НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩИЙСЯ ПРОВОДНИК

Е. И. Биченков

(Новосибирск)

Исследование диффузии магнитного поля в движущийся проводник представляет интерес в связи с получением сверхсильных магнитных полей путем быстрого обжатия проводящих оболочек [1, 2]. В работах [3, 4] показано, что при сжатии с постоянной скоростью магнитного поля в плоской щели весь поток уходит в проводник. В настоящей заметке приводится общий результат о сохранении суммарного потока в полости и проводнике при произвольном движении последнего и рассмотрен специальный случай движения проводника, когда, несмотря на конечность проводимости материала, ограничивающего магнитное поле, поток в полости остается неизменным.

Обозначения

Φ_1, Φ_* — поток, продиффундировавший в проводник,
Φ_2 — поток в полости,
Φ_0 — суммарный поток,
r — радиус,
r_* — граница полости,
δ — толщина скин-слоя,
$\delta(r)$ — дельта-функция от r,
t — время
q — интенсивность стока жидкости,
v — скорость,
Φ — поток, продиффундировавший на глубину, большую r,
x — автомодельная переменная,
φ — безразмерная доля потока, продиффундировавшего на глубину, большую r,
φ_* — доля потока, продиффундировавшая в проводник,
σ — проводимость,
c — электродинамическая постоянная,
R_m — магнитное число Рейнольдса,
μ — безразмерный параметр.

$$x = \pi r^2 / qt, \qquad \varphi = \Phi / \Phi_0, \qquad \mu = \sigma q / c^2$$

§ 1. Сохранение суммарного потока при диффузии магнитного поля в движущийся проводник. Задача о диффузии магнитного поля из полости, ограниченной движущимся проводником, сводится к отысканию решения системы уравнений Максвелла в движущемся проводнике, удовлетворяющего условиям на бесконечности и условию непрерывности полей на границе полости [3]. При малых скоростях движения ($v \ll c$) и высокой проводимости нетрудно получить, что в любой момент времени сумма потока $\Phi_1(t)$, продиффундировавшего в проводник, и потока $\Phi_2(t)$, находящегося в полости, постоянна, т. е.

$$\Phi_1(t) + \Phi_2(t) = \Phi_0$$

если проводник неограниченных размеров и на бесконечности поле отсутствует всегда. Это простое следствие закона индукции, так как при указанных условиях циркуляция напряженности электрического поля по контуру неограниченных размеров обращается в нуль, а вместе с ней равна нулю производная по времени от магнитного потока через такой контур, т. е. суммарный поток в полости и проводнике сохраняется.

§ 2. Специальный случай движения проводника. Постоянство потока в цилиндрической полости. Представляются возможными такие случаи движения проводника, когда сохраняется не только суммарный поток, но остается постоянным поток в полости, несмотря на наличие конечной проводимости у проводника. Утечка потока из полости отсутствует тогда, когда поле в проводнике из-за движения его и диффузии проникшего в проводник потока изменяется во времени так же, как и поле в полости в результате изменения только ее размеров. При отсутствии утечки потока из цилиндрической полости поле в полости $H \sim 1 / r^2$, поле в проводнике $H \sim 1 / r\delta$, где r — радиус полости, δ — толщина скин-слоя, откуда следует, что указанное явление может иметь место, если $r \sim \delta$, т. е. размер полости изменяется во времени так же, как нарастает скин-слой. Если $r \sim \sqrt{t}$, то толщина скин-слоя окажется тоже пропорциональной $\sqrt{t}$, так как диффузия поля в проводник происходит на глубину, пропорциональную $\sqrt{t}$, а перенос поля с движущимся проводником в рассматриваемом случае будет тоже пропорционален $\sqrt{t}$.

Условие $r \sim \sqrt{t}$ для несжимаемой проводящей жидкости соответствует случаю, когда существует один источник или сток постоянной интенсивности q. Пусть сток расположен на бесконечности, т. е. полость расширяется. Тогда

$$V = q / 2\pi r, \qquad r_*^2 = qt / \pi$$

Уравнение диффузии магнитного потока в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{q}{2\pi r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} r \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \left(\Phi = 2\pi \int\limits_r^\infty rH\, dr\right)$$

Здесь Φ — поток, продиффундировавший в некоторый момент времени на глубину, бóльшую r. На границе полости должны выполняться условия сохранения суммарного потока и непрерывности магнитного поля

$$\Phi(r, t)\,|_{r=r_*} = \Phi_*(t), \qquad \Phi_0 - \Phi_*(t) = -\frac{r}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big|_{r=r_*}$$

Если предположить, что в начальный момент поток был отличен от нуля только на оси, т. е.

$$\Phi(r, 0) = \Phi_0 \delta(r)$$

то задача окажется автомодельной и сводится к отысканию при $1 \leqslant x < \infty$ решения уравнения

$$\mu^{-1} x \varphi'' = (1 - x)\varphi' \qquad (1 \leqslant x < \infty) \tag{2.1}$$

удовлетворяющего условиям

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x \to \infty, \qquad \varphi\,|_{x=1} = \varphi_*, \qquad 1 - \varphi_* = -(x\varphi')\,|_{x=1} \tag{2.2}$$

Здесь введена автомодельная переменная $x = \pi r^2 / qt$ и безразмерный поток в проводнике $\varphi = \Phi / \Phi_0$. Параметр

$$\mu = \sigma q / c^2{}_2$$

связан с магнитным числом Рейнольдса R_m [5] соотношением $\mu = {}^1/_2\, R_m$. Граница полости определяется условием $x = 1$. Из условия непрерывности магнитного поля на границе полости (2.2) следует, что $\varphi_* = \text{const}$, т. е. доля потока, продиффундировавшего в проводник, остается постоянной в процессе расширения полости, в связи с чем поток в полости тоже постоянен.

Решение уравнения (2, 1), удовлетворяющее условию в бесконечности, имеет вид

$$\varphi = C \int\limits_x^\infty x^\mu e^{-\mu x}\, dx$$

Из условий на границе полости следует

$$C = \varphi_* \left(\int\limits_1^\infty x^\mu e^{-\mu x}\, dx\right)^{-1}, \qquad \frac{1}{\varphi_*} = 1 + e^{-\mu}\left(\int\limits_1^\infty x^\mu l^{-\mu x} dx\right)^{-1} \tag{2.3}$$

Из (2.3) нетрудно получить, что

$$\varphi_* = 1 - \mu^{1+\mu}(1 + 0(\mu)) \quad \text{при } \mu \ll 1$$

Используя метод Лапласа [6] для оценки интеграла, входящего в (2.3), удается получить

$$\varphi_* \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad \text{при } \mu \gg 1$$

Приведенный пример показывает, что в специальном случае движения проводника поток в полости может оставаться постоянным и при больших скоростях движения отличаться от начального потока на величины порядка $1 / \sqrt{\mu}$, а при малых скоростях быть порядка $\mu^{1+\mu}$.

Следует отметить, что рассмотренные явления имеют прямые аналоги в соответствующих задачах теплопроводности.

Поступила 28 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. С а х а р о в А. Д. и др. Магнитная кумуляция. Докл. АН СССР, 1965, т. 65, № 1.
2. F o w l e r G. M., G a r n W. B., C a i r d R. S. Production of Very High Magnetic Fields by Implosion. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 3.
3. Б и ч е н к о в Е. И. Влияние конечной проводимости на получение сильных магнитных полей путем быстрого обжатия проводящих оболочек. ПМТФ, 1964, № 6.
4. P a t o n A., M i l l a r W. Compression of magnetic Field Between Two Semi - Infinite Slabs of Constan Conductivity. J. Appl. Phys., 1964, vol. 35, No. 4.
5. К а р а с и к В. Р. Физика и техника сильных магнитных полей. Изд-во «Наука», 1964.
6. Э р д е й и А. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.