Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 6

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СПОНТАННАЯ ЗАКРУТКА В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

УДК 532.516+538.4

Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Проблема спонтанной закрутки рассматривалась в работах [1–7] и заключается в следующем: может ли возникать вращательное движение при отсутствии явных внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда движение без вращения заведомо возможно?

Более точная формулировка этой проблемы дана в [5, 6]. Предложенная там постановка обеспечивает строгий контроль кинематического потока осевой составляющей момента импульса, исключающий втекание вращающейся жидкости в область течения. Возникновение вращательного течения рассматривается как бифуркация исходного осесимметричного течения в результате потери устойчивости к течению с закруткой [1].

В [5, 6] показано, что бифуркация осесимметричное течение — вращательно-симметричное течение (и соответствующий плоский аналог такого перехода [6]) не имеет места для произвольной сжимаемой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. В случае плоского аналога это утверждение справедливо и для проводящей жидкости, движущейся в присутствии магнитного поля. Для осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с конечной проводимостью в [7] было показано, что осесимметричная спонтанная закрутка невозможна, если сечение области течения меридиональной плоскостью является односвязным.

Для идеально проводящей жидкости характер связности области течения не имеет значения, так как в осесимметричных течениях такой жидкости полоидальные компоненты магнитного поля из-за вмороженности не исчезают в любом случае.

В данной статье приводится пример возникновения осесимметричной спонтанной закрутки в исходном осесимметричном течении невязкой идеально проводящей жидкости в магнитном поле.

Уравнения, описывающие такие течения, в общепринятых обозначениях (плотность жидкости $\rho = 1$) в цилиндрической системе координат r, φ, z имеют вид

$$u_t + uu_r + wu_z - \frac{v^2}{r} + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{h}^2\right)_r = h_1 h_{1r} + h_3 h_{1r} - \frac{h^2}{r} + f_1; \qquad (1)$$

$$w_t + uw_r + ww_z + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{h}^2\right)_z = h_1 h_{3r} + h_3 h_{3z} + f_3; \qquad (2)$$

$$\Psi_t + u\Psi_r + w\Psi_z = 0, \quad h_1 = -\frac{1}{r}\Psi_z, \quad h_3 = \frac{1}{r}\Psi_r, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi}}. \qquad (3)$$

Эти уравнения описывают полоидальные (радиальную и осевую) составляющие скорости $u = -(1/r)\psi_z$, $w = (1/r)\psi_r$ и магнитного поля h_1 и h_3, где f_1 и f_3 — соответствующие компоненты внешних массовых сил.

Азимутальные составляющие скорости $v_\varphi = v$ и магнитного поля $h_\varphi = h$ удовлетворяют уравнениям:

$$v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} = h_1 h_r + h_3 h_z + \frac{h_1 h}{r}; \qquad (4)$$

$$h_t + uh_r + wh_z - \frac{uh}{r} = h_1 v_r + h_3 v_z - \frac{h_1 v}{r}. \tag{5}$$

На границе осесимметричной области D должны выполняться условия $\mathbf{vn} = 0$ и $\mathbf{hn} = 0$, где $\mathbf{n} = (n_r, 0, n_z)$ — внешняя единичная нормаль к границе области течения D.

Для этой системы выполняется закон сохранения энергии. Обозначим

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2}(u^2 + w^2 + h_1{}^2 + h_3{}^2), \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{2}(v^2 + h^2).$$

Здесь ε_p — плотность энергии полоидальных, а ε_φ азимутальных составляющих скорости и магнитного поля. В силу уравнений (1)–(5) имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D (\varepsilon_p + \varepsilon_\varphi) r\,dr\,dz = \int\limits_D (uf_1 + wf_3) r\,dr\,dz,$$

причем выполняются равенства

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D r\varepsilon_p\,dr\,dz = \int\limits_D u(v^2 - h^2)\,dr\,dz + \int\limits_D (uf_1 + wf_3) r\,dr\,dz,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D r\varepsilon_\varphi\,dr\,dz = -\int\limits_D u(v^2 - h^2)\,dr\,dz.$$

Последние два соотношения показывают, что в осесимметричном течении полоидальная и азимутальная компоненты могут обмениваться энергией, в отличие от плоского аналога рассматриваемого течения, где такой обмен отсутствует и соответствующие компоненты энергии не меняются во времени, если внешние силы равны нулю.

Однако сам по себе факт обмена не дает оснований для заключения о возможности спонтанной закрутки. Это видно из того, что в отсутствие магнитного поля обмен происходит, а спонтанная закрутка невозможна, так как в этом случае из уравнения (4) получаем:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D r^3 v^2\,dr\,dz = 0.$$

Как было сказано выше, для возникновения закрутки необходимо существование механизма, обеспечивающего контрградиентный поток осевой составляющей момента импульса. Покажем, что в присутствии магнитного поля такой механизм может приводить к возбуждению спонтанной закрутки.

Пусть имеется стационарное решение системы (1)–(5) в некоторой осесимметричной области D, удовлетворяющее граничным условиям $\mathbf{vn} = 0$ и $\mathbf{hn} = 0$, такое, что $\psi_0(r,z) = \lambda\Psi_0(r,z)$, $v = 0$, $h = 0$ при $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, где λ — константа. Такие течения существуют. В качестве примера можно взять известный магнитогидродинамический вихрь Хилла, рассматривая течение внутри сферы, на которой $\psi = \Psi = 0$.

Положим $A = v + h$, $B = v - h$. Тогда для A и B из уравнений (4), (5) в линейном приближении имеем

$$A_t + (\lambda - 1)h_{01}A_r + (\lambda - 1)h_{03}A_z + (\lambda + 1)\frac{h_{01}}{r}B = 0,$$

$$B_t + (\lambda + 1)h_{01}B_r + (\lambda + 1)h_{03}B_z + (\lambda - 1)\frac{h_{01}}{r}A = 0,$$

где h_{01} и h_{03} — соответствующие компоненты стационарного магнитного поля.

Из этих уравнений получаем следующий закон сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D [(1-\lambda)A^2 + (1+\lambda)B^2]r\,dr\,dz = 0.$$

Отсюда вытекает, что при $|\lambda| < 1$, т. е. при достаточно сильном магнитном поле, исходное течение (в линейном приближении) устойчиво к закрутке.

Пусть $\lambda = 1$. Если теперь при $t = 0$ задать бесконечно малое возмущение $v = v_0(\psi_0)$, $h = 0$, то линейная задача устойчивости исходного течения имеет решение:

$$A = v_0(\psi_0) + 2v_0(\psi_0)\frac{\psi_{0z}}{r^2}t, \qquad B = v_0(\psi_0)$$

и, соответственно,

$$v = v_0(\psi_0)(1 + \frac{\psi_{0z}}{r^2}t), \qquad h = v_0(\psi_0)\frac{\psi_{0z}}{r^2}t. \tag{6}$$

Таким образом, в этом случае исходное стационарное течение неустойчиво и в результате возникает течение с закруткой. Если при тех же начальных условиях поддерживать исходные полоидальные составляющие скорости и магнитного поля так, что $\psi = \Psi = \psi_0$ с помощью внешних массовых сил $f_1 = -(v^2 - h^2)/r$, $f_3 = 0$, то уравнения (6) будут являться точным решением системы (1)–(5). Конечно, введение таких сил является достаточно искусственным приемом, однако без магнитного поля при любых внешних силах, имеющих только полоидальные составляющие, закрутка невозможна.

Этот пример показывает, что за счет потока момента импульса, связанного с магнитным полем, в осесимметричных течениях может осуществляться механизм, обеспечивающий контрградиентный поток механического момента импульса, поддерживающий дифференциальное вращение, и, соответственно, возникать спонтанная закрутка.

Отметим, что найденная неустойчивость представляет собой новый, ранее не известный тип неустойчивости в магнитогидродинамических течениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01771).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
2. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989.
3. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Турбулентное вихревое динамо // ПММ. 1989. Т. 53, вып. 4. С. 613–624.
4. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Трехмерные автоколебательные магнитогидродинамические течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля // Магнитная гидродинамика. 1993. № 1. С. 41–48.
5. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.
6. **Губарев Ю. Г., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 52–59.
7. **Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 35–43.

Поступила в редакцию 30/XII 1996 г.