \alpha - z \cos \alpha)/u_{\pm}) \quad (2.17)$$

Из соотношений (1.2)–(1.4) и формул (2.15)–(2.17) получаем

$$\rho = \frac{\rho_0 u_0}{u_+^2 - u_-^2} \left[\frac{u_+^2 \sin^2 \alpha - (u_-^2 - c_S^2) \cos^2 \alpha}{u_+} \exp(i\Psi_+) - \frac{u_-^2 \sin^2 \alpha - (u_+^2 - c_S^2)}{u_-} \exp(i\Psi_-) \right] \quad (2.18)$$

$$h_x = H_0 \frac{u_0 \sin 2\alpha}{2(u_+^2 - u_-^2)} [u_+ \exp(i\Psi_+) - u_- \exp(i\Psi_-)] \quad (2.19)$$

$$h_z = H_0 \frac{u_0 \sin^2 \alpha}{u_+^2 - u_-^2} [u_+ \exp(i\Psi_+) - u_- \exp(i\Psi_-)] \quad (2.20)$$

$$v_y = h_y = 0, \quad p = c_S^2 \rho \quad (2.21)$$

Следует иметь в виду, что линейные уравнения (1.1)–(1.4) получены при условии $|h|/H_0 \ll 1$, $(\rho/\rho_0) \ll 1$. На основании (2.18)–(2.20) эти неравенства принимают вид $|h|/H_0 \leq (u_0/u_+) \ll 1$ и аналогично $|\rho/\rho_0| \leq (u_0/u_+) \ll 1$.

Таким образом, необходимое условие линейризации $(u_0/u_+) \ll 1$, что совпадает с известным в акустике условием $u_0 \ll c_S$ при $c_S \gg c_A$. Укажем также, что реальные поршни имеют конечные размеры колеблющейся поверхности. Здесь предполагалось по аналогии с акустической теорией, что максимальная длина излучаемой волны $\lambda_+ = (2\pi u_+/\omega) \ll l$, где l — минимальный размер поверхности поршня.

Интенсивность излучения определяется по формулам (1.8), (2.11) — (2.12)

$$I = \frac{\rho_0 u_0^2}{2(u_+ + u_-)} [c_A^2 \sin^2 \alpha + c_S^2 + u_+ u_-] \quad (2.22)$$

При выводе (2.9) — (2.22) использованы простые связи

$$u_+^2 + u_-^2 = c_A^2 + c_S^2, \quad u_+ u_- = c_A c_S \cos \alpha$$

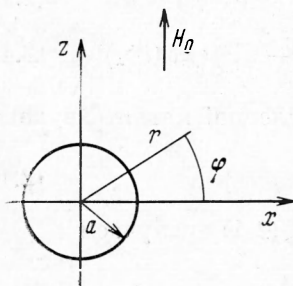
которые следуют из (1.14). Для двух предельных ориентаций осциллирующей плоскости из (2.22) имеем

$$I = \begin{cases} \rho_0 c_S u_0^2 / 2 & \text{при } \alpha = 0 \\ \rho_0 \sqrt{c_A^2 + c_S^2} u_0^2 / 2 & \text{при } \alpha = \pi/2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Следовательно, если нормаль $\mathbf{n} \parallel \mathbf{H}_0$, то генерируется обычный звук, а при $\mathbf{n} \perp \mathbf{H}_0$ излучается быстрая волна с фазовой скоростью $u_+ = (c_A^2 + c_S^2)^{1/2}$. Таким образом, задача об излучении звука осциллирующей плоскостью решается при произвольных значениях скоростей c_A и c_S .

3. Излучение магнитного звука пульсирующим цилиндром. Для более сложных излучателей, например радиально пульсирующего цилиндра или шара, не удается получить решение задачи об излучении при произвольных значениях c_A и c_S . Вследствие этого здесь рассмотрен только случай генерации так называемого «магнитного» звука в холодной среде, т. е. $c_S = 0$ [13]. Другой предельный случай $c_A = 0$, $c_S \neq 0$ хорошо известен в акустике и здесь не обсуждается.

Рассмотрим вопрос о генерации магнитного звука круглым цилиндром, ось которого направлена по y (фиг. 2), т. е. перпендикулярно силовым линиям \mathbf{H}_0 . Возмущения скорости вследствие радиальных пульсаций цилиндра по-прежнему определяются формулами (1.1)–(1.16) при $c_S = 0$



Фиг. 2

$$\rho_0 v_x = i \omega \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{2x}}{\omega^2 - c_A^2 (k_x^2 + k_z^2)} e^{-ik_x x - ik_z z} dk_x dk_z; \quad v_y = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho_0 v_z = \frac{i}{\omega} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_{2z} e^{-ik_x x - ik_z z} dk_x dk_z \quad (3.2)$$

Здесь по-прежнему опущен временной фактор $\exp(i - \omega t)$. Граничное условие (1.7) на поверхности цилиндра

$$v_x = u_0 \cos \varphi, \quad v_z = u_0 \sin \varphi \quad \text{при } r = a \quad (3.3)$$

u_0 — амплитуда скорости радиальных колебаний поверхности цилиндра $u_0 = a_1 \omega$, a_1 — радиальное смещение, которое предполагается малым по сравнению со средним радиусом цилиндра $a_1 \ll a_0$. В качестве независимых переменных здесь всюду используются полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (фиг. 2). Распределение плотности силы f представим в виде

$$\mathbf{f} = \frac{T_x(\varphi) \mathbf{e}_x + T_z(\varphi) \mathbf{e}_z}{\sqrt{ra}} \delta(r - a) \quad (3.4)$$

где $T_x(\varphi)$ и $T_z(\varphi)$ — компоненты силы, действующей на среду со стороны единицы длины цилиндра. Эти неизвестные функции угла φ подлежат определению с помощью граничных условий (3.3) и соотношений (3.1), (3.2).

Особенно просто находится $T_z(\varphi)$. Действительно, в силу (3.2), (3.3)

$$T_z(\varphi) = -i\rho_0 u_0 \omega \cos \varphi \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{ra} / \delta(r - a) = 0 \quad (3.5)$$

так как по определению $\lim_{r \rightarrow a} \delta(r - a) = \infty$ при $r \rightarrow a^1$. Для определения распределения $T_x(\varphi)$ подставим f_x (3.4) в интеграл (1.18)

$$f_{2x} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} T_x(\varphi) e^{ika \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi \quad (k_x = k \cos \varphi', \quad k_z = k \sin \varphi') \quad (3.6)$$

Воспользуемся известным представлением

$$e^{ika \cos(\varphi - \varphi')} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(ka) e^{in(\varphi - \varphi')} \quad (3.7)$$

где J_n — функция Бесселя первого рода порядка n . Из соотношений (3.6), (3.7) находим

$$f_{2x}(k, \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n T_{xn} J_n(ka) e^{-in\varphi'} \quad (3.8)$$

$$T_{xn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_x(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi, \quad T_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{xn} e^{-in\varphi} \quad (3.9)$$

Подставим соотношение (3.8) в исходный интеграл (3.1) и вновь, используя представление (3.7), получим

$$\begin{aligned} \rho_0 v_x(r, \varphi) &= i\omega \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{xn} e^{\frac{i(n-m)\pi}{2} - im\varphi} \times \\ &\times \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-m)\varphi'} d\varphi' \right] \int_0^\infty \frac{k J_n(ka) J_n(kr) dk}{\omega^2 - c_A^2 k^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

¹ Относительно радиальной функции Дирака $\delta(r - a)$ и иных представлений δ -образных функций см. [14, 15].

Интеграл по φ' дает символ Кронекера δ_{nm} , что позволяет просуммировать по m в формуле (3.10). После этого второй интеграл, содержащий произведение бesselевых функций переходит в известный [16]

$$\int_0^{\infty} \frac{k J_n(ka) J_n(kr)}{\omega^2 - c_A^2 k^2} = -\frac{\pi i}{2c_A^2} J_n(k_0 a) H_n^{(1)}(k_0 r) \quad \text{при } r \geq a \quad (3.11)$$

где $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, $k_0 = \omega / c_A$ — волновое число. Таким образом, выражение (3.10) принимает вид

$$\rho_0 v_x(r, \varphi) = \frac{\pi \omega}{2c_A^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{xn} J_n(k_0 a) H_n^{(1)}(k_0 r) e^{-in\varphi} \quad (3.12)$$

Если подставить в (3.12) выражение для T_{xn} (3.9) и воспользоваться теоремой сложения для цилиндрических функций, то получим интегральное представление

$$\rho_0 v_x(r, \varphi) = \frac{\omega}{4c_A^2} \int_0^{2\pi} T_x(\varphi') H_0^{(1)}[k_0 \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \varphi')}] d\varphi'$$

Из (3.12) с помощью граничного условия (3.3) находим

$$T_{xn} = \frac{\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}}{\pi k_0 J_n(k_0 a) H_n^{(1)}(k_0 a)} \rho_0 u_0 c_A \quad (3.13)$$

и на основании (3.9) окончательно получаем

$$T_x = \frac{2\rho_0 u_0 c_A \cos \varphi}{\pi k_0 J_1(k_0 a) H_1^{(1)}(k_0 a)} \quad (3.14)$$

Возмущения в среде легко определяются с помощью (1.2)–(1.4), (3.12) и (3.14)

$$\begin{aligned} v_x &= u_0 \cos \varphi \frac{H_1^{(1)}(k_0 r)}{H_1^{(1)}(k_0 a)}, & \rho &= i\rho_0 \frac{u_0}{c_A} \frac{k_0 r \cos^2 \varphi H_1^{(1)'}(k_0 r) + \sin^2 \varphi H_1^{(1)}(k_0 r)}{k_0 r H_1^{(1)}(k_0 a)} \\ \cdot \quad h_x &= iH_0 \frac{u_0}{c_A} \sin \varphi \cos \varphi \frac{k_0 r H_1^{(1)'}(k_0 r) - H_1^{(1)}(k_0 r)}{k_0 r H_1^{(1)}(k_0 a)} \\ h_z &= H_0 \frac{\rho}{\rho_0}, & v_z &= v_y = 0, & h_y &= 0, & p &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, с учетом фактора $\exp(-i\omega t)$ видно, что соотношения (3.15) описывают при $k_0 r \gg 1$ цилиндрические волны магнитного звука, расходящиеся от цилиндра, так как асимптотика функции $H_1^{(1)}$ и ее производной имеет вид $r^{-1/2} \exp(ik_0 r)$ [16].

Распределение интенсивности излучения по полярному углу находим из формул (1.9), (3.14)

$$\frac{dI}{d\varphi} = \frac{\rho_0 u_0^2 c_A \cos^2 \varphi}{\pi k_0 [J_1^2(k_0 a) + N_1^2(k_0 a)]} \quad (3.16)$$

где N_1 — функция Неймана. Следовательно, диаграмма направленности в плоскости x, z имеет дипольный характер. Излучение отсутствует вдоль

оси диполя $\varphi = \pi / 2$. Полная интенсивность

$$I = \frac{\rho_0 u_0^2 c_A}{k_0 [J_1^2(k_0 a) + N_1^2(k_0 a)]} \quad (3.17)$$

имеет простое асимптотическое поведение

$$I = \begin{cases} 1/4 \pi^2 \rho_0 u_0^2 a^2 \omega & \text{при } k_0 a \ll 1 \\ 1/2 \pi \rho_0 u_0^2 c_A a & \text{при } k_0 a \gg 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Соотношения (3.18) аналогичны соответствующим формулам для интенсивности излучения обычного звука пульсирующим цилиндром [9,17]. Принципиальное отличие магнитного звука от обычного состоит в том, что в его волнах отсутствуют возмущения давления $p = 0$, возмущения скорости анизотропны. Вместо гидродинамического давления в магнитном звуке появляется магнитное давление, обусловленное наличием возмущений магнитного поля. Следствием магнитной анизотропии свойств среды является дипольная диаграмма направленности (3.16).

4. Излучение волн пульсирующим шаром. Вопрос об излучении магнитного звука пульсирующим шаром решается аналогично предыдущему, поэтому все промежуточные вычисления здесь опущены. Для упрощения расчетов предполагаем, что радиальные колебания шара аксиально-симметричны относительно оси z , вдоль которой направлены силовые линии магнитного поля H_0 . При этом альфвеновские волны не возбуждаются и выполняется условие $\text{rot}_z f = 0$ или в \mathbf{k} -представлении $k_x f_{1y} = k_y f_{1x}$, которое при наличии аксиально-симметричного распределения поля скоростей на шаре, строго получается из общих соотношений (1.11) — (1.13) при любых c_s и c_A (см. также [5]). Из общих формул (1.11)—(1.13) при этом условии и в предположении $c_s = 0$ получаем

$$\rho_0 v_{x,y} = i\omega \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{1x,y} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} d\mathbf{k}}{\omega^2 - c_A^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)} \quad (4.1)$$

$$\rho_0 v_z = i f_z / \omega \quad (4.2)$$

Распределение сил f на поверхности шара представим в виде

$$\mathbf{f} = [T_x(\varphi, \theta) \mathbf{e}_x + T_y(\varphi, \theta) \mathbf{e}_y + T_z(\varphi, \theta) \mathbf{e}_z] \delta(R - R_0) / RR_0 \quad (4.3)$$

Здесь в качестве независимых переменных использованы сферические координаты R, θ, φ с полярной осью вдоль z , R_0 — радиус шара. На его поверхности граничное условие (1.8) для однородных радиальных пульсаций записывается в виде

$$v_x = u_0 \sin \theta \cos \varphi, \quad v_y = u_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad v_z = u_0 \cos \theta \quad (4.4)$$

где $u_0 = \omega R_1$ — амплитуда скорости радиальных колебаний шара, при этом считаем $R_1 \ll R_0$. Временной фактор $\exp(i\omega t)$ всюду опущен. Аналогично случаю пульсирующего цилиндра, из формул (4.2)—(4.4) сразу находим

$$T_z(\varphi, \theta) = \lim_{R \rightarrow R_0} \frac{\omega \rho_0 u_0 R R_0 \cos \theta}{i \delta(R - R_0)} = 0 \quad (4.5)$$

Для анализа интеграла (4.1) введем сферические координаты

$$k_z = q \cos \theta', \quad k_x = q \sin \theta' \cos \varphi', \quad k_y = q \sin \theta' \sin \varphi'$$

и воспользуемся разложением функции

$$\exp(-iqR \cos \psi) = \left(\frac{\pi}{2qR}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) J_{n+1/2}(qR) P_n(\cos \psi) \quad (4.6)$$

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

Здесь $J_{n+1/2}$ — функции Бесселя, P_n — полиномы Лежандра, для которых теорема сложения дает

$$P_n(\cos \psi) = \sum_{m=-n}^{+n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') e^{im(\varphi-\varphi')} \quad (4.7)$$

Отсюда ясно, что неизвестные функции $T_{x,y}(\varphi, \theta)$ удобно искать в виде разложения по шаровым функциям P_n^m

$$T_{x,y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} T_{x,y}(n, m) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (4.8)$$

Из формул (4.19), (4.6) — (4.8) находим

$$f_{1,x,y} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\pi}{2qR_0}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} i^n T_{x,y}(n, m) J_{n+1/2}(qR_0) P_n^m(\cos \theta') e^{im\varphi'} \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) в интеграл (4.1), получаем

$$\begin{aligned} \rho_0 v_{x,y}(R, \varphi, \theta) &= \frac{\pi\omega}{2C_A^2 \sqrt{R R_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} T_{x,y}(n, m) J_{n+1/2} \times \\ &\times (k_0 R_0) H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 R_0) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $k_0 = \omega / C_A$. Выражение (4.10) вполне аналогично (3.12). Из (4.10) можно определить $T_{x,y}$ при достаточно произвольных граничных условиях на поверхности шара, если они являются, как указывалось, аксиально симметричными относительно оси z . В случае однородных радиальных пульсаций шара (4.4) из соотношений (4.8), (4.10) находим

$$T_{x,y} = \frac{2\rho_0 u_0 c_A^2 R_0 \sin \theta}{\pi \omega J_{3/2}(k_0 R_0) H_{3/2}^{(1)}(k_0 R_0)} \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases} \quad (4.11)$$

а возмущения скорости имеют вид

$$v_{x,y} = u_0 \sin \theta \frac{H_{3/2}^{(1)}(k_0 R)}{H_{3/2}^{(1)}(k_0 R_0)} \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases}, \quad v_z = 0 \quad (4.12)$$

В формулах (4.11), (4.12) $\cos \varphi$ относится к x -компонентам. Интенсивность излучения магнитного звука в элемент телесного угла $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ определяется с помощью (4.11) по формуле (1.8)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\rho_0 u_0^2 c_A^2 R_0}{\pi \omega [J_{3/2}^2(k_0 R_0) + N_{3/2}^2(k_0 R_0)]} \sin^2 \theta \quad (4.13)$$

Следовательно, диаграмма направленности излучения магнитного звука радиально пульсирующим шаром является дипольной в отличие от акустического случая $c_A = 0$, $c_S \neq 0$, когда тот же шар порождает изотропное излучение (акустический монополь) [9]. Полная интенсивность излучения

$$I = \frac{4\pi\rho_0\omega^2 c_A k_0^2 R_0^4}{3(1 + k_0^2 R_0^2)} \quad (4.14)$$

Здесь использованы известные формулы

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \quad N_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right) \quad (4.15)$$

Таким образом, в холодных магнитоактивных средах, в которых магнитное давление $H_0^2 / 4\pi$ значительно превышает гидродинамическое p_0 , что фактически эквивалентно условию $c_A \gg c_S$, механическое движение твердых тел возбуждает магнитный звук. Это излучение существенно отличается от обычного звука, генерируемого теми же излучателями в холодных средах $c_S \gg c_A$. Этот вывод справедлив и для более сложных излучателей, чем те, которые были рассмотрены здесь. Укажем также, что на основании полученных здесь результатов (см. (3.12), (4.10)) можно рассмотреть генерацию магнитного звука цилиндрами и шарами с более сложным распределением скоростей пульсаций по их поверхностям, аналогично известным задачам акустики [8].

Поступила 7 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

- Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
- Ахизер А. И., Ситенко А. Г. К теории возбуждения гидромагнитных волн. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 1 (7), стр. 116—120.
- Морозов А. И. Черенковская генерация магнитозвуковых волн. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 331—352.
- Докучаев В. П. Черенковское излучение магнитозвуковых волн протяженными источниками. ЖЭТФ, 1965, т. 48, вып. 2, стр. 587—595.
- Докучаев В. П. Черенковское излучение волн Альфвена. ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 2, стр. 723—731.
- Докучаев В. П. К линейной теории обтекания тел. Метод силовых источников. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 1006—1014.
- Шварц Л. Математические методы для физических наук. М., «Мир», 1965.
- Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
- Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1969.
- Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
- Lighthill M. J. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic waves motions. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1960, vol. 252, No. 1014, pp. 397—430.
- Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М., Атомиздат, 1964.
- Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
- Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
- Ватсон Г. Н. Теория бесселевских функций, ч. I. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
- Морс Ф. Колебания и звук. М.—Л., Гостехиздат, 1949.